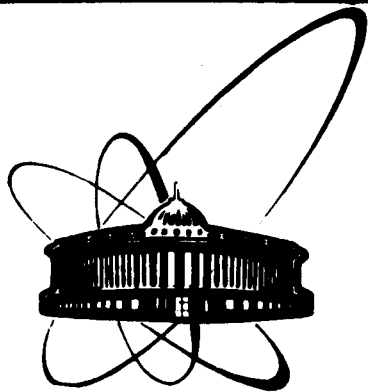


89-383



объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

M 135

P11-89-383

Н. Е. Мазепа

ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ SPECTR

Направлено в журнал "Математическое моделирование"

1989

Программа *SPECTR* вычисляет точки спектра полубесконечных разностных краевых задач в соответствии с алгоритмом, изложенным в /1/. Она состоит из двух частей – аналитической и численной. Аналитическая часть программы реализована в системе *REDUCE* /2/, численная – на языке *FORTRAN*. По функциональному назначению можно выделить 7 основных блоков.

Блок I

1. Вывод характеристического уравнения:

$$F(x, z) = \det \left\| \sum_{\ell=2}^p A_{\ell} x^{\ell} - zI \right\| = 0. \quad (I)$$

2. Вывод матрицы R детерминантного условия в переменных $z, x_1, \dots, x_{k_2}, |x_i| \leq 1, i = \overline{1, k_2}$;

$$\det \left\| \begin{array}{cccc} E_1(x_1) \left(1 - \sum_{j=1}^s b_{j,0} x_1^j\right) & \dots & E_{k_2}(x_{k_2}) \left(1 - \sum_{j=1}^s b_{j,0} x_{k_2}^j\right) & \\ E_1(x_1) \left(x_1^{-1} - \sum_{j=1}^s b_{j,-1} x_1^j\right) & \dots & E_{k_2}(x_{k_2}) \left(x_{k_2}^{-1} - \sum_{j=1}^s b_{j,-1} x_{k_2}^j\right) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_1(x_1) \left(x_1^{-2+1} - \sum_{j=1}^s b_{j,-2+1} x_1^j\right) & \dots & E_{k_2}(x_{k_2}) \left(x_{k_2}^{-2+1} - \sum_{j=1}^s b_{j,-2+1} x_{k_2}^j\right) & \end{array} \right\| = 0 \quad (2)$$

x_i – простые корни характеристического уравнения (I), меньшие по модулю 1.

Блок II

3. Преобразование столбцов матрицы R : переход к симметрическим однородным многочленам $P_j(x_1, \dots, x_2), |x_i| \leq 1, i = \overline{1, 2}, 2 \leq 3$.

4. Вычисление по формулам Ньютона необходимых выражений

$$S_j = S_j(x, y, z), \quad S_j = x_1^j + \dots + x_2^j, \quad |x_i| \leq 1, i = \overline{1, 2},$$

$$x = \sum_{i=1}^2 x_i, \quad y = \prod_{i=1}^2 x_i, \quad 2 \leq 3,$$

z – спектральный параметр.

5. Преобразование симметрических многочленов $P_j(x_1, \dots, x_2)$ к виду $P_j(x, y, z)$. Вывод уравнения $\det R''(x, y, z)$.

6. Вывод первых двух уравнений системы, связывающих переменные x, y, z :

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \\ \det R(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Блок III

7. Аналитическое решение системы (3); переход к уравнению от одной переменной.

8. Освобождение от иррациональностей. При квадратичной зависимости переменных полученное в п.7 уравнение содержит радикалы второй степени. Освобождаясь от иррациональностей, получаем многочлен от одной переменной (от x, y или z).

Блок IV

9. Реализация схемы Рауса /3/ для многочлена от переменной z .

Блок V

10. Создание наборов данных, содержащих следующую информацию:

- а) коэффициенты полученного в п.8 многочлена;
- б) соотношения, связывающие переменные x, y, z (п.6);
- в) коэффициенты характеристического уравнения, полученного в п.1;
- г) детерминантное уравнение для вычисления кратных точек спектра;
- д) коэффициенты уравнения для вычисления кратных z .

Блок VI

11. Вычисление корней многочлена $P(y)$.

12. Вычисление $z_j = \psi(\varphi(y_j), y_j)$.

13. Отделение ложных точек спектра. $z_j, |z_j| \geq 1$ является точкой спектра, если и только если соответствующие

$$y_j = \prod_{i=1}^2 x_i(z_j), \quad x_j = \sum_{i=1}^2 x_i(z_j), \quad |x_i| \leq 1, \quad i \leq 3.$$

14. Проверка полученных результатов. Если z_j - комплексное, вычисляем значения детерминанта (2) для последовательности приближений $\{x_i^{(k)}(z_j)\}$. Если z_j - вещественное, находим вилку:

$$\det R(z_j - \epsilon) \cdot \det R(z_j + \epsilon) < 0.$$

Блок VII

15. Вычисление кратных точек спектра. Решаем уравнение

$$\sum_{l=2}^p l A_l x^{l+2} = 0.$$

По $x_j, |x_j| \leq 1$

вычисляем z_j . Для z_j , $|z_j| \geq 1$ из характеристического уравнения (I) находим z_i , $i=1, 2$, $|z_i| \leq 1$.

16. Проверка детерминантного условия для кратных точек спектра. Для z_j , $|z_j| \geq 1$ и отвечающих им кратным α : вычисление значений детерминанта для последовательности приближений $\{\alpha_i^{(n)}(z_j)\}$.

Примеры использования программы SPECTR

В первых двух примерах исследуются дополнительные граничные условия для схем максимального нечетного порядка точности, написанных по несимметричному четному набору точек /4/.

Пример I

Исходная непрерывная краевая задача

$$\begin{cases} U_t + U_x = 0, & t \geq 0, x \geq 0, \\ U(x, 0) = f(x), & U(0, t) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

аппроксимируется разностной краевой задачей

$$\begin{cases} U_v^{n+1} = -\frac{1}{16}U_{v-2}^n + \frac{9}{16}U_{v-1}^n + \frac{9}{16}U_v^n - \frac{1}{16}U_{v+1}^n, \\ n \geq 0, v \geq 2; \\ U_v^0 = f(vh), v \geq 0; \\ U_0^n = 0, \\ U_1^{n+1} = \frac{5}{16}U_0^n + \frac{15}{16}U_1^n - \frac{5}{16}U_2^n + \frac{1}{16}U_3^n. \end{cases}$$

Порядок аппроксимации на решении есть $O(h^3)$. Алгебраическая задача вычисления "простых точек спектра" сводится к решению системы

$$\begin{cases} z_1^3 - 9z_1^2 + 16z_1^2 z_2 - 9z_1 + 1 = 0 \\ z_2^3 - 9z_2^2 + 16z_2^2 z_1 - 9z_2 + 1 = 0 \\ z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 - 5(z_1 + z_2) + 15 - 16z_2 = 0, |z_i| \geq 1. \end{cases}$$

После замены переменных $x = z_1 + z_2$, $y = z_1 z_2$, $|z_i| \leq 1$, $i=1, 2$, получаем систему

$$\begin{cases} x - y^2 - 9y = 0 \\ xy + 16y^2 - 9y - 1 = 0 \\ x^2 - 5x - y - 16z + 15 = 0, \end{cases}$$

z - по-прежнему спектральный параметр.

Из первых двух уравнений находим $z = (9 - x + \frac{1}{y})/16$, $x = y^2 + 9y$.
Последовательно подставляя эти выражения в последнее уравнение, получаем

$$y^5 + 18y^4 + 77y^3 - 37y^2 + 6y - 1 = 0.$$

Расчеты показывают, что нет точек спектра в области $|z| \geq 1$.

Пример 2

Непрерывная краевая задача (4) аппроксимируется разностной краевой задачей

$$\begin{cases} U_{\nu}^{n+1} = \frac{3}{256} U_{\nu-3}^n - \frac{25}{256} U_{\nu-2}^n + \frac{150}{256} U_{\nu-1}^n + \frac{150}{256} U_{\nu}^n - \frac{25}{256} U_{\nu+1}^n + \frac{3}{256} U_{\nu+2}^n, \\ n \geq 0, \nu \geq 3; \\ U_{\nu}^0 = f(\nu h), \nu \geq 0; \\ U_0^0 = 0, \\ U_1^{n+1} = \frac{63}{256} U_0^n + \frac{315}{256} U_1^n - \frac{210}{256} U_2^n + \frac{126}{256} U_3^n - \frac{45}{256} U_4^n + \frac{7}{256} U_5^n, \\ U_2^{n+1} = -\frac{7}{256} U_0^n + \frac{105}{256} U_1^n + \frac{210}{256} U_2^n - \frac{70}{256} U_3^n + \frac{21}{256} U_4^n - \frac{3}{256} U_5^n. \end{cases}$$

Порядок аппроксимации на решении $O(h^5)$. Алгебраическая задача вычисления "простых точек спектра" сводится к решению системы

$$\begin{cases} 3z_1^5 - 25z_1^4 + (150 - 256z)z_1^3 + 150z_1^2 - 25z_1 + 3 = 0 \\ 3z_2^5 - 25z_2^4 + (150 - 256z)z_2^3 + 150z_2^2 - 25z_2 + 3 = 0 \\ 3z_3^5 - 25z_3^4 + (150 - 256z)z_3^3 + 150z_3^2 - 25z_3 + 3 = 0 \\ \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varphi_1(z_1) & \varphi_1(z_2) & \varphi_1(z_3) \\ \varphi_2(z_1) & \varphi_2(z_2) & \varphi_2(z_3) \end{vmatrix} = 0, \quad |z| \geq 1, \end{cases}$$

$$\varphi_1(z) = 63 + (315 - 256z)z - 210z^2 + 126z^3 - 45z^4 + 7z^5,$$

$$\varphi_2(z) = -7 + 105z + (210 - 256z)z^2 - 70z^3 + 21z^4 - 3z^5.$$

В новых переменных $x = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $y = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 3$, получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} -9x^3y + 150x^2y + 768xy^2 - 1075xy - 18x + 9y^2 - 6400y^2 + \\ \quad + 4200y + 75 = 0 \\ -3x^2y - 3xy^3 + 25y^3 + 25y^2 + 256y^2 - 150y - 3 = 0 \\ 27x^6y^3 - 927x^5y^3 + 81x^4y^4 - 6912x^4y^3z + 15009x^4y^3z + 81x^4y^2z + \\ + 5184x^3y^4z - 2349x^3y^4 + 152256x^3y^3z - 144014x^3y^3 - \\ - 1854x^3y^2z - 50112x^2y^4z + 18450x^2y^4 + 245760x^2y^3z^2 - \\ - 1397632x^2y^3z + 843516x^2y^3 - 9792x^2y^2z + 18303x^2y^2 + 81x^2y - \\ - 81xy^5 - 442368xy^4z^2 + 402624xy^4z - 87744xy^4 - \\ - 3522560xy^3z^2 + 7220352xy^3z - 2983923xy^3 + \\ + 120384xy^2z - 98919xy^2 - 927xy - 5184y^5z + \\ + 1647y^5 - 49152y^4z + 27639y^4 + 12582912y^3z^3 - \\ - 3342336y^3z^2 - 9115200y^3z + 388552y^3 - 98304y^2z^2 - \\ - 243648y^2z + 178875y^2 - 2880yz + 3294y + 27 = 0. \end{array} \right.$$

Решение этой системы сводится к решению полиномиального уравнения

$$P_{3^*}(y) = \sum_{i=0}^{3^*} a_i y^{3^*-i}, \quad a_i - \text{числовые коэффициенты } |4|.$$

Расчеты показывают, что спектр лежит внутри единичной окружности.

Пример 3 (пример Слоуна /5/, /6/).

Исходная непрерывная краевая задача

$$\begin{cases} u_t = cu_x, & c > 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

аппроксимируется разностной краевой задачей

$$\begin{cases} u_v^{n\mu} = u_v^{n-1} + \frac{\lambda}{6} (u_{v+2}^n - 8u_{v+1}^n + 8u_{v-1}^n - u_{v+2}^n), \quad v \geq 2, \\ u_0^{n\mu} = u_0^{n-1} + \frac{\lambda}{3} (-11u_0^n + 18u_1^n - 9u_2^n + 2u_3^n) - \\ - 11\lambda\mu/6 (u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n-1}), \\ u_1^{n\mu} = u_1^{n-1} + \frac{\lambda}{3} (-2u_0^n - 3u_1^n + 6u_2^n - u_3^n) - \\ - \lambda\mu/2 (u_1^{n-1} - 2u_1^n + u_1^{n-1}), \end{cases}$$

$\lambda = \pi/h$, μ - числовой параметр. Вычисление "простых точек спектра" сводится к решению системы:

$$\begin{cases} x_1^4 - 8x_1^3 + \frac{6(z^2-1)}{\lambda z} x_1^2 + 8x_1 - 1 = 0 \\ x_2^4 - 8x_2^3 + \frac{6(z^2-1)}{\lambda z} x_2^2 + 8x_2 - 1 = 0 \\ \det \begin{vmatrix} Q_1(z, x_1, \lambda, \mu) & Q_1(z, x_2, \lambda, \mu) \\ Q_2(z, x_1, \lambda, \mu) & Q_2(z, x_2, \lambda, \mu) \end{vmatrix} = 0, \quad |z| \geq 1, \end{cases} \quad (5)$$

$$Q_1(z, x, \lambda, \mu) = \frac{3}{\lambda} (z^2-1) + \frac{11\mu}{2} (z-1)^2 + 2(11 - 18x + 9x^2 - 2x^3),$$

$$Q_2(z, x, \lambda, \mu) = \frac{3}{\lambda} (z^2-1)x + \frac{3}{2}\mu x(z-1)^2 + 2(2 + 3x - 6x^2 + x^3).$$

В новых переменных $x = x_1 + x_2$, $y = x_1 x_2$, $|x_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, получаем систему

$$\begin{cases} -x^2 y z + 8x y z + y^2 z - 12y z^2 + 12y - z = 0 \\ -x y^2 - x + 8y^2 + 8y = 0 \\ -140x^2 z^3 - 152x^2 z^2 + 52x^2 z - 216x y z^3 + 240x y z^2 + \\ + 168x y z + 840x z^3 + 816x z^2 - 312x z + 48y^2 z^2 + \\ + 112y z^3 - 1360y z^2 - 808y z - 945z^4 - 804z^3 + \\ + 378z^2 + 540z - 273 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы сводится к решению полиномиального уравнения:

$$P_{48}(y) = \sum_{i=0}^{48} a_i y^{48-i},$$

a_i - числовые коэффициенты.

Для $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/2$ вычислена точка спектра $z = (-0,7028; 0,7538)$, $|z| = 1,307$. "Кратных точек спектра" нет.

Пример 4

Исходная непрерывная краевая задача

$$\begin{cases} u_t = v_x, & x \geq 0, t \geq 0, \\ v_t = u_x, & u(x,0) = f'(x), v(x,0) = g(x), \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

аппроксимируется по схеме Рундана / 7 / третьего порядка точности. Недостатки приграничные точки считаются по схеме второго порядка точности - случай I, по схеме-треноге - случай II/8/. Характеристическое уравнение 8-й степени эквивалентно двум уравнениям 4-й степени

$$x^4 - x^3 - (21 - 48z)x^2 - 31x + 4 = 0, \quad (6)$$

$$4x^4 - 31x^3 - (21 - 48z)x^2 - x + 1 = 0. \quad (7)$$

Есть 4 собственных значения, меньших по модулю 1, и для $\lambda = \tau/h = 1/2$ алгебраическая "задача вычисления" простых точек спектра" сводится к решению системы

$$\begin{cases} x_1^4 - x_1^3 - (21 - 48z)x_1^2 - 31x_1 + 4 = 0 \\ x_2^4 - x_2^3 - (21 - 48z)x_2^2 - 31x_2 + 4 = 0 \\ 4x_3^4 - 31x_3^3 - (21 - 48z)x_3^2 - x_3 + 1 = 0 \\ 4x_4^4 - 31x_4^3 - (21 - 48z)x_4^2 - x_4 + 1 = 0 \\ \det R(x_1, x_2, x_3, x_4, z) = 0, |z| \geq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Детерминантное уравнение является многочленом выше 6-й степени от 5-ти переменных для обоих вариантов граничных условий. Программа выводит систему (8), однако переход к новым переменным приходится выполнить вручную /8/. Корни $x(z)$ уравнений (6) и (7) являются взаимно-обратными функциями. Пусть

$$x = x_3^{-1} + x_4^{-1}, \quad y = x_3 x_4, \quad |x_i| \leq 1, \quad i = 3, 4,$$

x_i - решения (7), x_i^{-1} - решения (6).

Тогда из (6) и (7) следует, что

$$x = \frac{1-31y}{1-4y^2}, \quad z = \frac{4y+x(1-x)+1/y+21}{48}$$

Элементы детерминанта в переменных x, y, z легко получаем после элементарных преобразований столбцов /8/. Теперь можно возобновить работу программы. В случае первого варианта граничных условий задача вычисления "простых точек спектра" сведена к решению уравнения

$$P_{10}(y) = \sum_{i=0}^{10} a_i y^i = 0,$$

a_i - числовые коэффициенты. Вычислена точка спектра $z = -1,063$. Во втором случае получено уравнение

$$P_9(y) = \sum_{i=0}^9 b_i y^i,$$

b_i - числовые коэффициенты.

Спектр лежит внутри единичной окружности. "Кратных точек спектра" нет.

Пример 5 (М.Сунэ /9/).

Исходная непрерывная краевая задача

$$\begin{cases} u_t = u_x, & x \geq 0, t \geq 0, \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

аппроксимируется по схеме Кранк-Никольсона

$$\begin{cases} \frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{x+1}^{n+1} - u_{x-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{x+1}^n - u_{x-1}^n}{2h} \right), & y \geq 1, \\ \frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} = \frac{u_1^n - u_0^n}{h}. \end{cases}$$

Решение системы для вычисления "простых точек спектра"

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{4} (z+1)(z^2-1) + z_1(1-z) = 0, \\ z-1 + \lambda(1-z_1) = 0 \end{cases}$$

сводится к решению уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$,
 $x = z_2$, $|z_2| \leq 1$, $\lambda = \tau/h = 1/2$. Найденны
 точки спектра $z_1 = z_2 = 1$, $z_3 = 2$.

Пример 6 (М.Сунэ /э/, /Ю/).

Задача (9) аппроксимируется по схеме Крайсс-Олигера 4-го порядка точности

$$\begin{cases} \frac{u_v^{n+1} - u_v^{n-1}}{2\tau} = \frac{4}{3} \frac{u_{v+1}^n - u_{v-1}^n}{2h} - \frac{1}{3} \frac{u_{v+2}^n - u_{v-2}^n}{4h}, \quad v \geq 2, \\ u_0^n = 0, \\ u_1^{n+1} = u_1^{n-1} + \frac{1}{3} \left(-2u_0^n - \frac{3}{2}(u_1^{n+1} + u_1^{n-1}) + 6u_2^n - u_3^n \right). \end{cases}$$

"Простые точки спектра" z , $|z| \geq 1$ являются решениями системы

$$\begin{cases} x_1^4 - 8x_1^3 + \frac{6(z^2-1)}{1z} x_1^2 + 8x_1 - 1 = 0 \\ x_2^4 - 8x_2^3 + \frac{6(z^2-1)}{1z} x_2^2 + 8x_2 - 1 = 0 \\ \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ Q(x_1, 1, z) & Q(x_2, 1, z) \end{vmatrix} = 0 \end{cases},$$

$$Q(x, 1, z) = (z - z^{-1})x - \frac{1}{3} \left(-2 - \frac{3}{2}(z + z^{-1}) + 6x^2 - x^3 \right).$$

После замены $x = x_1 + x_2$, $y = x_1 x_2$, $|x_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, получаем систему

$$\begin{cases} -x^2 y z + 8x y z + y^2 z - 12y z^2 + 12y - z = 0 \\ x y^2 - x + 8y^2 + 8y = 0 \\ 2x^2 z - 12x z - 2y z + 15z^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Ее решение сводится к нахождению решений $P_{28}(y) = \sum_{i=0}^{48} a_i y^i = 0$,

a_i - числовые коэффициенты.

Расчеты показывают, что спектр лежит внутри единичной окружности.

Литература

1. Мазепа Н.Е. Вычисление спектров разностных краевых задач с применением САВ. Дубна, 1989 г., препринт ОИЯИ, РИИ-89-382.
2. HERN A.G. Reduce User's Manual 2-nd.ed. Univ. of Utah, 1973, 70 p.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. "Наука", 1966.
4. Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И. Дополнительные граничные условия для разностных схем максимального нечетного порядка точности. // SNAMM, v.3, no.2, 1988, p.150-161.
5. Sloan D.M. Boundary Conditions for a fourth order hyperbolic Difference Scheme. Math. of Comp. vol.41, no.163.
6. Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И. Некоторые примеры исследования устойчивости краевых задач с применением системы аналитических вычислений *REDUCE*. // Труды международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. ДИИ-85-79I, Дубна, 1985, с.307-311.
7. Rusanov V.V. Difference schemes of third-order accuracy for "across" computation of discontinuous solutions. Fluid. Dynam. Trans., 1969.
8. Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И. Исследование устойчивости одной разностной краевой задачи с применением системы аналитических вычислений. ИВУЗ, Математика, стр.55-61.
9. Thuné M. IBSTAB - a software system for Automatic stability analysis of difference methods for hyperbolic initial - boundary value problem; Ph.D.Thesis-Uppsala; Uppsala Univ., 1984. - 108 p.
10. Oliger J. Fourth Order Difference Method for the initial boundary - value problem for hyperbolic equations. Math. of Comp. vol.28, no.125, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1989 года.