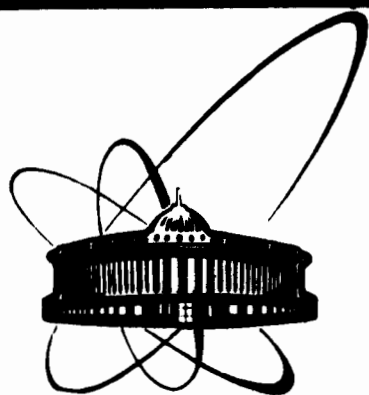


89-343



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Ж 306

P11-89-343

Т. Жанлав

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Направлено в "Журнал вычислительной
математики и математической физики"

1989

Как известно^{/1/}, построение приближенных решений с высокой точностью для дифференциальных уравнений является одной из весьма актуальных задач вычислительной математики.

В последнее время метод сплайн-функций как мощный аппарат современной вычислительной математики широко применяется при численном решении различных задач математической физики^{/1-3/}. В настоящей работе при построении сплайновых схем для дифференциальных уравнений второго порядка используются свойства квазиинтерполяционного (кубического) сплайна, имеющего существенное теоретическое значение. Этот сплайн, как мы увидим ниже, оказывается весьма полезным при построении схем обычной и повышенной точности с единой точки зрения. В результате решения сплайновой схемы повышенной точности мы располагаем приближенным решением, фактически не отличающимся от квазиинтерполяционного сплайна, аппроксимирующего искомое решение. Таким образом, ниже речь пойдет об аппроксимации решения дифференциальной задачи.

§ I. Некоторые свойства квазиинтерполяционного сплайна

Пусть на отрезке $[a, b]$ введена сетка $\Delta_N: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Дополняя сетку Δ_N точками $x_{-i} = x_0 - i h_0$, $x_{N+i} = x_N + i h_{N-1}$, $i = 1, 2, 3$, рассмотрим квазиинтерполяционный сплайн для функции $u \in W_\infty^4[a, b]$:

$$S(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j B_j(x), \quad (\text{I.I})$$

где $B_j(x)$ - нормализованные кубические B -сплайны^{/2/}. Коэффициенты сплайна (I.I) определяются формулами^{/4/}

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= u_0 - h_0 u'_0 + \frac{h_0^2}{3} u''_0, \\ \alpha_i &= u_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} u'_i - \frac{h_i h_{i-1}}{6} u''_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (\text{I.2}) \\ \alpha_{N+1} &= u_N + h_{N-1} u'_N + \frac{h_{N-1}^2}{3} u''_N. \end{aligned}$$

При этом имеют место оценки^{/4/}

$$\| (S - u)^{(r)} \|_{\infty} \leq K_r \bar{h}^{4-r} \| u^{IV} \|_{\infty}, \quad r=0,1,2, \quad (I.3)$$

$$\bar{h} = \max h_i,$$

где K_r - абсолютные константы, не зависящие от шагов сетки. Крайние коэффициенты в представлении (I.I) можно выбрать по-другому, исходя из некоторых дополнительных соображений.

Предполагая достаточную гладкость функции $u(x)$, мы выберем крайние коэффициенты в (I.I) в виде

$$\alpha_{-1} = u_0 - h_0 u'_0 + \frac{h_0^2}{3} u''_0 - \frac{h_0^4}{24} u^{IV}_0 + \frac{7h_0^5}{360} u^V_0 + O(h_0^6), \quad (I.4)$$

$$\alpha_{N+1} = u_N + h_{N+1} u'_N + \frac{h_{N+1}^2}{3} u''_N - \frac{h_{N+1}^4}{24} u^{IV}_N - \frac{7h_{N+1}^5}{360} u^V_N + O(h_{N+1}^6).$$

Нетрудно показать, что при таком выборе оценки (I.3) остаются в силе.

Далее, учитывая финитность B -сплайнов и разложения функций по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, из (I.I) получаем равенства

$$S_i^{(r)} = u_i^{(r)} + \frac{1}{6} (B_{i-1}^{(r)}(x_i) J_{1i} + B_{i+1}^{(r)}(x_i) J_{2i}), \quad r=0,1,2; \quad (I.5)$$

$$i = 1, \dots, N-1,$$

где

$$J_{1i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_1(v) u^{IV}(v) dv, \quad J_{2i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_2(v) u^{IV}(v) dv, \quad (I.6)$$

$$\varphi_1(v) = (v - x_{i-1})^3 + (h_{i-2} - h_{i-1})(v - x_{i-1})^2 - h_{i-1} h_{i-2} (v - x_{i-1}),$$

$$\varphi_2(v) = (x_{i+1} - v)^3 + (h_{i+1} - h_i)(x_{i+1} - v)^2 - h_{i+1} h_i (x_{i+1} - v).$$

Если $u \in C^6[a, b]$, то легко показать, что

$$J_{1i} = -\frac{h_{i-1}^3(h_{i-1} + 2h_{i-2})}{12} u_i^{IV} + \frac{h_{i-1}^4(2h_{i-1} + 5h_{i-2})}{60} u_i^{(V)} + O(\bar{h}^6), \quad (I.7)$$

$$J_{2i} = -\frac{h_i^3(h_i + 2h_{i+1})}{12} u_i^{IV} - \frac{h_i^4(2h_i + 5h_{i+1})}{60} u_i^{(V)} + O(h_i^6),$$

$$i = 0, \dots, N.$$

Здесь величины J_{10} и J_{2N} формально определены по формуле (I.7). Если учесть, что

$$\alpha_{-1} = u_0 - h_0 u'_0 + \frac{h_0^2}{3} u''_0 + \frac{1}{6} J_{10} + O(h_0^6),$$

$$\alpha_{N+1} = u_N + h_{N-1} u'_N + \frac{h_{N-1}^2}{3} u''_N + \frac{1}{6} J_{2N} + O(h_{N-1}^6),$$

то, очевидно, равенства (I.5) выполняются и для $i=0$ и $i=N$ с точностью $O(\bar{h}^6)$.

Подставляя выражения (I.7) в (I.5), получаем

$$S'_i = u'_i + \frac{h_i h_{i-1}}{24(h_i + h_{i-1})} \left[h_{i-1}^2 - h_i^2 + \frac{h_{i-1}^2 (h_{i-2} - h_i)}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i} + \frac{h_i^2 (h_{i-1} - h_{i+1})}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} \right] u_i^{IV} + O(\bar{h}^4), \quad (I.8)$$

$$S''_i = u''_i - \frac{1}{12} \left[h_i^2 + h_{i-1} (h_{i-1} - h_i) + \frac{h_{i-1}^3 (h_{i-2} - h_{i-1})}{6} B''_{i-1}(x_i) + \frac{h_i^3 (h_{i+1} - h_i)}{6} B''_{i+1}(x_i) \right] u_i^{IV} +$$

$$+ \frac{1}{360} (h_{i-1} (2h_{i-1} + 5h_{i-2}) B''_{i-1}(x_i) - h_i (2h_i + 5h_{i+1}) B''_{i+1}(x_i)) u_i^{IV} + O(\bar{h}^4),$$

$$i = 0, \dots, N.$$

Сетку Δ_N будем называть квазиравномерной, если выполняются соотношения

$$h_i - h_j = O(\bar{h}^2), \quad |i - j| \leq 2. \quad (I.10)$$

Из (I.8), (I.9) ясно, что на квазиравномерной сетке выполняются равенства

$$S'_i = u'_i + O(\bar{h}^4), \quad (I.11)$$

$$S''_i = u''_i - \frac{h_i^2}{12} u_i^{IV} + O(\bar{h}^\sigma), \quad i = 0, \dots, N,$$

где $\sigma = 3$ для квазиравномерной сетки и $\sigma = 4$ для равномерной сетки. Как следствие, из (I.11) получаем

$$u_i^{IV} = \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{S''_{i+1} - S''_i}{h_i} - \frac{S''_i - S''_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + O(\bar{h}^\gamma), \quad (I.12)$$

$$i = 1, \dots, N-1,$$

где $\gamma = 2$ для равномерной сетки и $\gamma = 1$ для квазиравномерной сетки. Более того, если $u \in C^3$, то на равномерной сетке можно показать, что

$$u_i^{IV} = \frac{S_{i+1}'' - 2S_i'' + S_{i-1}''}{h^2} + O(h^4), \quad (I.13)$$

$$u_i = S_i + \frac{h^2}{72} (S_{i+1}'' - 2S_i'' + S_{i-1}'') + O(h^6),$$

$$i = 1, \dots, N-1.$$

§ 2. Построение сплайновой схемы

Используем свойства квазиинтерполяционного сплайна при построении схем для численного решения краевой задачи:

$$Lu \equiv u'' + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.1)$$

$$l_1 u \equiv \alpha_1 u + \beta_1 u' = \gamma_1, \quad x = a, \quad (2.2)$$

$$l_2 u \equiv \alpha_2 u + \beta_2 u' = \gamma_2, \quad x = b,$$

где $\alpha_i \geq 0$, $i=1,2$, $\beta_2 \geq 0$, $\beta_1 \leq 0$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$; $q(x) < 0$.

Считаем, что $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — достаточно гладкие функции. Тогда задача (2.1)–(2.2) имеет единственное решение, являющееся достаточно гладким.

Пусть $S(x)$ — квазиинтерполяционный сплайн для решения задачи (2.1)–(2.2), коэффициенты которого определяются формулами (I.2) и (I.4). Рассмотрим выражение LS в узлах сетки Δ_N . В силу (I.5) имеем

$$(LS)_i = r_i + \frac{1}{h_i^2} \left(1 - \frac{h_i}{2} p_i + \frac{h_i^2}{6} q_i \right) B_{i-1}(x_i) J_{1i} + \frac{1}{h_{i-1}^2} \left(1 + \frac{h_{i-1}}{2} p_i + \frac{h_{i-1}^2}{6} q_i \right) B_{i+1}(x_i) J_{2i}, \quad (2.3)$$

$$i = 0, \dots, N.$$

Если учесть (I.7), то легко видеть, что два последних слагаемых в правой части равенства (2.3) есть величины $O(h^2)$. Если пренебречь ими, то мы получаем ^(2.3) обычную сплайновую схему:

$$\left. \begin{aligned} (LS)_i &= r_i, & i &= 0, \dots, N, \\ l_1 S &= \gamma_1, & x &= a, \\ l_2 S &= \gamma_2, & x &= b. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

С целью получения схемы повышенной точности мы будем учитывать главный член в выражениях для J_{1i} и J_{2i} . Пусть сетка Δ_N квазиравномерна. Тогда с учетом (I.3), (I.II) и (I.I2) находим

$$(LS)_i = \tau_i - \frac{h_i^2}{12} \Delta^2 S_i'' + O(\bar{h}^\sigma), \quad i=1, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

где

$$\Delta^2 S_i'' = \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{S_{i+1}'' - S_i''}{h_i} - \frac{S_i'' - S_{i-1}''}{h_{i-1}} \right).$$

Далее, используя (I.II) и (I.I2), легко показать, что

$$(LS)_{i-1} - 2(LS)_i + (LS)_{i+1} = \tau_{i-1} - 2\tau_i + \tau_{i+1} + O(\bar{h}^\sigma), \quad i=1, N-1. \quad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) получаем схему повышенной точности:

$$\left. \begin{aligned} (l_1 S)_0 &= \gamma_1, \\ (LS)_i &= \tau_i - \frac{h_i^2}{12} \Delta^2 [S_i''], \quad i=0, 1, \dots, N, \\ (l_2 S)_N &= \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где

$$[S_i''] = \begin{cases} 2S_1'' - S_2'', & i=0, \\ S_i'', & i=1, 2, \dots, N-1, \\ 2S_{N-1}'' - S_N'', & i=N. \end{cases}$$

В силу finитности B -сплайнов матрица системы (2.7) имеет ленточную структуру. Легко показать, что все уравнения системы (2.7) линейно независимы и, следовательно, система (2.7) имеет единственное решение. Уравнение с номером $i=0$ в системе (2.7) содержит шесть неизвестных α_i , $i=-1, 0, 1, \dots, 4$. Из него неизвестные α_3 и α_4 исключаются с помощью уравнений с номером $i=1$ и $i=2$. Аналогичное преобразование сделаем в уравнении с номером $i=N$ в системе (2.7).

В результате получается система с пятидиагональной матрицей, и она решается методом пятиконечной прогонки^{/6/}. Таким образом, решая эту систему, мы получаем приближенное решение, аппроксимирующее точное решение задачи (2.1)–(2.2) с порядком $O(\bar{h}^\sigma)$. Теперь сетку Δ_N считаем равномерной. В этом случае $\sigma=4$ и, как следствие, для решения (S) системы (2.7) справедлива оценка (I.3), т.е. сплайн S , являю-

щийся решением системы (2.7), фактически не отличается по точности от квазиинтерполяционного сплайна (I.I). А что касается значений производных $u_i^{(2)}$ в узлах сетки, то тут может быть получен более сильный результат. Действительно, в узлах равномерной сетки имеют равенства

$$\frac{S_{i-1}'' + 10S_i'' + S_{i+1}''}{12} - u_i'' = -\rho_i(S_i' - u_i') - q_i(S_i - u_i), \quad i=1, \dots, N-1, \quad (2.8)$$

которые являются следствием схемы (2.7) и уравнения (2.I). Так как мы заложили в основу схемы (2.7) свойства (I.II) и (I.I2), то их можно ожидать от сплайна, являющегося решением этой системы. В самом деле, предположим, что равенства $S_i' - u_i' = O(h^4)$ не выполняются хотя бы для одного i , скажем, $i = k$. Тогда обязательно имеет место $S_k' - u_k' = O(h^3)$. Отсюда, в свою очередь, вытекает равенство

$$L S_k = \tau_k - \frac{h_k^2}{12} \Delta^2 S_k'' + O(h^3),$$

и тем самым этот сплайн будет отличаться от квазиинтерполяционного сплайна величиной $O(h^3)$. Это противоречит тому, что построенный нами сплайн аппроксимирует решение задачи (2.I)-(2.2) с точностью $O(h^4)$. Таким образом, имеют место

$$S_i' - u_i' = O(h^4), \quad i=0, \dots, N. \quad (2.9)$$

Отсюда и из (2.8) вытекают равенства

$$\frac{S_{i-1}'' + 10S_i'' + S_{i+1}''}{12} - u_i'' = O(h^4), \quad i=1, \dots, N-1. \quad (2.I0)$$

С другой стороны, согласно построению схемы (2.7) должны выполняться равенства

$$S_i'' = u_i'' + O(h^2), \quad i=0, 1, \dots, N.$$

Если учесть последнее соотношение, то из (2.I0) легко следует

$$S_i'' = u_i'' - \frac{h^2}{12} u_i^{IV} + O(h^4), \quad i=0, \dots, N.$$

Отсюда немедленно вытекают

$$\frac{S_{i+1}'' - 2S_i'' + S_{i-1}''}{h^2} - u_i^{IV} = O(h^4), \quad i=1, \dots, N-1, \quad (2.II)$$

которые имеют место для достаточно гладкой функции $u(x)$.

Таким образом, с помощью сплайна, являющегося решением системы (2.7), могут быть аппроксимированы производные решения задачи (2.1)–(2.2) во внутренних узлах равномерной сетки с большой точностью. Следует отметить, что в случае равномерной сетки внутренние уравнения ($i=1, \dots, N-1$) системы (2.7) полностью совпадают с соответствующими уравнениями известной схемы ^{2/}.

Отметим также, что на равномерной сетке квазиинтерполяционный сплайн удовлетворяет соотношениям

$$(LS)_i = z_i - \frac{h^2}{12} u_i^{IV} + O(h^4), \quad i=0, \dots, N, \quad (2.12)$$

которые можно использовать для обоснования метода уточнения по Ричардсону. В самом деле, например, на вдвое сгущающейся сетке с шагом $h/2$ соотношения (2.12) принимают вид

$$(L\bar{S})_i = z_i - \frac{h^2}{48} u_i^{IV} + O(h^4), \quad i=0, \dots, N. \quad (2.13)$$

Здесь уравнения (2.13) написаны только в узлах сетки Δ_N с шагом h . Очевидно, что линейная комбинация соотношений (2.12) и (2.13) дает результат

$$(L\tilde{S})_i = z_i + O(h^4), \quad i=0, \dots, N,$$

где $\tilde{S} = (4\bar{S} - S)/3$.

Таким образом, метод сплайн-коллокации (2.4) может быть широко применен для задачи (2.1)–(2.2) с последующим уточнением приближенного решения на последовательности сеток ^{5/}.

§ 3. Итерационный метод построения приближенного решения

Сплайнные схемы (2.4) и (2.7) можно записать единообразно в форме

$$\left. \begin{aligned} (\ell_1 S)_0 &= \gamma_1, \\ (LS)_i &= z_i - \frac{h_i^2 \theta}{12} \Delta^2 [S_i''], \quad i=0, \dots, N, \\ (\ell_2 S)_0 &= \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Схема (3.1) при $\theta=0$ превращается в схему (2.4), а при $\theta=1$ – в схему (2.7). Следует отметить, что при $\theta=0$ сетка Δ_N считается произвольной. Из (3.1) ясно, что схему (2.7) можно решать в рамках стандартной трехточечной прогонки методом простой итерации:

$$\left. \begin{aligned} (L_1 S^{k+1})_0 &= \gamma_1, \\ (L S^{k+1})_i &= z_i - \frac{h_i^2 Q}{12} \Delta^2 \frac{d^2}{dx^2} [S_i^k], \quad i=0, \dots, N, \\ (L_2 S^{k+1})_N &= \gamma_2, \quad k=0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

При этом для начала итерации в качестве S^0 используется сплайн, являющийся решением этой же системы (3.2) при $\theta=0$. В силу аппроксимационных свойств коллокационного сплайна ^{7,8/} имеет место сходимость итераций (3.2) при достаточно малых h_i . Дополнительный член в правой части уравнения (3.2) играет роль коррекции. Обычно итерационный процесс (3.2) сходится через 3 и 4 шага. Следует также отметить, что матрица трехдиагональной системы (3.2) постоянна, и поэтому она вычисляется один раз при $k=0$. Это обстоятельство оптимизирует алгоритм (3.2). Принципиальное значение итерационного процесса (3.2) имеет место при рассмотрении схемы для системы дифференциальных уравнений. В самом деле, схема (2.7) может быть легко распространена на случай системы, в частности системы двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_1'' + p_{11}(x)u_1' + q_{11}(x)u_1 + p_{12}(x)u_2' + q_{12}(x)u_2 &= z_1(x), \\ u_2'' + p_{22}(x)u_2' + q_{22}(x)u_2 + p_{21}(x)u_1' + q_{21}(x)u_1 &= z_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Такая система возникает, например, в случае, когда коэффициенты уравнения (2.1) комплексны. Кроме того, многие задачи современной физики ^{7,8/} сводятся к решению системы вида (3.3). Если ввести обозначения

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} \equiv E \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d}{dx} + Q,$$

то систему (3.3) можно записать в виде

$$\mathcal{L}U = R.$$

В этом случае основные уравнения системы (3.2) приобретают вид

$$\left(\mathcal{L} S^{K+1} \right)_i = R_i - \frac{h_i^2 \theta}{12} E \Delta^2 \frac{d^2}{dx^2} \left[S_i^K \right], \quad x_i \in \Delta_N,$$

$$S^k = (S_1, S_2)^T, \quad k=0, 1, \dots$$

В результате организации такого итерационного процесса мы значительно сэкономим оперативную память ЭВМ.

Выше мы рассматривали итерационный метод построения решения с высокой точностью на квазиравномерной и равномерной сетках. Однако при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (2.1) можно предлагать итерационный метод построения решения с точностью $O(\bar{h}^4)$ на любой неравномерной сетке. Пусть $p, q, r \in C^k[a, b]$, $k \geq 2$. Тогда из уравнения (2.1) найдем

$$u^{IV}(x) = a u'' + b u' + c u + d, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} a &= p^2 - q - p', & b &= 2pp' - 2q' - p'' + qp, \\ c &= q'r + qp' - q'', & d &= r'' - p'r - pr'. \end{aligned}$$

Далее из (1.8) и (1.9) следует, что

$$S'_0 = u'_0 + \frac{h_0^3 (h_0 - h_1)}{48(2h_0 + h_1)} u_0^{IV} + O(\bar{h}^4), \quad (3.5)$$

$$S''_0 = u''_0 - \frac{h_0^2}{360(2h_0 + h_1)} \left[(53h_0 + 37h_1) u_0^{IV} + 8(h_1 - h_0) u_1^{IV} \right] + O(\bar{h}^4),$$

$$S'_N = u'_N - \frac{h_{N-1}^3 (h_{N-1} - h_{N-2})}{48(2h_{N-1} + h_{N-2})} u_N^{IV} + O(\bar{h}^4),$$

$$S''_N = u''_N - \frac{h_{N-1}^2}{360(2h_{N-1} + h_{N-2})} \left[(53h_{N-1} + 37h_{N-2}) u_N^{IV} + 8(h_{N-2} - h_{N-1}) u_{N-1}^{IV} \right] + O(\bar{h}^4).$$

Теперь формулы (1.7) запишем в виде

$$J_{1i} = - \frac{h_{i-1}^3}{60} \left[(3h_{i-1} + 5h_{i-2}) u_i^{IV} + (2h_{i-1} + 5h_{i-2}) u_{i-1}^{IV} \right] + O(\bar{h}^6), \quad (3.6)$$

$$J_{2i} = - \frac{h_i^3}{60} \left[(3h_i + 5h_{i+1}) u_i^{IV} + (2h_i + 5h_{i+1}) u_{i+1}^{IV} \right] + O(\bar{h}^6), \quad i=1, \dots, N-1.$$

Тогда, учитывая (3.4), (3.5), (3.6) и (1.3), из (2.3) получаем

где $(LS)_i = \tau_i - F_i(s)$, $i = 0, \dots, N$, (3.7)

$$F_0(s) = \frac{h_0^2}{720(2h_0 + h_1)} \left[(106h_0 + 74h_1 + 15\rho_0 h_0 (h_1 - h_0)) \mathcal{D}_0(s) + 16(h_1 - h_0) \mathcal{D}_1(s) \right],$$

$$F_i(s) = \frac{h_{i-1}^3}{60 h_i^2} \left(1 - \frac{h_i}{2} \rho_i \right) B_{i-1}(x_i) \left[(3h_{i-1} + 5h_{i-2}) \mathcal{D}_i(s) + (2h_{i-1} + 5h_{i-2}) \mathcal{D}_{i-1}(s) \right] +$$

$$+ \frac{h_i^3}{60 h_{i-1}^2} \left(1 + \frac{h_{i-1}}{2} \rho_i \right) B_{i+1}(x_i) \left[(3h_i + 5h_{i+1}) \mathcal{D}_i(s) + (2h_i + 5h_{i+1}) \mathcal{D}_{i+1}(s) \right],$$

$$i = 1, \dots, N-1,$$

$$F_N(s) = \frac{h_{N-1}^2}{720(2h_{N-1} + h_{N-2})} \left[(106h_{N-1} + 74h_{N-2} - 15\rho_N h_{N-1} (h_{N-2} - h_{N-1})) \mathcal{D}_N(s) + \right.$$

$$\left. + 16(h_{N-2} - h_{N-1}) \mathcal{D}_{N-1}(s) \right],$$

$$\mathcal{D}_i(s) = a_i S_i'' + b_i S_i' + c_i S_i + d_i.$$

Тогда из (3.7) ясно, что можно рассматривать итерационный процесс

$$\left. \begin{aligned} (\ell_1 S^{K+1})_0 &= \gamma_1, \\ (LS^{K+1})_i &= \tau_i - F_i(S^K), \quad i = 0, \dots, N, \\ (\ell_2 S^{K+1})_N &= \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

В качестве S^0 берется решение системы (2.4). Из (3.8) ясно, что при достаточно малых \bar{h} сходится итерационный процесс (3.9). А в силу аппроксимационного свойства (I.3) квазиинтерполяционного сплайна и соотношений (3.5) и (3.6) схема (3.9) имеет точность $^{9,10} O(\bar{h}^4)$.

§ 4. Численные эксперименты

Рассматривается тестовая задача

$$u'' + \sin x \cdot u' - xu = 2 \sin x (\cos x - x - 1), \quad x \in [0, \pi],$$

$$u - 2u' = -4, \quad x = 0,$$

$$u + \frac{1}{2} u' = -1, \quad x = \pi.$$

Точное решение задачи имеет вид $u(x) = 2 \sin x$.

В таблице I

приведены численные результаты, в ней использованы следующие обозначения:

$$\varepsilon^{(k)} = \max_{0 \leq i \leq N} |S_i^{(k)} - u_i^{(k)}|, \quad k = 0, 1,$$

$$\bar{\varepsilon}'' = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| \frac{S_{i+1}'' + 10S_i'' + S_{i-1}''}{12} - u_i'' \right|,$$

$$\varepsilon^{IV} = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| \frac{S_{i+1}'' - 2S_i'' + S_{i-1}''}{h^2} - u_i^{IV} \right|.$$

В строках с номерами I, II расположены значения, полученные по известной схеме повышенной точности^{/2/} и по схеме (2.7) на равномерной сетке.

Таблица I

h		$\pi/20$	$\pi/40$	$\pi/80$
ε	I	0,68738464-05 ⁺	0,43582180-06	0,27345190-07
	II	0,64319346-05	0,42873134-06	0,27233214-07
ε'	I	0,51397975-05	0,32049659-06	0,19973760-07
	II	0,52444288-05	0,32207624-06	0,19998012-07
$\bar{\varepsilon}''$	I	0,60998006-05	0,38251235-06	0,23950715-07
	II	0,59582581-05	0,38032350-06	0,23916722-07
ε^{IV}	I	0,14635555-04	0,90561562-06	0,57539097-07
	II	0,61779999-04	0,79799741-06	0,56932201-07

$$^+ 0,68738464-05 = 0,68738464 \cdot 10^{-5}.$$

Из таблицы I видно, что обе схемы дают примерно одинаковые результаты, причем величины ε , ε' , $\bar{\varepsilon}''$, ε^{IV} имеют точность $O(h^4)$ в узлах сетки. Этим подтверждаются теоретические выводы относительно порядка сходимости рассматриваемых схем.

В таблице 2 приведены результаты, полученные с помощью итерационного процесса (3.9) на неравномерной сетке Δ_N с 10 узлами. Сетка с $N=20$ узлами получена из основной сетки за счет разбиения каждого из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$ на две равные части.

Итерационный процесс (3.9) прекращается при выполнении условия

$$\max_{0 \leq i \leq N} |S^{K+1}(x_i) - S^K(x_i)| \leq \varepsilon.$$

В нашем случае оно выполнялось с константой $\varepsilon = 10^{-6}$ через четыре ($N=10$) и три ($N=20$) итерации. Из этой таблицы видно, что коллокационный сплайн аппроксимирует решение задачи с точностью $O(h^4)$.

Таблица 2

X_i	$ S - u $		$ S' - u' $	
	$N=10$	$N=20$	$N=10$	$N=20$
0	0,72932115-03	0,46179317-04	0,36466058-03	0,23089658-04
0,4	0,63934952-03	0,40531557-04	0,50294289-03	0,61159445-04
0,7	0,46361861-03	0,27015400-04	0,60851185-03	0,68584979-04
0,9	0,48306386-03	0,28576913-04	0,11317139-02	0,17398361-03
1,3	0,51380500-03	0,33183530-04	0,10957978-02	0,18699269-03
1,57	0,38045809-03	0,21120669-04	0,63450407-04	0,37617419-05
1,84	0,47487714-03	0,30952460-04	0,91734883-03	0,17691732-03
2,24	0,34403147-03	0,20711366-04	0,14467427-02	0,19269156-03
2,44	0,25654748-03	0,15031293-04	0,24550626-03	0,46753206-04
2,74	0,31864361-03	0,21633611-04	0,12515469-03	0,38067188-04
3,14	0,28269333-03	0,18816317-04	0,56541230-03	0,37658275-04

Литература

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1980.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980.
3. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. Пер. с англ. - М.: Наука, 1986.
4. Жанлав Т. В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1981, с.3.
5. Жанлав Т., Жидков Е.П. ОИЯИ, РИ-86-415, Дубна, 1986.
6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978.
7. Матвеевко А.В., Пономарев Л.И. ЭТФ, 1970, т.59, с.1593.
8. Varashenkov I.V., Bojadziev T.L., Puzynin I.V., Zhanlav T. JINR, E5-88-547, Dubna, 1988.
9. Ильин В.П. ЖВМ и МФ, 1978, т.18, № 3, с.620.
10. Завьялов Ю.С., Мирошниченко В.Л. В сб.: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Наука, Новосибирск, 1983, с.82.

Рукопись поступила в издательский отдел

16 мая 1989 года.