89-340

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

E 601

Р11-89-340

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

О ПОЛНЫХ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФАКТОРИЗАЦИЯХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ (БЛОЧНО)ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ И МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕДУЩИХ (БЛОЧНО)УГЛОВЫХ МИНОРОВ (БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ИХ ПОВЕДЕНИЕ) И ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ТАКИХ МАТРИЦ, А ТАКЖЕ (БЛОЧНО)ФАКТОРИЗОВАННЫХ МАТРИЦ ИЗ НЕКОТОРОГО КЛАССА

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

*Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1989

I. Введение

Настоящая работа посвящена, во-первых, актуальной проблеме – поиску оптимальных вычислительных методов нахождения ведущих (блочно)[x)] угловых миноров (без каких-либо ограничений [9 ,10] на их поведение) и определителя (блочно) трехдиагональных матриц общего вида (I.I), а также (блочно)[x)] факторизованных матриц из определенного класса. Матрицы, обратные к матрицам этого класса, являются (блочно) трехдиагональными [3]. Верно и обратное утверждение [3]. Во-вторых, в работе положительно решена и вторая актуальная проблема – обобщение полученных нами ранее в [6] результатов по построению естественных полных матричных факторизаций (блочно) трехдиагональных матриц (I.I), когда более чем два из их однотипных ведущих (блочно) угловых миноров одновременно равны нулю.

Итак, пусть $\mathbb{C}$ – (блочно) трехдиагональная матрица общего вида[xx)]

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ \ell_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & \ell_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & - & - & - & - \\ & & & \ell_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & \ell_m & q_m \end{bmatrix} \qquad (I.I)$$

, где

$\{r_k, \ell_k\}_{k=2}^{m}$ – прямоугольные внедиагональные матрицы-блоки, а $\{q_k\}_{k=1}^{m}$ – квадратные (в общем случае разных размерностей) диагональные матрицы-блоки $\mathbb{C}$ (I.I).

Приводимый ниже результат мы сформулируем в виде теоремы (без доказательства), поскольку она является очевидным обобщением соответствующей теоремы из [I].

Теорема I. Если $\mathbb{C}$ – трехдиагональная матрица общего вида (I.I), то ее ведущие угловые миноры (и определитель) могут быть найдены с использованием одного из следующих представлений:

Представления I (итерационные, из [8])

---

x) Всюду в тексте работы мы пользуемся обозначениями (блочно) трехдиагональная матрица и (блочно) угловой минор, подчеркивая тем самым справедливость результатов и в случае трехдиагональных матриц.

xx) Напомним, что под матрицей $\mathbb{C}$ (I.I) общего вида понимается случай $\{(q_k \neq q_{k'}) \neq (r_k \neq r_{k'}) \neq (\ell_k \neq \ell_{k'})$, при $k \neq k'\}_{k=2}^{m}$. Если же $\{q_1; q_k, r_k, \ell_k\}_{k=2}^{m}$ – линейные операторы, то $\mathbb{C}$ (I.I) будет матрицей линейных операторов.

$$\begin{cases} \Delta_1^j = q_j \cdot \Delta_1^{j-1} - \rho_j \cdot z_j \cdot \Delta_1^{j-2}, \ \Delta_1^{-1} = 0, \ \Delta_1^0 = 1, \ j = 1, 2, \ldots, m, \\ \Delta_j^m = q_j \cdot \Delta_{j+1}^m - \rho_{j+1} z_{j+1} \Delta_{j+2}^m, \ \Delta_{m+2}^m = 0, \ \Delta_{m+1}^m = 1, \ j = m, m-1, \ldots, 1, \\ det(\mathbb{C}) = \Delta_1^m = \Delta_1^j \cdot \Delta_{j+1}^m - \rho_{j+1} \cdot z_{j+1} \cdot \Delta_1^{j-1} \cdot \Delta_{j+2}^m, \ j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \qquad (I.2)$$

Представления 2 (мультипликативные)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1^j = \prod\limits_{k=2}^{j+1} \bar{\Lambda}_k \\ \Delta_i^m = \prod\limits_{k=i-1}^{m-1} \bar{G}_k \end{array}\right\} \Longrightarrow det(\mathbb{C}) = \left(\prod_{k=2}^{m+1} \bar{\Lambda}_k = \prod_{k=0}^{m-1} \bar{G}_k\right), \qquad (I.3)$$

где

процессы $\{\bar{\Lambda}, \bar{G}\}$ - определены в виде

$$\begin{cases} \bar{G}_{i-1} = q_i - \gamma_{i+1} \cdot \bar{G}_i^{-1}, \ \bar{G}_{m-1} = q_m, \ \bar{G}_m = 1, \ i = m-1, m-2, \ldots, 1, \\ \bar{\Lambda}_{j+1} = q_j - \gamma_j \cdot \bar{\Lambda}_j^{-1}, \ \bar{\Lambda}_2 = q_1, \ \bar{\Lambda}_1 = 1, \ j = 2, 3, \ldots, m; \ \{\gamma_k = \rho_k \cdot z_k\}_{k=2}^m. \end{cases} \qquad (I.4)$$

При этом имеют место следующие доопределения:

1°. $\bar{\Lambda}_k = 0 \to \bar{\Lambda}_{k+2} = q_{k+1}, \bar{\Lambda}_{k+1} = \gamma_{k-1}, \bar{\Lambda}_{k+1} = \infty$, но $\bar{\Lambda}_k \cdot \bar{\Lambda}_{k+1} = -\gamma_k, \bar{\Lambda}_2 = q_1, k = 2, \ldots, m,$

2°. $\bar{G}_k = 0 \to \bar{G}_{k-2} = q_{k-1}, \bar{G}_{k+1} = \gamma_{k+2}, \bar{G}_{k-1} = \infty$, но $\bar{G}_k \cdot \bar{G}_{k-1} = -\gamma_{k+1}, \bar{G}_{m-1} = q_m, k = m-1, \ldots, 1,$ (I.5)

из которых в соответствии с (I.2) следует:

1) Если $[\bar{\Lambda}_k = 0, \bar{\Lambda}_{k+2} = 0 = q_{k+1}$ и $\gamma_{k+2} = 0]$, то $\{\Delta_1^z = 0\}_{z=k-1}^m \to det(\mathbb{C}) = 0.$

2) Если $[\bar{G}_k = 0, \bar{G}_{k-2} = 0 = q_{k-1}$ и $\gamma_{k-1} = 0]$, то $\{\Delta_z^m = 0\}_{z=k+1}^m \to det(\mathbb{C}) = 0.$

3°.
$$\prod_{k=1}^{j+1} \bar{\Lambda}_k = \begin{cases} 0, \text{ если } \bar{\Lambda}_{j+1} = 0, \\ [\bar{\Lambda}_1 \cdot \bar{\Lambda}_2 \cdot \bar{\Lambda}_3 \cdots \bar{\Lambda}_{k-1} \cdot (\bar{\Lambda}_k \cdot \bar{\Lambda}_{k+1}) \cdot \bar{\Lambda}_{k+2} \cdots \bar{\Lambda}_{j+1}] \neq 0; \ (\bar{\Lambda}_k \cdot \bar{\Lambda}_{k+1}) = -\gamma_k, \\ \bar{\Lambda}_{k+2} = q_{k+1}, \text{ если } \bar{\Lambda}_k = 0 \text{ для любого } 2 \le k \le j. \end{cases} \qquad (I.5')$$

4°.
$$\prod_{k=i-1}^{m} \bar{G}_k = \begin{cases} 0, \text{ если } \bar{G}_{i-1} = 0, \\ [\bar{G}_{i-1} \cdot \bar{G}_i \cdots \bar{G}_{k-2} \cdot (\bar{G}_{k-1} \cdot \bar{G}_k) \cdot \bar{G}_{k+1} \cdots \bar{G}_{m-1} \cdot \bar{G}_m] \neq 0; \ (\bar{G}_{k-1} \cdot \bar{G}_k) = -\gamma_{k+1}, \\ \bar{G}_{k-2} = q_{k-1}, \text{ если } \bar{G}_k = 0 \text{ для любого } i \le k \le m-1. \end{cases} \qquad (I.5'')$$

Замечание 1. Из (I.2) и, то же самое, из (I.3)÷(I.5") следует, что если два подряд идущих (Δ_1^i и Δ_1^{i+1}) - ведущих верхних либо (Δ_i^m и Δ_{i+1}^m)- ведущих нижних угловых минора трехдиагональной матрицы $\mathbb{C}$ (I.1) равны нулю одновременно, то матрица $\mathbb{C}$ (I.1) является вырожденной.

Для случая обращения в нуль некоторых из ведущих блочных угловых миноров невырожденных блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}$ (I.1) в работах [4,6] были также определены (по аналогии со скалярными последовательностями (I.4)) матричные последовательности вида[x)]

x) Ограничения $[det(q_m) \neq 0, det(q_{z-1}) \neq 0]$ либо $[det(q_1) \neq 0, det(q_{z+1}) \neq 0]$ не являются принципиальными и легко снимаются, если воспользоваться рекомендациями Замечания 3 [6].

$$\begin{cases} \text{Если } det(\bar G_j)\neq 0, \text{ то } \bar G_{j-1} = q_j - r_{j+1}\cdot \bar G_j^{-1}\cdot p_{j+1},\ \bar G_{m-1} = q_m,\ (det(q_m)\neq 0),\ j=m-1,\dots,1. \\ \text{Если } det(\bar G_j)=0 \text{ для любого } j \text{ из } (2\le j\le m-2), \text{ то } \bar G_{j-1} = ?, \\ \text{но } \bar G_{j-2} = q_{j-1}, \text{ где } det(q_{j-1})\neq 0. \end{cases} \qquad \text{(I.6)}$$

$$\begin{cases} \text{Если } det(\bar\Lambda_j)\neq 0, \text{ то } \bar\Lambda_{j+1} = q_j - p_j\cdot\bar\Lambda_j^{-1}\cdot r_j,\ \bar\Lambda_2 = q_1,\ (det(q_1)\neq 0),\ j=2,3,\dots,m, \\ \text{Если } det(\bar\Lambda_j)=0 \text{ для любого } j \text{ из } (3\le k\le m-1), \text{ то } \bar\Lambda_{j+1} = ? \text{ но } \bar\Lambda_{j+2} = q_{j+1}, \\ \text{где } det(q_{j+1})\neq 0. \end{cases} \qquad \text{(I.7)}$$

Имеют место [2,6] следующие представления для невырожденных матриц $\mathbb{C}$ (I.I):

<u>Представление I</u> (при $\{det(\bar\Lambda_{k+1})\neq 0\}_{k=2}^{m}$)

$$\begin{bmatrix} E_1 &&&&& \\ (-\bar\beta_2) & E_2 &&&& \\ & \ddots & \ddots &&& \\ && (-\bar\beta_i) & E_i && \\ &&& \ddots & \ddots & \\ &&&& (-\bar\beta_m) & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar\Lambda_2 &&&&& \\ & \bar\Lambda_3 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& \bar\Lambda_{i+1} && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \bar\Lambda_m \\ &&&&&& \bar\Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-\bar c_2) &&&& \\ & E_2 & (-\bar c_3) &&& \\ && \ddots & \ddots && \\ &&& E_i & (-\bar c_{i+1}) & \\ &&&& \ddots & \ddots \\ &&&& E_{m-1} & (-\bar c_m) \\ &&&&& E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar\Lambda) \qquad \text{(I.8)}$$

, где

$$\{\bar\beta_{k+1} = -(p_{k+1}\cdot\bar\Lambda_{k+1}^{-1}),\ \bar c_{k+1} = -(\bar\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot r_{k+1})\}_{k=1}^{m-1},\ \{\bar\Lambda_{k+1}\}_{k=1}^{m} \text{ есть } (\text{I.7})_{\text{I}}) \qquad \text{(I.9)}$$

<u>Представление 2</u> (при $\{det(\bar G_{k-1})\neq 0\}_{k=1}^{m}$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta_2) &&&& \\ & E_2 & (-\hat\beta_3) &&& \\ && \ddots & \ddots && \\ &&& E_i & (-\hat\beta_{i+1}) & \\ &&&& \ddots & \ddots \\ &&&& E_{m-1} & (-\hat\beta_m) \\ &&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar G_0 &&&&& \\ & \bar G_1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& \bar G_{i-1} && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \bar G_{m-2} \\ &&&&&& \bar G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&&& \\ (-\hat c_2) & E_2 &&&& \\ & \ddots & \ddots &&& \\ && (-\hat c_i) & E_i && \\ &&& \ddots & \ddots & \\ &&&& (-\hat c_m) & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar G) \qquad \text{(I.10)}$$

, где

$$\{\hat\beta_{k+1} = -(r_{k+1}\cdot G_k^{-1}),\ \hat c_{k+1} = -(G_k^{-1}\cdot p_{k+1})\}_{k=1}^{m-1},\ \{\bar G_{k-1}\}_{k=1}^{m} \text{ есть } (\text{I.6})_{\text{I}}) \qquad \text{(I.II)}$$

<u>Представление 3</u> (при $det(\bar G_k)=0$ для любого фиксированного k из $(2\le k\le m-2)$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta_2) &&&&&& \\ & \ddots & \ddots &&&&& \\ && E_{k-2} & (-\hat\beta_{k-1}) &&&& \\ &&& E_{k-1} & \mathbb{O}_k &&& \\ &&&& E_k & \mathbb{O}_{k+1} && \\ &&&&& E_{k+1} & (-\hat\beta_{k+3}) & \\ &&&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&& E_{m-1} & (-\hat\beta_m) \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&&&& \\ & E_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& E_{k-2} &&& \\ &&&& E_{k-1} && \\ \hat A_1 & \cdots & & & \hat A_{k-1} & E_k & \\ &&&&&& E_{k+1} \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar G_0 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \bar G_{k-3} &&& \\ &&& q_{k-1} && \\ &&&& \begin{bmatrix} (q_k - \hat\Theta_k) & r_{k+1} \\ p_{k+1} & \bar G_k \end{bmatrix} & \\ &&&&& \bar G_{k+1} \\ &&&&&& \ddots \\ &&&&&&& \bar G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&& \hat B_1 &&& \\ & E_2 &&& \hat B_2 &&& \\ && \ddots && \vdots &&& \\ &&& E_{k-1} & \hat B_{k-1} &&& \\ &&&& E_k &&& \\ &&&&& E_{k+1} && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-\hat c_2) &&&&&& \\ & \ddots & \ddots &&&&& \\ && E_{k-2} & (-\hat c_{k-1}) &&&& \\ &&& E_{k-1} & \mathbb{O}_k &&& \\ &&&& E_k & \mathbb{O}_{k+1} && \\ &&&&& E_{k+1} & (-\hat c_{k+2}) & \\ &&&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&& E_{m-1} & (-\hat c_m) \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar G) \qquad \text{(I.I2)}$$

, где

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{A}_j = \rho_k \cdot \prod\limits_{s=j+1}^{k-1} \hat{c}_s \cdot \bar{G}_{j-1}^{-1}, \; j = 1,2,\dots,k-1; \quad \hat{B}_i = \bar{G}_{i-1}^{-1} \cdot \prod\limits_{s=i+1}^{k-1} \hat{\beta}_s \cdot r_k, \; i = 1,2,\dots,k-1; \\ \hat{\theta}_k = \sum\limits_{s=1}^{k-1} (\hat{A}_s \cdot \bar{G}_{s-1} \cdot \hat{B}_s), \; \hat{c}_{s+1} = -(\bar{G}_s^{-1} \rho_{s+1}), \; \hat{\beta}_{s+1} = -(r_{s+1} \cdot \bar{G}_s^{-1}), \; 1 \le s \le k-2; \; k+2 \le s \le m-1, \qquad \text{(I.13)} \\ \text{а соответствующие матрицы } \{\bar{G}\} \text{ – полностью определены в (I.6).} \end{array}\right.$$

<u>При этом</u> $(q_k - \hat{\theta}_k) = \bar{\Lambda}_{k+1}$, если $\{\det(\bar{\Lambda}_s) \ne 0\}_{s=2}^{k}$.

<u>Представление 4</u> (при $\det(\bar{\Lambda}_k) = 0$ для любого фиксированного k из $(3 \le k \le m-1)$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ (-\bar{\beta}_2)E_2 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & (-\bar{\beta}_{k-1})E_{k-1} & & & & & & \\ & & \theta_k \; E_k & & & & & \\ & & & \theta_{k+1} E_{k+1} & & & & \\ & & & & (-\bar{\beta}_{k+2})E_{k+2} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & (-\bar{\beta}_m)E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & E_{k-1} & & & \\ & & & E_k \; \bar{B}_{k+1} \cdots \bar{B}_k & & \\ & & & E_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \bar{\Lambda}_{k-1} & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_k & r_k \\ \rho_k & (q_k - \bar{\theta}_k) \end{bmatrix} & & \\ & & & & q_{k+1} & \\ & & & & & \bar{\Lambda}_{k+3} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & \bar{\Lambda}_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & \\ & E_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & E_{k-1} & & \\ & & E_k & & \\ & & \bar{A}_{k+1} E_{k+1} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \bar{A}_{m-1} & E_{m-1} & \\ & & \bar{A}_m & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 (-\bar{c}_2) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & E_{k-2} (-\bar{c}_{k-1}) & & & \\ & & E_{k-1} \theta_k & & \\ & & E_k \; \theta_{k+1} & & \\ & & & E_{k+1} (-\bar{c}_{k+2}) & \\ & & & \ddots & \\ & & & E_{m-1} (-\bar{c}_m) & \\ & & & & E_m \end{bmatrix} = C(\bar{\Lambda}) \qquad \text{(I.14)}$$

где

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{B}_j = r_{k+1} \cdot \prod\limits_{s=k+2}^{j} \bar{c}_s \cdot \bar{\Lambda}_{s+1}^{-1}, \; j = k+1, k+2, \dots, m; \quad \bar{A}_i = \bar{\Lambda}_{i+1}^{-1} \cdot \prod\limits_{s=k+2}^{i} \bar{\beta}_s \cdot \rho_{k+1}, \; i = k+1, k+2, \dots, m; \\ \bar{\theta}_k = \sum\limits_{s=k+1}^{m} (\bar{B}_s \cdot \bar{\Lambda}_{s+1} \cdot \bar{A}_s), \; \bar{c}_{s+1} = -(\bar{\Lambda}_{s+1}^{-1} \cdot r_{s+1}), \; \bar{\beta}_{s+1} = -(\rho_{s+1} \cdot \bar{\Lambda}_{s+1}^{-1}), \; 1 \le s \le k-1; \; k+2 \le s \le m-1, \\ \text{а соответствующие матрицы } \{\bar{\Lambda}\} \text{ – полностью определены в (I.7).} \end{array}\right.$$

<u>При этом</u> $(q_k - \bar{\theta}_k) = \bar{G}_{k-1}$, если $\{\det(\bar{G}_s) \ne 0\}_{s=k}^{m-1}$.

В работе [6] были получены представления для C (I.I) при обращении в нуль одновременно двух близких и двух отдаленных однотипных ведущих блочных угловых миноров, т.е. при условиях:

I. $[\det(\bar{G}_k) = 0$ и $\det(\bar{G}_{k-3}) = 0$, для любого k из $(5 \le k \le m-2)]$,
<u>либо</u>
$[\det(\bar{\Lambda}_k) = 0$ и $\det(\bar{\Lambda}_{k+3}) = 0$, для любого k из $(8 \le k \le m-4)]$.

II. $[\det(\bar{G}_k) = 0$ и $\det(\bar{G}_\ell) = 0$, для любого k фиксированного и любого ℓ из $(2 \le \ell < k-3)]$, <u>либо</u>
$[\det(\bar{\Lambda}_k) = 0$ и $\det(\bar{\Lambda}_\ell) = 0$, для любого k фиксированного и любого ℓ из $(k+3 < \ell \le m-1)]$.

2. <u>О методах вычисления определителя и ведущих блочных угловых миноров, ни один из которых не обращается в нуль, блочно-трехдиагональных матриц</u>

Пусть Δ_ℓ^n есть определители блочных матриц, получающихся отбрасыванием всех квазистрок ($\equiv$ блочных строк) с номерами меньше ℓ и всех квазистолбцов ($\equiv$ блочных столбцов) с номерами больше n при $(1 \le n, \ell \le m)$.

Ведущими блочными угловыми минорами ($\equiv$ главными угловыми квазиминорами) матрицы C (I.I) поэтому называют Δ_1^j (при $j = 1,2,\dots,m$) –

– верхние (начинающиеся с $det(q_1)$) главные угловые квазиминоры и Δ_j^m (при $j = m, m-1, .., 1$) – нижние (начинающиеся с $det(q_m)$) главные угловые квазиминоры. Тогда очевидно, Δ_1^m есть определитель матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). Итак, справедлива

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathbb{C}$ –блочно-трехдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{ r_k, p_k \}_{k=2}^m$ и диагональными квадратными блоками $\{ q_k \}_{k=1}^m$, имеющими в общем случае разные размерности. Пусть также ее Δ_1^j –верхние (Δ_j^m–нижние) главные угловые квазиминоры отличны[x] от нуля при всех j из $(2 \le j \le m-1)$. Тогда Δ_1^j, Δ_j^m , и $\Delta_1^m = det(\mathbb{C})$ могут быть найдены с использованием одного из следующих представлений:

<u>Представления I</u> (мультипликативные) для ведущих блочных угловых минoров и определителя

$$\begin{cases} \Delta_1^j = \prod_{k=1}^{j+1} det(\bar{\Lambda}_k) \quad \text{для всех } j = 1, 2, \dots, m \text{ и } det(\bar{\Lambda}_1) = 1, \\ \Delta_j^m = \prod_{\xi=j-1}^{m} det(\bar{G}_k) \quad \text{для всех } j = m, m-1, \dots, 1 \text{ и } det(\bar{G}_m) = 1, \end{cases} \tag{2.I}$$

$$\left\{ \prod_{k=1}^{m+1} det(\bar{\Lambda}_k) = [det(\mathbb{C}) = \Delta_1^m] = \prod_{k=0}^{m} det(\bar{G}_k) \right\}. \tag{2.2}$$

<u>Представления 2</u> (итерационные) для ведущих блочных угловых миноров и определителя

$$\begin{cases} \Delta_1^j = det(q_j) \Delta_1^{j-1} - \Omega_j \cdot \Delta_1^{j-2}, \ \Delta_1^{-1} = 0, \ \Delta_1^0 = 1, \ j = 1, 2, \dots, m, \\ \Delta_j^m = det(q_j) \Delta_{j+1}^m - \Omega_j \cdot \Delta_{j+2}^m, \ \Delta_{m+2}^m = 0, \ \Delta_{m+1}^m = 1, \ j = m, m-1, \dots, 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

<u>Представления 3</u>, связывающие определитель с ведущими блочными угловыми минорами <u>обоих типов</u>,

$$\begin{cases} [det(\mathbb{C}) = \Delta_1^m] = \dfrac{1}{det(\bar{\Lambda}_{j+1})} \cdot \left[\prod_{k=j+1}^{m+1} \dfrac{det(\bar{\Lambda}_k)}{det(\bar{G}_{k-1})} + \omega_j \right] \cdot \Delta_1^j \cdot \Delta_{j+1}^m - \Omega_j \cdot \Delta_1^{j-1} \cdot \Delta_{j+2}^m, \\ [det(\mathbb{C}) = \Delta_1^m] = \dfrac{1}{det(\bar{\Lambda}_{j+1})} \cdot \left[\prod_{k=1}^{j} \dfrac{det(\bar{G}_{k-1})}{det(\bar{\Lambda}_k)} + \omega_j \right] \cdot \Delta_1^j \cdot \Delta_{j+1}^m - \Omega_j \cdot \Delta_1^{j-1} \cdot \Delta_{j+2}^m, \\ \text{где} \quad \Delta_1^{-1} = 0 = \Delta_{m+2}^m, \ \Delta_1^0 = 1 = \Delta_{m+1}^m, \ j = 1, 2, \dots, m; \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} [det(\mathbb{C}) = \Delta_1^m] = \dfrac{1}{det(\bar{G}_j)} \cdot \left[\prod_{k=j+2}^{m+1} \dfrac{det(\bar{\Lambda}_k)}{det(\bar{G}_{k-1})} + \hat{\omega}_{j+1} \right] \cdot \Delta_1^j \cdot \Delta_{j+1}^m - \hat{\Omega}_{j+1} \cdot \Delta_1^{j-1} \cdot \Delta_{j+2}^m, \\ [det(\mathbb{C}) = \Delta_1^m] = \dfrac{1}{det(\bar{G}_j)} \cdot \left[\prod_{k=1}^{j+1} \dfrac{det(\bar{G}_{k-1})}{det(\bar{\Lambda}_k)} + \hat{\omega}_{j+1} \right] \cdot \Delta_1^j \cdot \Delta_{j+1}^m - \hat{\Omega}_{j+1} \cdot \Delta_1^{j-1} \cdot \Delta_{j+2}^m, \\ \text{где} \ \left(\prod_{k=m+2}^{m} \dfrac{det(\bar{\Lambda}_k)}{det(\bar{G}_{k-1})} \right) = 1, \ \hat{\Omega}_{m-1} = 0 = \hat{\omega}_{m+1}, \ \Delta_1^{-1} = 0 = \Delta_{m+2}^m, \ \Delta_1^0 = 1 = \Delta_{m+1}^m, \ j = 1, .., m. \end{cases} \tag{2.5}$$

---

x) Мы исключили из указанного интервала j значения $j = 1$ и $j = m$, поскольку условия вырожденности блоков q_1 и q_m не являются принципиальными и легко снимаются с учетом Замечания 3[6], т.е. путем предварительного выбора нового разбиения исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) .

Здесь в (2.I)÷(2.5) введены определения

$$\begin{cases} \omega_j = det(q_j) - det(\bar{\mathcal{G}}_{j-1}),\ \Omega_j = det(\bar{\mathcal{G}}_j)\cdot\omega_j,\ \omega_m = 0 = \Omega_m,\ 1 \le j \le m-1, \\ \hat{\omega}_j = det(q_j) - det(\bar{\Lambda}_{j+1}),\ \hat{\Omega}_j = det(\bar{\Lambda}_j)\cdot\hat{\omega}_j,\ \hat{\omega}_1 = 0 = \hat{\Omega}_1,\ 2 \le j \le m, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \bar{\Lambda}_{k+1} = q_k - p_k\cdot\bar{\Lambda}_k^{-1}\cdot z_k,\ \bar{\Lambda}_1 = E_1,\ \bar{\Lambda}_2 = q_1,\ k = 2,3,\dots,m, \\ \bar{\mathcal{G}}_{k-1} = q_k - z_{k+1}\cdot\bar{\mathcal{G}}_k^{-1}\cdot p_{k+1},\ \bar{\mathcal{G}}_m = E_m,\ \bar{\mathcal{G}}_{m-1} = q_m,\ k = m-1, m-2,\dots,1, \end{cases} \tag{2.7}$$

E_1 и E_m – единичные матрицы размерностей q_1 и q_m соответственно. При этом имеют место следующие утверждения:

Утверждение I. Если $det(\bar{\mathcal{G}}_0) = 0 = det(\bar{\Lambda}_{m+1})$, то $det(\mathbb{C}) = 0$.

Утверждение 2. Представления (2.I)÷(2.7) являются обобщением соответствующих представлений (I.2)÷I.4),и,более того, четыре представления (2.4)÷(2.5) переходят в одно представление $(I.2)_{3)}$ для $det(\mathbb{C})$ в случае $\mathbb{C}$ -трехдиагональной матрицы.

Доказательство теоремы начнем со следующего утверждения (Замечание 2). Если мультипликативные представления (2.I)÷(2.2) и можно было бы еще формально записать по аналогии с соответствующими мультипликативными представлениями (I.3)÷(I.4)[I], то итерационные представления (2.3)÷(2.7), как видно, уже не являются простой аналогией соответствующих представлений (I.2)[I]для трехдиагональных матриц. Отметим, что основную роль в постулировании вида представлений (2.3)÷(2.7) для нас сыграли равенства {(2.3) и (2.4) из [3]}и {(2.28) из [2]}.

Однако даже не противоречащий факторизациям $\mathbb{C}$ (I.I) вида (I.8)÷(I.II) формализм введения мультипликативных представлений (2.I)÷(2.2) требует своего обоснования.

Итак, пусть имеют место мультипликативные представления (2.I)÷ ÷(2.7). Подставив в правую часть $(2.3)_{I)}$ выражения для Δ_1^{j-1} и Δ_1^{j-2} из $(2.I)_{I)}$ с учетом $(2.6)_{2)}$, получаем

$$\Delta_1^j = det(q_j)\cdot\prod_{k=1}^{j} det(\bar{\Lambda}_k) - det(\bar{\Lambda}_j)[det(q_j) - det(\bar{\Lambda}_{j+1})]\cdot\prod_{k=1}^{j-1} det(\bar{\Lambda}_k) =$$

$$= [det(q_j)\cdot det(\bar{\Lambda}_j) - det(\bar{\Lambda}_j)det(q_j) + det(\bar{\Lambda}_j)\cdot det(\bar{\Lambda}_{j+1})]\cdot\prod_{k=1}^{j-1} det(\bar{\Lambda}_k) =$$

$$= det(\bar{\Lambda}_j)\cdot det(\bar{\Lambda}_{j+1})\cdot\prod_{k=1}^{j-1} det(\bar{\Lambda}_k) = \prod_{k=1}^{j+1} det(\bar{\Lambda}_k).$$ Справедливость $(2.3)_{I)}$ проверена. Подставив также в правую часть $(2.3)_{2)}$ выражения для Δ_{j+1}^m и Δ_{j+2}^m из $(2.I)_{2)}$ с учетом $(2.6)_{I)}$, имеем

$$\Delta_j^m = det(q_j)\cdot\prod_{k=j}^{m} det(\bar{\mathcal{G}}_k) - det(\bar{\mathcal{G}}_j)\cdot[det(q_j) - det(\bar{\mathcal{G}}_{j-1})]\cdot\prod_{k=j+1}^{m} det(\bar{\mathcal{G}}_k) =$$

$$= [det(q_j)\cdot det(\bar{\mathcal{G}}_j) - det(\bar{\mathcal{G}}_j)\cdot det(q_j) + det(\bar{\mathcal{G}}_j)\cdot det(\bar{\mathcal{G}}_{j-1})]\cdot\prod_{k=j+1}^{m} det(\bar{\mathcal{G}}_k) =$$

$$= det(\bar{\mathcal{G}}_j)\cdot det(\bar{\mathcal{G}}_{j-1})\cdot\prod_{k=j+1}^{m} det(\bar{\mathcal{G}}_k) = \prod_{k=j-1}^{m} det(\bar{\mathcal{G}}_k).$$ Итак, справедливость $(2.3)_{2)}$ установлена. Воспользовавшись мультипликативными представлени-

ями (2.I)÷(2.2), проверяем и четыре различных представления (2.4)÷÷(2.5) для $\Delta_1^m = det(\mathbb{C})$. На самом деле, например, подставив в правые части $(2.4)_{I)}$ и $(2.5)_{2)}$ соответствующие выражения для Δ_j^m и Δ_1^j из (2.I) и при этом учитывая (2.6), имеем

$$[det(\mathbb{C})=\Delta_1^m] = \frac{1}{det(\bar\Lambda_{j+1})}\cdot\left[\prod_{k=j+1}^{m+1}\frac{det(\bar\Lambda_k)}{det(\bar G_{k-1})}+\omega_j\right]\cdot\prod_{k=1}^{j+1}det(\bar\Lambda_k)\cdot\prod_{k=j}^{m}det(\bar G_k)-$$
$$-det(\bar G_j)\cdot\omega_j\cdot\prod_{k=1}^{j}det(\bar\Lambda_k)\cdot\prod_{k=j-1}^{m}det(\bar G_k)=\left\{\left[\prod_{k=j+1}^{m+1}\frac{det(\bar\Lambda_k)}{det(\bar G_{k-1})}+\omega_j\right]\cdot\prod_{k=j}^{m}det(\bar G_k)-\right.$$
$$\left.-\omega_j\cdot\prod_{k=j}^{m}det(\bar G_k)\right\}\cdot\prod_{k=1}^{j}det(\bar\Lambda_k)=\prod_{k=j+1}^{m+1}det(\bar\Lambda_k)\cdot\prod_{k=1}^{j}det(\bar\Lambda_k)=\prod_{k=1}^{m+1}det(\bar\Lambda_k).$$

$$[det(\mathbb{C})=\Delta_1^m] = \frac{1}{det(\bar G_j)}\cdot\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{det(\bar G_{k-1})}{det(\bar\Lambda_k)}+\hat\omega_{j+1}\right]\cdot\prod_{k=1}^{j+1}det(\bar\Lambda_k)\cdot\prod_{k=j}^{m}det(\bar G_k)-$$
$$-det(\bar\Lambda_{j+1})\cdot\hat\omega_{j+1}\cdot\prod_{k=1}^{j}det(\bar\Lambda_k)\cdot\prod_{k=j+1}^{m}det(\bar G_k)=\left\{\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{det(\bar G_{k-1})}{det(\bar\Lambda_k)}+\hat\omega_{j+1}\right]\cdot\prod_{k=1}^{j+1}det(\bar\Lambda_k)-\right.$$
$$\left.-\hat\omega_{j+1}\cdot\prod_{k=1}^{j+1}det(\bar\Lambda_k)\right\}\cdot\prod_{k=j+1}^{m}det(\bar G_k)=\prod_{k=0}^{j}det(\bar G_k)\cdot\prod_{k=j+1}^{m}det(\bar G_k)=\prod_{k=0}^{m}det(\bar G_k).$$

Следовательно, мы убедились в справедливости $(2.4)_{I)}$ и $(2.5)_{2)}$. Аналогично проверяются равенства $(2.4)_2$ и $(2.5)_{I)}$. В итоге проверили, что если имеют место (2.I)÷(2.2), то справедливы представления (2.3)÷(2.7) для Δ_1^j , Δ_j^m и $det(\mathbb{C})=\Delta_1^m$. Доказательство же истинности мультипликативных представлений (2.I)÷(2.2), если $\{0\neq det(\bar\Lambda_{i+1})\}_{i=1}^{m-1}$ либо $\{0\neq det(\bar G_{i-1})\}_{i=2}^{m}$, выполним методом математической индукции. При этом учтем, что определители блочно-диагональных матриц равны произведению определителей их блоков, а также воспользуемся матричными факторизациями (I.8)÷(I.II). Очевидно при этом, что если порядок матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) не более 3, то установить связь соответствующих главных угловых квазиминоров матрицы с детерминантами матриц $\{\bar G\}$ и $\{\bar\Lambda\}$ не представляет труда. Для этого достаточно воспользоваться определением процессов $\{\bar G\}$ и $\{\bar\Lambda\}$ (2.7), а также матричными факторизациями (I.8)÷÷(I.II). На самом деле. Если $m=1$, то

$$det(\bar\Lambda_2)=[det(q_1)=det(\mathbb{C}_1)]=det(\bar G_0).$$

Если $m=2$, то

$$[det(\bar\Lambda_2)=det(q_1)]\cdot det(\bar\Lambda_3)=\left[det\left(\begin{bmatrix} q_1 & r_2\\ p_2 & q_2\end{bmatrix}\right)=det(\mathbb{C}_2)\right]=[det(\bar G_1)=det(q_2)]\cdot det(\bar G_0). \quad (2.8)$$

Если $m=3$, то

$$\prod_{k=2}^{4}det(\bar\Lambda_k)=\left[det\left(\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & \mathbb{O}\\ p_2 & q_2 & r_3\\ \mathbb{O} & p_3 & q_3\end{bmatrix}\right)=det(\mathbb{C}_3)\right]=\prod_{k=0}^{2}det(\bar G_k).$$

Пусть теперь представления (2.I) и (2.2) справедливы для любых главных угловых квазиминоров подматриц (≡ усеченных матриц) $\mathbb{C}_n$ матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), любого порядка n, такого, что $4 \le n \le m$, т.е.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \Delta_1^j = \prod_{k=1}^{j+1} det(\bar\Lambda_k),\ det(\bar\Lambda_1)=1,\ j=1,2,\dots,n, \\ \Delta_j^m = \prod_{k=j-1}^{n} det(\bar G_k),\ det(\bar G_n)=1,\ j=n,n-1,\dots,1, \end{array}\right. \\ \prod_{k=0}^{n} det(\bar q_k) = [det(\mathbb{C})=\Delta_1^n] = \prod_{k=1}^{n+1} det(\bar\Lambda_k),\ det(\bar\Lambda_1)=1=det(\bar G_n). \end{cases} \qquad (2.9)$$

Покажем, что (2.9) имеют место и при любых j из $(1 \le j \le n+1)$. Усеченную матрицу $\mathbb{C}_{n+1}$ вида (I.I) можно представить одним из способов

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_n & \\ & z_{n+1} \\ p_{n+1} & q_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_{n+1} = \begin{bmatrix} q_1 & z_2 & \\ p_2 & & \\ & & \widetilde{\mathbb{C}}_n \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

, где $\mathbb{C}_n$ и $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ –усеченные (порядка n) квазитрехдиагональные матрицы также вида (I.I). Как видно, любые Δ_1^j –верхние угловые квазиминоры матрицы $\mathbb{C}_n$ (т.е. при любых $1 \le j \le n$) совпадают с такими же квазиминорами матрицы $\mathbb{C}_{n+1}$, и для них имеют место в соответствии с индуктивным предположением равенства $(2.9)_{1)}$. В соответствии с тем же индуктивным предположением для любых нижних угловых квазиминоров матрицы $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ имеют место равенства $(2.9)_{2)}$. Также очевидно, что любые нижние угловые квазиминоры (включая квазиминор Δ_2^{n+1}) матрицы $\mathbb{C}_{n+1}$ совпадают с соответствующими им квазиминорами матрицы $\widetilde{\mathbb{C}}_n$.

Далее в соответствии с определениями $\{\bar\Lambda\}$ и $\{\bar G\}$ (2.7) и матричными факторизациями (I.8)÷(I.II) для $\mathbb{C}_{n+1}$ имеем равенства

$$\prod_{k=1}^{n+2} det(\bar\Lambda_k) = [\Delta_1^{n+1}(\bar\Lambda) = det(\mathbb{C}) = \Delta_1^{n+1}(\bar G)] = \prod_{k=0}^{n+1} det(\bar G_k),\text{где } det(\bar\Lambda_1)=1=det(\bar G_{n+1}).$$

Таким образом, равенства (2.9) имеют место и при $j=(n+1)$, что и доказывает справедливость (2.I)÷(2.2) при любом m.

В завершение доказательства теоремы покажем справедливость утверждений I и 2. Утверждение I является прямым следствием из (2.2). Для доказательства же утверждения 2 отметим, что если $\mathbb{C}$ (I.I) - трехдиагональная матрица, то при любом j $det(q_j)=q_j$, и покажем, что при $\{\Delta_1^j \ne 0, \Delta_j^m \ne 0\}_{j=2}^{m-1}$, ненулевых ведущих угловых минорах, имеют место равенства

$$\hat\Omega_j = p_j \cdot z_j \quad ; \quad \Omega_j = p_{j+1} \cdot z_{j+1},$$

$$\frac{1}{det(\bar\Lambda_{j+1})} \cdot \left[\prod_{k=j+1}^{m+1} \frac{det(\bar\Lambda_k)}{det(\bar G_{k-1})} + \omega_j\right] = 1 = \frac{1}{det(\bar\Lambda_{j+1})} \cdot \left\{\prod_{k=1}^{j} \frac{det(\bar G_{k-1})}{det(\bar\Lambda_k)} + \omega_j\right\}, \qquad (2.II)$$

$$\frac{1}{det(\bar G_j)} \cdot \left[\prod_{k=j+2}^{m+1} \frac{det(\bar\Lambda_k)}{det(\bar G_{k-1})} + \hat\omega_{j+1}\right] = 1 = \frac{1}{det(\bar G_j)} \cdot \left\{\prod_{k=1}^{j+1} \frac{det(\bar G_{k-1})}{det(\bar\Lambda_k)} + \hat\omega_{j+1}\right\}. \qquad (2.I2)\ (2.I3)$$

Равенства (2.II) следуют из (2.6)÷(2.7), т.е.

$$\hat\Omega_j = \bar\Lambda_j \cdot (q_j - \bar\Lambda_{j+1}) = p_j \cdot z_j \ ; \ \Omega_j = \bar G_j \cdot (q_j - \bar G_{j-1}) = z_{j+1} \cdot p_{j+1}.$$

Для доказательства (2.I2) и (2.I3) воспользуемся равенствами [7]

$$\prod_{k=i}^{m} \frac{\bar{\Lambda}_{k+1}}{\bar{G}_k} = [B_{ii}^{-1} = (\bar{G}_{i-1} + \bar{\Lambda}_{i+1} - q_i)] = \prod_{k=1}^{i} \frac{\bar{G}_{k-1}}{\bar{\Lambda}_i} , \qquad (2.I4)$$

которые являются следствием более общих зависимостей {(2.3) и (2.4) из [3]} и {(2.28) из [2]}. Здесь B_{ii} - диагональные элементы матрицы $B = C^{-1}$. В силу (2.I4) в (2.I2) и (2.I3) достаточно показать справедливость лишь по одному из равенств, например, $\frac{1}{det(\Lambda_{j+1})}[\cdot]=1$ и $\frac{1}{det(G_j)}\cdot\{\cdot\}=1$. Итак, воспользовавшись ω_j и $\hat{\omega}_j$ (2.6), а также $\{\bar{\Lambda}, \bar{G}\}$ (2.7) и (2.I4), имеем

$$\frac{1}{\bar{\Lambda}_{j+1}} \left[\prod_{k=j+1}^{m+1} \frac{\bar{\Lambda}_k}{\bar{G}_{k-1}} + [-B_{jj}^{-1} = (q_j - \bar{G}_{j-1} - \bar{\Lambda}_{j+1})] + \bar{\Lambda}_{j+1} \right] = 1,$$

$$\frac{1}{\bar{G}_j} \cdot \left\{ \prod_{k=1}^{j+1} \frac{\bar{G}_{k-1}}{\bar{\Lambda}_k} + [-B_{j+1 j+1}^{-1} = (q_{j+1} - \bar{G}_j - \bar{\Lambda}_j)] + \bar{G}_j \right\} = 1 .$$

Теорема доказана.

3. Методы вычисления определителя и ведущих блочных угловых миноров, ни один из которых не обращается в нуль, блочных факторизованных матриц из некоторого класса

В приложениях иногда бывает известна не сама квазитрехдиагональная матрица C (I.I), а (по сути) ей обратная матрица $B = C^{-1}$. При этом элементы-блоки B_{ij} матрицы B записываются одним из факторизованных способов, указанных ниже в Теореме 3, и возникает также задача анализа и вычисления ведущих блочных угловых миноров и определителя матрицы B. Приводимая ниже теорема решает эту задачу.

Теорема 3. Пусть блочная матрица $B = \|B_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ имеет факторизованное представление вида

$$B_{ij} = \begin{cases} R_i \cdot W_j , & \text{если } 1 \le j \le i \le m, \\ F_i \cdot V_j , & \text{если } 1 \le i \le j \le m, \end{cases} \quad \text{где} \qquad (3.I)$$

все матрицы $\{V_k, R_k, F_k, W_k\}_{k=1}^{m}$ - квадратные, одинаковых размерностей и неособенные[x)], т.е $\{det[(R_i \cdot W_i) = B_{ii} = (F_i \cdot V_i)] \ne 0\}_{i=1}^{m}$;
либо одно из следующих факторизованных представлений:

$$B_{ij} = \begin{cases} B_{ii} \cdot \prod_{z=j+1}^{i} \bar{\beta}_z , & 1 \le j \le i \le m, \\ B_{ii} \cdot \prod_{z=i+1}^{j} \hat{\beta}_z , & 1 \le i \le j \le m; \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} \prod_{z=j+1}^{i} \hat{\bar{C}}_z \cdot B_{jj} , & 1 \le j \le i \le m, \\ \prod_{z=i+1}^{j} \bar{C}_z \cdot B_{jj} , & 1 \le i \le j \le m; \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} B_{ii} \cdot \prod_{z=j+1}^{i} \bar{\beta}_z , & 1 \le j \le i \le m, \\ \prod_{z=i+1}^{j} \bar{C}_z \cdot B_{jj} , & 1 \le i \le j \le m; \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} \prod_{z=j+1}^{i} \hat{\bar{C}}_z \cdot B_{jj} , & 1 \le j \le i \le m, \\ B_{ii} \cdot \prod_{z=i+1}^{j} \hat{\bar{\beta}}_z , & 1 \le i \le j \le m, \end{cases} \quad \text{где} \qquad (3.3)$$

$$\begin{cases} B_{kk-1} \cdot B_{k-1k-1}^{-1} = \hat{\bar{C}}_k , & B_{k-1k-1}^{-1} \cdot B_{k-1k} = \hat{\bar{\beta}}_k , \\ B_{k-1k} \cdot B_{kk}^{-1} = \bar{C}_k , & B_{kk}^{-1} \cdot B_{kk-1} = \bar{\beta}_k , \quad k = 2, 3, \ldots, m \end{cases} \qquad (3.4)$$

x) Если $[det(F_1)=0$ и(либо) $det(V_m)=0]$ и(либо) $[det(R_1)=0$ и(либо) $det(W_m)=0]$, то очевидно $det(B)=0$.

и $\{B_{KK}\}_{K=1}^{m}$ – квадратные (возможно различных размерностей) неособенные матрицы. Тогда матрицы B являются неособенными (т.е. $[det(B)={}_B\Delta_1^m]\neq 0$) и имеют все ненулевые ${}_B\Delta_1^j, {}_B\Delta_j^m$ – ведущие блочные угловые миноры, которые могут быть найдены с использованием одного из следующих представлений:

Представления I (мультипликативные) для ведущих блочных угловых миноров и определителя

$$\begin{cases} {}_B\Delta_1^j = \prod_{K=1}^{j} det(\hat{U}_{K-1}); \; det(\hat{U}_0) = {}_B\Delta_1^1 = det(B_{11}), \; j=1,2,\dots,m, \\ {}_B\Delta_j^m = \prod_{K=j}^{m} det(U_{K+1}); \; det(U_{m+1}) = {}_B\Delta_m^m = det(B_{mm}), \; j=m,m-1,\dots,1, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\left\{ \prod_{K=1}^{m} det(\hat{U}_{K-1}) = [det(B) = {}_B\Delta_1^m] = \prod_{K=1}^{m} det(U_{K+1}) \right\}, \tag{3.6}$$

Представления 2 (итерационные) для ведущих блочных угловых миноров и определителя

$$\begin{cases} {}_B\Delta_1^j = det(B_{jj}) \cdot {}_B\Delta_1^{j-1} - \hat{\Psi}_j \cdot {}_B\Delta_1^{j-2}, \; {}_B\Delta_1^{-1}=0, \; {}_B\Delta_1^0 = 1, \; j=1,2,\dots,m, \\ {}_B\Delta_j^m = det(B_{jj}) \cdot {}_B\Delta_{j+1}^m - \Psi_j \cdot {}_B\Delta_{j+2}^m, \; {}_B\Delta_{m+2}^m = 0, \; {}_B\Delta_{m+1}^m = 1, \; j=m,m-1,\dots,1, \end{cases} \tag{3.7}$$

Представления 3, связывающие определитель с ведущими блочными угловыми минорами обоих типов

$$\begin{cases} [det(B) = {}_B\Delta_1^m] = \dfrac{1}{det(\hat{U}_{j-1})} \cdot \left[\prod_{K=j}^{m} \dfrac{det(\hat{U}_{K-1})}{det(U_{K+2})} + \Phi_j \right] \cdot {}_B\Delta_1^j \cdot {}_B\Delta_{j+1}^m - \Psi_j \, {}_B\Delta_1^{j-1} \cdot {}_B\Delta_{j+2}^m, \\ [det(B) = {}_B\Delta_1^m] = \dfrac{1}{det(\hat{U}_{j-1})} \cdot \left[\prod_{K=1}^{j} \dfrac{det(U_{K+1})}{det(\hat{U}_{K-2})} + \Phi_j \right] \cdot {}_B\Delta_1^j \cdot {}_B\Delta_{j+1}^m - \Psi_j \, {}_B\Delta_1^{j-1} \cdot {}_B\Delta_{j+2}^m; \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} [det(B) = {}_B\Delta_1^m] = \dfrac{1}{det(U_{j+2})} \cdot \left[\prod_{K=j+1}^{m} \dfrac{det(\hat{U}_{K-1})}{det(U_{K+2})} + \hat{\Phi}_{j+1} \right] \cdot {}_B\Delta_1^j \cdot {}_B\Delta_{j+1}^m - \hat{\Psi}_{j+1} \, {}_B\Delta_1^{j-1} \cdot {}_B\Delta_{j+2}^m, \\ [det(B) = {}_B\Delta_1^m] = \dfrac{1}{det(U_{j+2})} \cdot \left[\prod_{K=1}^{j+1} \dfrac{det(U_{K+1})}{det(\hat{U}_{K-2})} + \hat{\Phi}_{j+1} \right] \cdot {}_B\Delta_1^j \cdot {}_B\Delta_{j+1}^m - \hat{\Psi}_{j+1} \cdot {}_B\Delta_1^{j-1} \cdot {}_B\Delta_{j+2}^m. \end{cases} \tag{3.9}$$

Здесь всюду в (3.5÷3.9) использованы следующие матрицы и определения

$$\begin{cases} \Phi_j = det(B_{jj}) - det(U_{j+1}), \; \Psi_j = det(U_{j+2}) \cdot \Phi_j, \; det(U_{m+2}) = 1, \; \Phi_m = 0 = \Psi_m, \; 1 \le j \le m-1, \\ \hat{\Phi}_j = det(B_{jj}) - det(\hat{U}_{j-1}), \; \hat{\Psi}_j = det(\hat{U}_{j-2}) \cdot \hat{\Phi}_j, \; det(\hat{U}_{-1}) = 1, \; \hat{\Phi}_{m+1} = 0 = \hat{\Psi}_{m+1}, \; 2 \le j \le m, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} U_{K+1} = B_{KK} - B_{KK+1} \cdot B_{K+1K+1}^{-1} \cdot B_{K+1K}, \; K=1,2,\dots,m-1; \; U_{m+1} = B_{mm}, \\ \hat{U}_{K-1} = B_{KK} - B_{KK-1} \cdot B_{K-1K-1}^{-1} \cdot B_{K-1K}, \; K=2,3,\dots,m; \; \hat{U}_0 = B_{11}, \end{cases} \tag{3.11}$$

При этом. Во-первых, $\{det(U_{K+1})\neq 0\}_{K=1}^{m}$ и $\{det(\hat{U}_{K-1})\neq 0\}_{K=1}^{m}$, т.е. все $\{U_K, \hat{U}_K\}$ матрицы невырождены. Во-вторых, если у матрицы $B = \|B_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ B_{ij} не блоки, а вещественные числа, то все четыре представления

(3.8)÷(3.9) для $det(\mathcal{B})$ остаются различными в отличие от аналогичной ситуации в Теореме 2.

<u>Доказательство</u>. В процессе доказательства теоремы будем пользоваться результатами следующей леммы.

<u>Лемма I</u>. Если блочные матрицы $\mathcal{B}=\|\mathcal{B}_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ удовлетворяют требованиям теоремы 3, то для них справедливы следующие единственные матричные факторизованные представления

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & \mathbb{O} \\ & E_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & \prod\limits_{z=j+1}^{i}\hat{\hat{c}}_z & & E_i & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_0 & & & & \\ & \hat{U}_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \hat{U}_{i-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \hat{U}_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & \prod\limits_{z=i+1}^{j}\hat{\hat{\beta}}_z & & \\ & E_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E_i & \\ \mathbb{O} & & & & \ddots \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} = \mathcal{B} = \begin{bmatrix} E_1 & \prod\limits_{z=i+1}^{j}\bar{c}_z & & & \\ & E_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E_i & \\ \mathbb{O} & & & & \ddots \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 & & & & \\ & U_3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & U_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & U_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & \mathbb{O} \\ & E_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ \prod\limits_{z=j+1}^{i}\bar{\beta}_z & & & E_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

где $\{\hat{\hat{c}}_k, \hat{\hat{\beta}}_k; \bar{c}_k, \bar{\beta}_k\}_{k=2}^{m}$, $\{\hat{U}_{k-1}, \hat{U}_0=\mathcal{B}_{11}\}_{k=2}^{m}$, $\{U_{m+1}=\mathcal{B}_{mm}, U_{k+1}\}_{k=1}^{m-1}$ – – определены в виде (3.4) и (3.II) соответственно.

<u>Доказательство</u> (Леммы I). В работе [3] показано, что если матрица $\mathcal{B}$ имеет вид (2.I5), то она единственным образом (см., например, (3.II)÷÷(3.I3) из [3]) отображается на четыре представления вида (3.2), (3.3). Введем в рассмотрение матрицы $\{U_k, \hat{U}_k\}$ (3.II), а также матрицы

$$\begin{cases} q_k = U_{k+1}^{-1} - (\bar{\beta}_k \cdot z_k = p_k \cdot \bar{c}_k); \\ z_k = U_k^{-1}\cdot(-\bar{c}_k),\ z_1 = \mathbb{O}; \\ p_k = (-\bar{\beta}_k)U_k^{-1},\ p_1 = \mathbb{O};\ k=1,2,\dots,m; \end{cases} \qquad \begin{cases} q_k = \hat{U}_{k-1}^{-1} - (\hat{\hat{\beta}}_{k+1}\cdot p_{k+1} = z_{k+1}\cdot\hat{\hat{c}}_{k+1}); \\ z_k = (-\hat{\hat{\beta}}_k)\cdot\hat{U}_{k-1}^{-1},\ z_{m+1}=\mathbb{O}; \\ p_k = \hat{U}_{k-1}^{-1}\cdot(-\hat{\hat{c}}_k),\ p_{m+1}=\mathbb{O};\ k=1,\dots,m, \end{cases} \qquad (3.13)$$

воспользовавшись известными матрицами $\{\bar{\beta}_k, \bar{c}_k, \hat{\hat{\beta}}_k, \hat{\hat{c}}_k\}$ вида (3.4), которые определяются через элементы-блоки $\{\mathcal{B}_{ii}, \mathcal{B}_{i-1i}, \mathcal{B}_{ii+1}\}$ трех главных квазидиагоналей матрицы $\mathcal{B}$. Все матрицы $\{q_k, U_k, \hat{U}_k\}$ (3.I3) и (3.II) определены и (в соответствии с теоремой 9 из [3]) являются невырожденными. Нетрудно убедиться, что для матриц $\{U_k^{-1}$ и $\hat{U}_k^{-1}\}$ – обратных к матрицам $\{U_k$ и $\hat{U}_k\}$, имеют место, в свою очередь, рекуррентные процессы

$$\begin{cases} U_{k+1}^{-1} = q_k - p_k\cdot U_k\cdot z_k, \\ k=2,3,\dots,m;\ U_2^{-1}=q_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{U}_{k-1}^{-1} = q_k - z_{k+1}\cdot\hat{U}_k\cdot p_{k+1}, \\ k=m-1,m-2,\dots,1;\ \hat{U}_{m-1}^{-1}=q_m, \end{cases} \qquad (3.14)$$

которые обращаются в тождества при $\{q_k, z_k, p_k\}$ (3.I3).

Легко убедиться также, что при формальной замене $\{\bar{\Lambda}_k = U_k^{-1}$ и $\bar{G}_k=\hat{U}_k^{-1}\}$ процессы (3.I4) совпадают с процессами $\{\bar{\Lambda}\}$ (2.7) и $\{\bar{G}\}$ (2.7), что и было установлено нами ранее в [3].

Правильность (3.I2) устанавливается теперь путем перемножения блочных матриц с учетом определений (3.II), (3.2)÷(3.4). <u>Лемма доказана</u>. Воспользовавшись представлениями (3.I2) и методом полной математической индукции, покажем справедливость (3.5)÷(3.6). Итак, если $m=1$, то $[det(U_0)=det(\mathcal{B}_{11})]=[det(\mathcal{B}_1)=det(\mathcal{B}_{11})]=[det(U_2)=det(\mathcal{B}_{11})]$.

Если $m=2$, то усеченная матрица $\mathcal{B}_2$ (в соответствии с (3.I2)) представима в виде

$$\begin{bmatrix} E_1 & \mathbb{O} \\ (\hat{\bar{C}}_2) & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \\ & \hat{U}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & (\hat{\bar{\xi}}_2) \\ \mathbb{O} & E_2 \end{bmatrix} = \left[\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E_1 & (\bar{C}_2) \\ \mathbb{O} & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 & \\ & \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & \\ (\bar{\xi}_2) & E_2 \end{bmatrix},$$ где

$$\begin{cases} \hat{\bar{C}}_2 = (\mathcal{B}_{22}\cdot\mathcal{B}_{11}^{-1}),\ \hat{\bar{\xi}}_2 = (\mathcal{B}_{11}^{-1}\cdot\mathcal{B}_{22}),\ \hat{U}_1 = (\mathcal{B}_{22}-\mathcal{B}_{21}\cdot\mathcal{B}_{11}^{-1}\cdot\mathcal{B}_{12}),\ \hat{U}_0 = \mathcal{B}_{11}, \\ \bar{C}_2 = (\mathcal{B}_{12}\cdot\mathcal{B}_{22}^{-1}),\ \bar{\xi}_2 = (\mathcal{B}_{22}^{-1}\cdot\mathcal{B}_{21}),\ U_2 = (\mathcal{B}_{11}-\mathcal{B}_{12}\cdot\mathcal{B}_{22}^{-1}\cdot\mathcal{B}_{21}),\ U_3 = \mathcal{B}_{22}. \end{cases}$$

Откуда, учитывая что определители блочно-диагональных матриц равны произведению определителей их блоков, имеем

$$[\det(\hat{U}_0) = \det(\mathcal{B}_{11})]\cdot\det(\hat{U}_1) = [\det(\mathcal{B}_2) = {}_{\mathcal{B}}\Delta_1^2] = [\det(U_3) = \det(\mathcal{B}_{22})]\cdot\det(U_2).$$

Если $m=3$, то, также для $\mathcal{B}_3$, имеем представления

$$\begin{bmatrix} E_1 & & \mathbb{O} \\ (\hat{\bar{C}}_2) & E_2 & \\ (\hat{\bar{C}}_3\cdot\hat{\bar{C}}_2) & (\hat{\bar{C}}_3) & E_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & & \\ & \hat{U}_1 & \\ & & \hat{U}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & (\hat{\bar{\xi}}_2) & (\hat{\bar{\xi}}_2\hat{\bar{\xi}}_3) \\ & E_2 & (\hat{\bar{\xi}}_3) \\ \mathbb{O} & & E_3 \end{bmatrix} = \left[\mathcal{B}_3 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} & \mathcal{B}_{13} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} & \mathcal{B}_{23} \\ \mathcal{B}_{31} & \mathcal{B}_{32} & \mathcal{B}_{33} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E_1 & (\bar{C}_2) & (\bar{C}_2\bar{C}_3) \\ & E_2 & (\bar{C}_3) \\ \mathbb{O} & & E_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 & & \\ & U_3 & \\ & & \mathcal{B}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & \mathbb{O} \\ (\bar{\xi}_2) & E_2 & \\ (\bar{\xi}_3\bar{\xi}_2) & (\bar{\xi}_3) & E_3 \end{bmatrix},$$

где $\{\hat{\bar{C}}_K, \hat{\bar{\xi}}_K\}_{K=2}^{3}$, $\{\bar{C}_K, \bar{\xi}_K\}_{K=2}^{3}$ – имеют вид (3.4), а $\{\hat{U}_1, \hat{U}_2; U_3, U_2\}$ – имеют вид (3.II). Откуда получаем

$$\prod_{K=1}^{3}\det(\hat{U}_{K-1}) = [\det(\mathcal{B}_3) = {}_{\mathcal{B}}\Delta_1^3] = \prod_{K=1}^{3}\det(U_{K+1}),$$ где $\det(\hat{U}_0) = \det(\mathcal{B}_{11})$, $\det(U_4) = \det(\mathcal{B}_{33})$.

Пусть теперь представления (3.5) и (3.6) справедливы для главных угловых квазиминоров усеченных матриц $\mathcal{B}_n$ матрицы $\mathcal{B}$, любого порядка n, такого, что $4 \le n \le m$, т.е.

$$\begin{cases} {}_{\mathcal{B}}\Delta_1^j = \prod_{K=1}^{j}\det(\hat{U}_{K-1});\ \det(\hat{U}_0) = {}_{\mathcal{B}}\Delta_1^1 = \det(\mathcal{B}_{11}),\ j=1,2,\dots,n, \\ {}_{\mathcal{B}}\Delta_j^n = \prod_{K=j}^{n}\det(U_{K+1});\ \det(U_{n+1}) = {}_{\mathcal{B}}\Delta_n^n = \det(\mathcal{B}_{nn}),\ j=n,n-1,\dots,1, \\ \left\{\prod_{K=1}^{n}\det(\hat{U}_{K-1}) = [\det(\mathcal{B}_n) = {}_{\mathcal{B}}\Delta_1^n] = \prod_{K=1}^{n}\det(U_{K+1})\right\}. \end{cases} \tag{3.I5}$$

Покажем, что (3.I5) справедливы и для матриц $\mathcal{B}_{n+1}$ порядка $(n+1)$. Усеченную матрицу $\mathcal{B}_{n+1}$ представим в виде

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & \mathcal{B}_n & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathcal{B}_{1\,n+1} \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{n\,n+1} \end{matrix} \\ \mathcal{B}_{n+1\,1}\ \mathcal{B}_{n+1\,2}\ \cdots\ \mathcal{B}_{n+1\,n} & \mathcal{B}_{n+1\,n+1} \end{bmatrix} = \mathcal{B}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12}\ \cdots\ \mathcal{B}_{1n}\ \mathcal{B}_{1\,n+1} \\ \begin{matrix} \mathcal{B}_{21} \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{n1} \\ \mathcal{B}_{n+1\,1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & \widetilde{\mathcal{B}}_n & \\ & & \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{3.I6}$$

, где $\mathcal{B}_n, \widetilde{\mathcal{B}}_n$ (порядка n) – усеченные матрицы, элементы блоки $\mathcal{B}_{ij}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_{ij}$ которых также определяются одним из способов (3.I)÷(3.4). Следовательно, для $\mathcal{B}_n$ существует матричная факторизация в виде левой части (3.I2) и для $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ в виде правой части (3.I2) соответственно, а также для любых ведущих угловых миноров матриц $\mathcal{B}_n$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ имеют место представления (3.I5). При этом эти миноры совпадают с соответствующими минорами матрицы B_{n+1}.

Далее, в соответствии с матричными факторизациями (3.I5), для определителя матрицы B_{n+1} (3.I6) имеем равенства

$$\prod_{k=1}^{n+1} det(\hat{u}_{k+1})=[{}_B\Delta_1^{n+1}=det(B_{n+1})]=\prod_{k=1}^{n+1} det(u_{k+1}), \qquad det(u_{k+2})=det(B_{n+1 n+1}), det(\hat{u}_0)=det(B_{11}),$$

которые показывают справедливость (3.I5) и при $\mathring{j}=(n+1)$. Таким образом, учитывая произвольность n, мы показали справедливость представлений (3.5)÷(3.6) для любого m.

Теперь, воспользовавшись (3.5)÷(3.6), проверим справедливость равенств (3.7)÷(3.9). Итак, подставив в правые части $(3.7)_{1)}$ и $(3.7)_{2)}$ соответствующие выражения для ${}_B\Delta_1^{\mathring{j}}$ и ${}_B\Delta_{\mathring{j}}^{m}$ из (3.5), имеем

$$\begin{aligned}{}_B\Delta_1^{\mathring{j}} &= det(B_{\mathring{j}\mathring{j}})\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-1} det(\hat{u}_{k-1})-\hat{\psi}_{\mathring{j}}\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-2} det(\hat{u}_{k-1})=det(B_{\mathring{j}\mathring{j}})\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-1} det(\hat{u}_{k-1})-det(\hat{u}_{\mathring{j}-2})\cdot\hat{\phi}_{\mathring{j}}\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-2} det(\hat{u}_{k-1})=\\ &= [det(B_{\mathring{j}\mathring{j}})-det(B_{\mathring{j}\mathring{j}})+det(\hat{u}_{\mathring{j}-1})]\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-1} det(\hat{u}_{k-1})=\prod_{k=1}^{\mathring{j}} det(\hat{u}_{k-1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_B\Delta_{\mathring{j}}^{m} &= det(B_{\mathring{j}\mathring{j}})\cdot\prod_{k=\mathring{j}+1}^{m} det(u_{k+1})-\psi_{\mathring{j}}\cdot\prod_{k=\mathring{j}+2}^{m} det(u_{k+1})=det(B_{\mathring{j}\mathring{j}})\cdot\prod_{k=\mathring{j}+1}^{m} det(u_{k+1})-det(u_{k+2})\cdot\phi_{\mathring{j}}\cdot\prod_{k=\mathring{j}+2}^{m} det(u_{k+1})=\\ &= [det(B_{\mathring{j}\mathring{j}})-det(B_{\mathring{j}\mathring{j}})+det(u_{\mathring{j}+1})]\cdot\prod_{k=\mathring{j}+1}^{m} det(u_{k+1})=\prod_{k=\mathring{j}}^{m} det(u_{k+1}).\end{aligned}$$

Подставив также в правые части $(3.8)_{1)}$ и $(3.9)_{2)}$ соответствующие выражения для ${}_B\Delta_{\mathring{j}}^{m}$ и ${}_B\Delta_1^{\mathring{j}}$ из (3.5), получаем

$$\begin{aligned}[det(B)={}_B\Delta_1^{m}] &= \frac{1}{det(\hat{u}_{\mathring{j}-1})}\cdot\left[\prod_{k=\mathring{j}}^{m}\frac{det(\hat{u}_{k-1})}{det(u_{k+1})}+\phi_{\mathring{j}}\right]\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}} det(\hat{u}_{k-1})\cdot\prod_{k=\mathring{j}+1}^{m} det(u_{k+1})-\\ &- det(u_{\mathring{j}+2})\cdot\phi_{\mathring{j}}\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-1} det(\hat{u}_{k-1})\cdot\prod_{k=\mathring{j}+2}^{m} det(u_{k+1})=\left\{\left[\prod_{k=\mathring{j}}^{m}\frac{det(\hat{u}_{k-1})}{det(u_{k+1})}+\phi_{\mathring{j}}\right]\cdot\prod_{k=\mathring{j}+1}^{m} det(u_{k+1})-\right.\\ &\left.-\phi_{\mathring{j}}\cdot\prod_{k=\mathring{j}+1}^{m} det(u_{k+1})\right\}\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-1} det(\hat{u}_{k-1})=\prod_{k=\mathring{j}}^{m} det(\hat{u}_{k-1})\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-1} det(\hat{u}_{k-1})=\prod_{k=1}^{m} det(\hat{u}_{k-1}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[det(B)={}_B\Delta_1^{m}] &= \frac{1}{det(u_{\mathring{j}+2})}\cdot\left[\prod_{k=1}^{\mathring{j}+1}\frac{det(u_{k+1})}{det(\hat{u}_{k-2})}+\hat{\phi}_{\mathring{j}+1}\right]\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}} det(\hat{u}_{k-1})\cdot\prod_{k=\mathring{j}+1}^{m} det(u_{k+1})-\\ &- det(\hat{u}_{\mathring{j}-1})\cdot\hat{\phi}_{\mathring{j}+1}\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}-1} det(\hat{u}_{k-1})\cdot\prod_{k=\mathring{j}+2}^{m} det(u_{k+1})=\left\{\left[\prod_{k=1}^{\mathring{j}+1}\frac{det(u_{k+1})}{det(\hat{u}_{k-2})}+\hat{\phi}_{\mathring{j}+1}\right]\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}} det(\hat{u}_{k-1})-\right.\\ &\left.-\phi_{\mathring{j}+1}\cdot\prod_{k=1}^{\mathring{j}} det(\hat{u}_{k-1})\right\}\cdot\prod_{k=\mathring{j}+2}^{m} det(u_{k+1})=\prod_{k=1}^{\mathring{j}+1} det(u_{k+1})\cdot\prod_{k=\mathring{j}+2}^{m} det(u_{k+1})=\prod_{k=1}^{m} det(u_{k+1}).\end{aligned}$$

Итак, мы проверили $(3.8)_{1)}$ и $(3.9)_{2)}$. Оставшиеся два равенства $(3.8)_{2)}$ и $(3.9)_{1)}$ проверяются аналогично. Из равенств (3.8) и (3.9) следуют, как нетрудно убедиться, соответственно равенства

$$\prod_{k=\xi}^{m}\frac{det(\hat{u}_{k-1})}{det(u_{k+2})}=\frac{det(\mathbb{B})}{\Delta^{\xi-1}_{B\,1}\cdot\Delta^{m}_{B\,\xi+1}}=\prod_{k=1}^{\xi}\frac{det(u_{k+1})}{det(\hat{u}_{k-2})}, \tag{3.17}$$

для любого ξ из $1\le\xi\le m$. <u>Теорема доказана.</u>

<u>Следствие I</u> (из Теоремы 3). Как видно из (3.5)÷(3.II), ведущие угловые блочные миноры и определитель блочной матрицы $\mathbb{B}$ любого из видов (3.I)÷(3.4) вычисляются непосредственно через матрицы-блоки $\{\mathbb{B}_{k-1k}, \mathbb{B}_{kk}, \mathbb{B}_{kk+1}\}$ – трех ее ведущих блочных диагоналей с использованием матриц (3.II).

4. <u>Индуцированные матрицы и их роль в решении проблем полной факторизации и вычисления ведущих блочных угловых миноров, отдельные из которых обращаются в нуль, блочно-трехдиагональных матриц</u>

Выше были рассмотрены различные методы вычисления ведущих блочных угловых миноров, ни один из которых не равен нулю, и определителя блочно-трехдиагональных и факторизованных матриц, которые (как показано, см., например, [3]) являются взаимно обратными.

При этом выше, во введении, для трехдиагональных матриц были уже приведены различные способы вычисления указанных матричных характеристик, и без всяких ограничений на их поведение. В предыдущих работах этой серии, в частности в [6], нами уже по сути был указан способ вычисления любых из этих характеристик и для блочно-трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I), когда некоторые из их ведущих блочных угловых миноров обращаются в нуль.

Настоящий раздел посвящен более подробному изучению этой проблемы. При этом мы существенно опираемся на понятие индуцированных матриц.

Индуцированными (≡ порождаемыми) матрицами мы называем [6] средние матрицы-сомножители в представлениях $\mathbb{C}$ (I.I), которые содержат нетождественную информацию о значении их ведущих блочных угловых миноров.

Согласно этому определению, если у блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}$ (I.I) ни один из ведущих блочных угловых миноров не обращается в нуль, то индуцированными будут блочно-диагональные матрицы

$$\omega=diag\{\bar{\Lambda}_2,\bar{\Lambda}_3,\ldots,\bar{\Lambda}_m,\bar{\Lambda}_{m+1}\} \quad\text{и}\quad \hat{\omega}=diag\{\bar{\xi}_0,\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_{m-2},\bar{\xi}_{m-1}\} \tag{4.I}$$

в силу представлений (I.8)÷(I.II).

Если обращаются в нуль лишь по одному (например, $(k-1)$ -верхний или $(k+1)$ -нижний) из ведущих блочных угловых миноров (т.е. $det(\bar{\Lambda}_k)=0$ или $det(\bar{\xi}_k)=0$), то индуцированные матрицы обретают вид

$$\begin{cases} \omega(\bar\Lambda)=diag\{\bar\Lambda_2,\bar\Lambda_3,\dots,\bar\Lambda_{k-1},[\mathfrak{M}_{\bar\Lambda_k}],\bar\Lambda_{k+3},\dots,\bar\Lambda_{m+1}\}, \text{ где } \mathfrak{M}_{\bar\Lambda_k}=\begin{bmatrix}\bar\Lambda_k & r_k & \mathbb{O}\\ p_k & (q_k-\bar\theta_k) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{k+1}\end{bmatrix},\\ \hat\omega(\bar G)=diag\{\bar G_0,\bar G_1,\dots,\bar G_{k-3},[\mathfrak{M}_{\bar G_k}],\bar G_{k-1},\dots,\bar G_{m-1}\}, \text{ где } \mathfrak{M}_{\bar G_k}=\begin{bmatrix}q_{k-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_k-\hat\theta_k) & r_{k+1}\\ \mathbb{O} & p_{k+1} & \bar G_k\end{bmatrix}, \end{cases} \quad (4.2)$$

согласно представлениям (I.I2)÷(I.I5).

Если же имеют место (см. введение) условия $[\mathrm{I}_{\mathrm{I})}$ либо $\mathrm{I}_{2)}]$ или $[\mathrm{II}_{\mathrm{I})}$ либо $\mathrm{II}_{2)}]$, то согласно представлениям I57(I57′)÷I60(I60′) из [6] индуцированные матрицы имеют вид

$$\begin{cases} \omega(\bar\Lambda)=diag\{\bar\Lambda_2,\dots,\bar\Lambda_{k-1},[\mathfrak{M}_{\bar\Lambda_k,\bar\Lambda_{k+3}}],\bar\Lambda_{k+6},\dots,\bar\Lambda_{m+1}\} & \underline{\text{при условии}}\ \mathrm{I}_{2)};\\ \hat\omega(\bar G)=diag\{\bar G_0,\dots,\bar G_{k-6},[\mathfrak{M}_{\bar G_{k-3},\bar G_k}],\bar G_{k+1},\dots,\bar G_{m-1}\} & \underline{\text{при условии}}\ \mathrm{I}_{\mathrm{I})}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где

$$\mathfrak{M}_{\bar\Lambda_k,\bar\Lambda_{k+3}}=\begin{bmatrix} \bar\Lambda_k & r_k & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ p_k & (q_k-\bar U_k) & \mathbb{O} & (\bar\psi_{k+2}) & (-B_{k+2}\cdot r_{k+3}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{k+1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (\bar\varphi_{k+2}) & \mathbb{O} & \bar\Lambda_{k+3} & r_{k+3} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-p_{k+3}\cdot\bar A_{k+2}) & \mathbb{O} & p_{k+3} & (q_{k+3}-\bar\theta_{k+3}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{k+4} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{M}_{\bar G_{k-3},\bar G_k}=\begin{bmatrix} q_{k-4} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_{k-3}-\hat{\hat\theta}_{k-3}) & r_{k-2} & \mathbb{O} & (-r_{k-2}\cdot\hat{\hat B}_{k-2}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & p_{k-2} & \bar G_{k-3} & \mathbb{O} & (\hat{\hat\psi}_{k-2}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{k-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-\hat{\hat A}_{k-2}\cdot p_{k-2}) & (\hat{\hat\varphi}_{k-2}) & \mathbb{O} & (q_k-\hat{\hat U}_k) & r_{k+1}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & p_{k+1} & \bar G_k \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Здесь $\bar\theta_{k+3}$, $\hat{\hat\theta}_{k-3}$ – определены в виде (I.I5), (I.I3) соответственно, а

$$\begin{cases} \bar\varphi_{k+2}=(q_{k+2}-\bar\Lambda_{k+3})\cdot\bar A_{k+2},\ \bar\psi_{k+2}=\bar B_{k+2}\cdot(q_{k+2}-\Lambda_{k+3}),\ \bar B_{k+1}=r_{k+1},\ \bar B_{k+2}=-r_{k+1}\cdot r_{k+2},\\ \bar A_{k+1}=p_{k+1},\ \bar A_{k+2}=-p_{k+2}\cdot p_{k+1},\ \bar U_k=r_{k+1}\cdot[q_{k+1}+r_{k+2}(q_{k+2}+p_{k+3}\cdot r_{k+3})\cdot p_{k+2}]\cdot p_{k+1}; \end{cases} \quad (4.5)$$

<u>При этом</u> $(q_{k+3}-\bar\theta_{k+3})=\bar G_{k+2}$, если $\{det(\bar G_j)\neq 0\}_{j=k+1}^{m-1}$.

$$\begin{cases} \hat{\hat\psi}_{k-2}=(q_{k-2}-\bar G_{k-3})\cdot\hat{\hat B}_{k-2},\ \hat{\hat\varphi}_{k-2}=\hat{\hat A}_{k-2}\cdot(q_{k-2}-\bar G_{k-3}),\ \hat{\hat A}_{k-2}=-p_k\cdot p_{k-1},\ \hat{\hat A}_{k-1}=p_k,\\ \hat{\hat B}_{k-2}=-r_{k-1}\cdot r_k,\ \hat{\hat B}_{k-1}=r_k,\ \hat{\hat U}_k=p_k\cdot[q_{k-1}+p_{k-1}\cdot(q_{k-2}+r_{k-1}\cdot p_{k-1})\cdot r_{k-1}]\cdot r_k; \end{cases} \quad (4.6)$$

<u>При этом</u> $(q_{k-3}-\hat{\hat\theta}_{k-3})=\bar\Lambda_{k-2}$, если $\{det(\bar\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1}$.

<u>Или</u>

$$\begin{cases} \omega(\bar\Lambda)=diag\{\bar\Lambda_2,\dots,\bar\Lambda_{k-1},[\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda_k,\bar\Lambda_l}],\bar\Lambda_{l+3},\dots,\bar\Lambda_{m+1}\} & \underline{\text{при условии}}\ \mathrm{II}_{2)};\\ \hat\omega(\bar G)=diag\{\bar G_0,\dots,\bar G_{l-3},[\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar G_l,\bar G_k}],\bar G_{k+1},\dots,\bar G_{m-1}\} & \underline{\text{при условии}}\ \mathrm{II}_{\mathrm{I})}, \end{cases} \quad (4.7)$$

где

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda_k,\bar\Lambda_l}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\bar\Lambda_k & r_k\\ p_k & (q_k-\bar{\bar U}_k)\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ (\bar\psi_{l-1}) & (-B_{l-1}\cdot r_l)\end{bmatrix}\\ & q_{k+1} & \\ \mathbb{O} & \bar\Lambda_{k+3}\ \ddots\ \bar\Lambda_{l-1} & \mathbb{O}\\ \begin{bmatrix}\mathbb{O} & (\varphi_{l-1})\\ \mathbb{O} & (-p_l\cdot\bar A_{l-1})\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\bar\Lambda_l & r_l\\ p_l & (q_l-\bar\theta_l)\end{bmatrix}\\ & & q_{l+1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar G_l,\bar G_k}=\begin{bmatrix} q_{l-1} & & \\ \begin{bmatrix}(q_l-\hat{\hat\theta}_l) & r_{l+1}\\ p_{l+1} & \bar G_l\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}(-r_{l+1}\cdot\hat{\hat B}_{l+1}) & \mathbb{O}\\ (\hat{\hat\psi}_{l+1}) & \mathbb{O}\end{bmatrix}\\ \mathbb{O} & \bar G_{l+1}\ \ddots\ \bar G_{k-3} & \mathbb{O}\\ & q_{k-3} & \\ \begin{bmatrix}(-\hat{\hat A}_{l+1}\cdot p_{l+1}) & (\hat{\hat\varphi}_{l+1})\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}(q_k-\hat{\hat U}_k) & r_{k+1}\\ p_{k+1} & \bar G_k\end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} \text{Здесь } [\bar\Psi_{\ell-1}, \bar\varphi_{\ell-1}, \bar\theta_\ell] \text{ – определены в (4.5),} \\ \bar B_{\ell-1} = z_{k+1}\cdot\prod\limits_{z=k+2}^{\ell-1}\bar c_z,\ \bar A_{\ell-1}=\prod\limits_{z=k+2}^{\ell-1}\bar\beta_z\cdot \rho_{k+1},\ \bar{\bar U}_k = \bar B_{\ell-1}(2q_{\ell-1}-\bar\Lambda_\ell)\cdot\bar A_{\ell-1} + \sum\limits_{z=k+1}^{\ell-2}(\bar B_z\cdot\bar\Lambda_{z+1}\bar A_z). \quad (4.9) \\ \text{При этом } (q_\ell-\bar\theta_\ell)=\bar G_{\ell-1}, \text{ если } \{\det(\bar G_z)\neq 0\}_{z=\ell}^{m-1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\hat{\bar\Psi}_{\ell+1},\hat{\bar\varphi}_{\ell+1},\hat{\bar\theta}_\ell] \text{ – определены в (4.6), } \hat{\bar A}_{\ell+1}=\rho_k\cdot\prod\limits_{z=\ell+2}^{k-1}\hat{\bar c}_z,\ \hat{\bar B}_{\ell+1}=\prod\limits_{z=\ell+2}^{k-1}\hat{\bar\beta}_z\cdot z_k, \\ \hat{\bar U}_k = \hat{\bar A}_{\ell+1}(2q_{\ell+1}-\bar G_\ell)\hat{\bar B}_{\ell+1}+\sum\limits_{z=\ell+2}^{k-1}(\hat A_z\cdot\bar G_z\cdot\hat B_{z-1}). \text{ При этом } (q_\ell-\hat{\bar\theta}_\ell)=\bar\Lambda_{\ell+1}, \text{ если } \{\det(\bar\Lambda_z)\neq 0\}_{z=2}^{\ell}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Отметим также, что для характерных матриц $\mathfrak{M}_{\bar\Lambda_k,\bar\Lambda_{k+3}}$, $\mathfrak{M}_{\bar G_{k-3},\bar G_k}$, $\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda_k,\bar\Lambda_\ell}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar G_\ell,\bar G_k}$ (4.4)÷(4.10), входящих в виде блоков в соответствующие индуцированные матрицы (4.3) и (4.7), были получены [6] (в силу Лемм 10,11 [6]) следующие матричные факторизованные представления.

При условии $I_{2)}$ При условии $I_{1)}$

$$\mathfrak{M}_{\bar\Lambda_k,\bar\Lambda_{k+3}} = \begin{bmatrix} E_k & & & \\ \vec 0 & E_{k+1} & & \\ (\xi_{k+2}) & \vec 0^T & E_{k+3} & \\ & & \vec 0 & E_{k+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_k & & & \\ & q_{k+1} & & \\ & & \varepsilon_{k+3} & \\ & & & q_{k+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k & \vec 0^T & (\mu_{k+2}) & \\ & E_{k+1} & \vec 0 & \\ & & E_{k+3} & \\ & & & E_{k+4} \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{M}_{\bar G_{k-3},\bar G_k} = \begin{bmatrix} E_{k-4} & \vec 0 & & \\ & E_{k-3} & \vec 0^T & (\hat\mu_{k-2}) \\ & & E_{k-1} & \\ & & & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{k-4} & & & \\ & \hat\varepsilon_{k-3} & & \\ & & q_{k-1} & \\ & & & Q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k-4} & & & \\ \vec 0^T & E_{k-3} & & \\ & \vec 0 & E_{k-1} & \\ & (\hat\xi_{k-2}) & \vec 0^T & E_k \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

, где

$$\begin{cases} \xi_{k+2}=(V_{k+2}\cdot Q_k^{-1}),\ \mu_{k+2}=(Q_k^{-1}\cdot W_{k+2}),\ \varepsilon_{k+3}=(Q_{k+3}-V_{k+2}\cdot Q_k^{-1}\cdot W_{k+2}), \\ \hat\xi_{k-2}=(\hat Q_k^{-1}\cdot\hat V_{k-2}),\ \hat\mu_{k-2}=(\hat W_{k-2}\cdot\hat Q_k^{-1}),\ \hat\varepsilon_{k-3}=(Q_{k-3}-\hat W_{k-2}\hat Q_k^{-1}\hat V_{k-2}),\ \vec 0=(0,0),\ T \text{ – знак} \end{cases} \quad (4.12)$$

транспонирования. При этом $\det(\hat Q_k)\neq 0\neq \det(Q_k)$, $\det(\varepsilon_{k+3})\neq 0\neq \det(\varepsilon_{k-3})$.

При условии $\Pi_{2)}$ При условии $\Pi_{1)}$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda_k,\bar\Lambda_\ell} = \begin{bmatrix} E_k & & & & \\ & E_{k+1} & & & \\ \mathbb{O} & & \ddots\ E_{\ell-1} & & \\ (\tilde\xi_{\ell-1}) & \mathbb{O} & & E_\ell & \\ & & & & E_{\ell+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde Q_k & & & & & & \\ & q_{k+1} & & & & & \\ & & \bar\Lambda_{k+3} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \bar\Lambda_{\ell-1} & & \\ & & & & & \tilde\varepsilon_\ell & \\ & & & & & & q_{\ell+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k & \mathbb{O} & (\tilde\mu_{\ell-1}) & & \\ & E_{k+1} & \mathbb{O} & & \\ & & \ddots\ E_{\ell-1} & & \\ & & & E_\ell & \\ & & & & E_{\ell+1} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar G_\ell,\bar G_k} = \begin{bmatrix} E_{\ell-1} & & & & \\ & E_\ell & \mathbb{O} & (\hat{\tilde\mu}_{\ell+1}) & \\ & & E_{\ell+1}\ \ddots & \mathbb{O} & \\ & & & E_{k-1} & \\ & & & & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\ell-1} & & & & & \\ & \hat{\tilde\varepsilon}_\ell & & & & \\ & & \bar G_{\ell+1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \bar G_{k-3} & \\ & & & & & \hat{\tilde Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\ell-1} & & & & \\ & E_\ell & & & \\ & \mathbb{O} & E_{\ell+1}\ \ddots & & \\ & & & E_{k-1} & \\ & (\hat{\tilde\xi}_{\ell+1}) & \mathbb{O} & & E_k \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{cases} \tilde\xi_{\ell-1}=(V_{\ell-1}\cdot\tilde Q_k^{-1}),\ \tilde\mu_{\ell-1}=(\tilde Q_k^{-1}\cdot W_{\ell-1}),\ \tilde\varepsilon_\ell=(\tilde Q_\ell-\tilde V_{\ell-1}\cdot\tilde Q_k^{-1}\cdot W_{\ell-1}), \\ \hat{\tilde\xi}_{\ell+1}=(\hat{\tilde Q}_k^{-1}\cdot\hat{\tilde V}_{\ell+1}),\ \hat{\tilde\mu}_{\ell+1}=(\hat{\tilde W}_{\ell+1}\cdot\hat{\tilde Q}_k^{-1}),\ \hat{\tilde\varepsilon}_\ell=(\hat{\tilde Q}_\ell-\hat W_{\ell+1}\cdot\hat{\tilde Q}_k^{-1}\cdot\hat{\tilde V}_{\ell+1}),\ \mathbb{O} \text{ – тождественно нуле-} \end{cases} \quad (4.14)$$

вая матрица. При этом $\det(\tilde Q_k)\neq 0\neq \det(\hat{\tilde Q}_k)$, $\det(\tilde\varepsilon_\ell)\neq 0\neq \det(\hat{\tilde\varepsilon}_\ell)$.

При обращении в нуль одновременно более чем двух однотипных ведущих блочных угловых миноров матрицы $\mathbb{C}$ (1.1), рассмотренные выше блочно-диагональные матрицы обретают более сложный вид, чем (4.2)÷(4.10), т.е.

$$\begin{cases} \omega(\bar{\Lambda}) = diag\{\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}, \ldots, \bar{\Lambda}, [\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}], \bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}, \ldots, \bar{\Lambda}\}, \\ \hat{\omega}(\bar{G}) = diag\{\bar{G}, \bar{G}, \ldots, \bar{G}, [\mathfrak{M}_{\bar{G}}], \bar{G}, \bar{G}, \ldots, \bar{G}\}, \end{cases} \text{ где} \qquad (4.15)$$

характерные матрицы $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}, \mathfrak{M}_{\bar{G}}$ (в соответствии с представлениями для $\mathbb{C}$ (I.I), полученными в [5]) являются блочно-трехдиагональными соответствующего порядка.

Теперь, воспользовавшись свойствами индуцированных матриц $\omega(\bar{\Lambda})$ и $\hat{\omega}(\bar{G})$, покажем справедливость следующей теоремы.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трехдиагональная матрица общего вида (I.I), с прямоугольными элементами блоками $\{z_k, p_k\}_{k=2}^m$ и диагональными квадратными блоками $\{q_k\}_{k=1}^m$, имеющими в общем случае разные размерности. Пусть также один или два из однотипных ведущих блочных угловых миноров у $\mathbb{C}$ (I.I) обращаются в нуль. Тогда любые ее ведущие блочные угловые миноры, т.е. Δ_1^j (верхние) и Δ_j^m (нижние) и Δ_1^m – определитель могут быть найдены с использованием следующих представлений:

<u>Представления</u> (мультипликативные) для ведущих блочных угловых миноров и определителя

I. (при $[det(\bar{\Lambda}_k)=0$ для любого фиксированного k из $3 \le k \le m-1]$ либо $[det(\bar{G}_k)=0$ для любого фиксированного k из $2 \le k \le m-2]$)

$$\begin{cases} \Delta_1^j = \prod\limits_{z=1}^{k-1} det(\bar{\Lambda}_z) \cdot det(\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}_k}) \cdot \prod\limits_{z=k+3}^{j+1} det(\bar{\Lambda}_z); \ \Delta_1^{k-1} = 0, \ det(\bar{\Lambda}_1) = 1, \ j = 1, 2, \ldots, m, \\ \Delta_j^m = \prod\limits_{z=k+1}^{m} det(\bar{G}_z) \cdot det(\mathfrak{M}_{\bar{G}_k}) \cdot \prod\limits_{z=j-1}^{k-3} det(\bar{G}_z); \ \Delta_{k+1}^m = 0, \ det(\bar{G}_m) = 1, \ j = m, m-1, \ldots, 1, \\ \left\{ \prod\limits_{z=1}^{k-1} det(\bar{\Lambda}_z) \cdot det(\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}_k}) \cdot \prod\limits_{z=k+3}^{m+1} det(\bar{\Lambda}_z) = [det(\mathbb{C}) = \Delta_1^m] = \prod\limits_{z=k+1}^{m} det(\bar{G}_z) \cdot det(\mathfrak{M}_{\bar{G}_k}) \cdot \prod\limits_{z=0}^{k-3} det(\bar{G}_z) \right\}, \end{cases} \qquad (4.16)$$

где матрицы $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}_k}$, $\mathfrak{M}_{\bar{G}_k}$ – определены в (4.2).

2. (<u>при условии I</u>)

$$\begin{cases} \Delta_1^j = \prod\limits_{z=1}^{k-1} det(\bar{\Lambda}_z) \cdot [det(\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}_k, \bar{\Lambda}_{k+3}})] \cdot \prod\limits_{z=k+6}^{j+1} det(\bar{\Lambda}_z); \ \Delta_1^{k-1} = 0 = \Delta_1^{k+2}, \ det(\bar{\Lambda}_1) = 1, \ j = 1, \ldots, m, \\ \Delta_j^m = \prod\limits_{z=k+1}^{m} det(\bar{G}_z) \cdot [det(\mathfrak{M}_{\bar{G}_{k-3}, \bar{G}_k})] \cdot \prod\limits_{z=j-1}^{k-6} det(\bar{G}_z); \ \Delta_{k+1}^m = 0 = \Delta_{k-2}^m, \ det(\bar{G}_m) = 1, \ j = m, \ldots, 1, \\ \left\{ \prod\limits_{z=1}^{k-1} det(\bar{\Lambda}_z) \cdot [det(\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}_k, \bar{\Lambda}_{k+3}})] \cdot \prod\limits_{z=k+6}^{m+1} det(\bar{\Lambda}_z) = [\Delta_1^m = det(\mathbb{C})] = \right. \\ \qquad \left. = \prod\limits_{z=k+1}^{m} det(\bar{G}_z) \cdot [det(\mathfrak{M}_{\bar{G}_{k-3}, \bar{G}_k})] \cdot \prod\limits_{z=0}^{k-6} det(\bar{G}_z) \right\}, \end{cases} \qquad (4.17)$$

где

$$\begin{cases} det(\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}_k, \bar{\Lambda}_{k+3}}) \overset{(4.11)}{=\!=} det(Q_k) \cdot det(q_{k+1}) \cdot det(\mathcal{E}_{k+3}) \cdot det(q_{k+4}), \\ det(\mathfrak{M}_{\bar{G}_{k-3}, \bar{G}_k}) \overset{(4.11)}{=\!=} det(\hat{Q}_k) \cdot det(q_{k-1}) \cdot det(\hat{\mathcal{E}}_{k-3}) \cdot det(q_{k-4}), \end{cases} \qquad (4.18)$$

где матрицы $[Q_k, \mathcal{E}_{k+3}]$ и $[\hat{Q}_k, \hat{\mathcal{E}}_{k-3}]$ определены в (4.I2).

3. (<u>при условии П</u>)

$$\begin{cases} \Delta_1^j = \prod_{\zeta=1}^{k-1} \det(\bar{\Lambda}_\zeta)\cdot[\det(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar{\Lambda}_k,\bar{\Lambda}_l})]\cdot\prod_{\zeta=l+3}^{j+1} \det(\bar{\Lambda}_\zeta), \ \Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{l-1}, \det(\bar{\Lambda}_1)=1, \ j=1,\dots,m, \\ \Delta_j^m = \prod_{\zeta=k+1}^{m} \det(\bar{G}_\zeta)[\det(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar{G}_k,\bar{G}_l})]\cdot\prod_{\zeta=j-1}^{l-3} \det(\bar{G}_\zeta), \ \Delta_{k+1}^m=0=\Delta_{l+1}^m, \det(\bar{G}_m)=1, \ j=m,\dots,1, \quad (4.19) \\ \quad \left\{ \prod_{\zeta=1}^{k-1}\det(\bar{\Lambda}_\zeta)\cdot[\det(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar{\Lambda}_k,\bar{\Lambda}_l})]\cdot\prod_{\zeta=l+3}^{m+1}\det(\bar{\Lambda}_\zeta) = [\det(\mathfrak{C})=\Delta_1^m] = \right. \\ \qquad \left. = \prod_{\zeta=k+1}^{m}\det(\bar{G}_\zeta)[\det(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar{G}_k,\bar{G}_l})]\cdot\prod_{\zeta=0}^{l-3}\det(\bar{G}_\zeta) \right\}, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \det(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar{\Lambda}_k,\bar{\Lambda}_l}) \overset{(4.13)}{=\!=\!=} \det(\widetilde{Q}_k)\cdot\det(q_{k+1})\cdot\prod_{\zeta=k+3}^{l-1}\det(\bar{\Lambda}_\zeta)\cdot\det(\widetilde{\mathcal{E}}_l)\cdot\det(q_{l+1}) \quad (4.20) \\ \det(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\bar{G}_k,\bar{G}_l}) \overset{(4.13)}{=\!=\!=} \det(\hat{\widetilde{Q}}_k)\cdot\det(q_{k-1})\cdot\prod_{\zeta=l+1}^{k-3}\det(\bar{G}_\zeta)\cdot\det(\hat{\widetilde{\mathcal{E}}}_l)\cdot\det(q_{l-1}), \end{cases}$$

где соответствующие матрицы $[\widetilde{Q}_k, \widetilde{\mathcal{E}}_l]$ и $[\hat{\widetilde{Q}}_k, \hat{\widetilde{\mathcal{E}}}_l]$ определены в (4.I3).
При этом имеют место следующие утверждения:

I°. $[\det(\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}_k}) \neq 0 \neq \det(\mathfrak{M}_{\bar{G}_k})], [\det(\hat{Q}_k) \neq 0 \neq \det(Q_k), \det(\mathcal{E}_{k+3}) \neq 0 \neq \det(\hat{\mathcal{E}}_{k-3})],$
$[\det(\widetilde{Q}_k) \neq 0 \neq \det(\hat{\widetilde{Q}}_k), \det(\widetilde{\mathcal{E}}_l) \neq 0 \neq \det(\hat{\widetilde{\mathcal{E}}}_l)].$ (4.2I)

2°. Если $[\det(\bar{\Lambda}_{m+1})=0$ и (либо) $\det(\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}})=0]$ либо $[\det(\bar{G}_0)=0$ и (либо) $\det(\mathfrak{M}_{\bar{G}})=0]$, то $\det(\mathfrak{C})=0$, т.е. $\mathfrak{C}$ – вырожденная матрица, (4.22)
где $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}, \mathfrak{M}_{\bar{G}}$ – соответствующие характерные матрицы в (4.I6)÷(4.20).

<u>Доказательство</u> теоремы является (в соответствующих случаях) прямым следствием свойств индуцированных блочно-диагональных матриц (4.2)÷(4.I4) с учетом Лемм I0 и II из [6]. Поэтому мы на нем не останавливаемся. <u>Теорема доказана</u>.

<u>Замечание 3</u>. Пусть теперь в нуль обращаются одновременно более чем два из ведущих однотипных блочных угловых миноров матрицы $\mathfrak{C}$ (I.I), т.е. индуцированная матрица имеет характерный квазитрехдиагональный вид (4.I5) (см., например,[5]). Тогда для соответствующих факторизаций и вычисления ведущих блочных угловых миноров и определителя этих индуцированных матриц и, следовательно, самой матрицы $\mathfrak{C}$ (I.I) можно ввести в рассмотрение новые последовательности $\{\bar{\bar{\Lambda}}, \bar{\bar{G}}\}$ типа $\{\bar{\Lambda}, \bar{G}\}$ (I.7)÷(I.8).

Существование и определенность новых процессов $\{\bar{\bar{\Lambda}}, \bar{\bar{G}}\}$, а также отсутствие вырожденных матриц $\{$т.е. $\det(\bar{\bar{\Lambda}}_k) \neq 0$ либо $\det(\bar{\bar{G}}_k) \neq 0\}$ в этих процессах обеспечивается следующим утверждением.

<u>Теорема 5</u>. Пусть $\mathfrak{C}$ (I.I) - любая <u>невырожденная</u> блочно-трехдиагональная матрица общего вида $\mathfrak{C}$ (I.I), у которой обращаются в нуль один или одновременно несколько однотипных ведущих блочных угловых миноров. Тогда: <u>Во-первых</u>, соответствующие индуцированные матрицы $\omega(\bar{\Lambda})$, $\hat{\omega}(\bar{G})$ являются невырожденными. <u>Во-вторых</u>, для невырожденных (в общем случае

блочно-трехдиагональных) характерных матриц $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}, \mathfrak{M}_{\bar{\bar{G}}}$ при наличии у $\mathbb{C}$(I.I) двух и более нулевых однотипных блочных угловых миноров существуют полностью определенные[x)] матричные факторизованные представления вида (I.8)÷(I.II), т.е.

Представление $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}$ (если $det(\bar{\Lambda}_{k+3(n-1)})=0$ для любого k из $3\le k\le[k+3(n-1)]\le N\le m-1$, $n=1,2,\ldots,\frac{N-k}{3}+1$)

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}_k & & & \\ (-\bar{\bar{\beta}}_{k+1})\mathbb{E}_{k+1} & & & \\ & --- & & \\ & & (-\bar{\bar{\beta}}_N)\mathbb{E}_N & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\bar{\Lambda}}_{k+1} & & & \\ & \bar{\bar{\Lambda}}_{k+2} & & \\ & & --- & \\ & & & \bar{\bar{\Lambda}}_{N+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{E}_k(-\bar{\bar{C}}_{k+1}) & & & \\ & \mathbb{E}_{k+1}(-\bar{\bar{C}}_{k+2}) & & \\ & & \mathbb{E}_{N-1}(-\bar{\bar{C}}_N) & \\ & & & \mathbb{E}_N\end{bmatrix}=\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}=\begin{bmatrix} \bar{\bar{q}}_k & \bar{\bar{z}}_{k+1} & & \\ \bar{\bar{P}}_{k+1} & \bar{\bar{q}}_{k+1} & \bar{\bar{z}}_{k+2} & \\ & --- & --- & --- \\ & \bar{\bar{P}}_{N-1} & \bar{\bar{q}}_{N-1} & \bar{\bar{z}}_N \\ & & \bar{\bar{P}}_N & \bar{\bar{q}}_N \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

где

$$\left\{\bar{\bar{\beta}}_{j+1}=-(\bar{\bar{P}}_{j+1}\cdot\bar{\bar{\Lambda}}_{j+1}^{-1}),\ \bar{\bar{C}}_{j+1}=-(\bar{\bar{\Lambda}}_{j+1}^{-1}\cdot\bar{\bar{z}}_{j+1})\right\}_{j=k}^{N-1};\ \bar{\bar{\Lambda}}_{j+1}=\bar{\bar{q}}_j-\bar{\bar{P}}_j\cdot\bar{\bar{\Lambda}}_j^{-1}\cdot\bar{\bar{z}}_j,\ \bar{\bar{\Lambda}}_{k+1}=\bar{\bar{q}}_k,\ j=k+1,\ldots,N. \tag{4.24}$$

Здесь элементы-блоки определены в виде [5]

$$\bar{\bar{q}}_k=\begin{bmatrix}\bar{\Lambda}_k & z_k & \mathbb{O}\\ P_k & (q_k-\bar{U}_k) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{k+1}\end{bmatrix},\ \bar{\bar{q}}_{k+1}=\begin{bmatrix}\bar{\Lambda}_{k+3} & z_{k+3} & \mathbb{O}\\ P_{k+3} & (q_{k+3}-\bar{U}_{k+3}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{k+4}\end{bmatrix},\ldots,\ \bar{\bar{q}}_N=\begin{bmatrix}\bar{\Lambda}_N & z_N & \mathbb{O}\\ P_N & (q_N-\bar{\Theta}_N) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{N+1}\end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

$$\bar{\bar{P}}_{k+1}=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & (\bar{\varphi}_{k+2}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-P_{k+3}\cdot\bar{A}_{k+2}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix},\ \bar{\bar{P}}_{k+2}=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & (\bar{\varphi}_{k+5}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-P_{k+6}\cdot\bar{A}_{k+5}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix},\ldots,\ \bar{\bar{P}}_N=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & (\bar{\varphi}_{N-1}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-P_N\cdot\bar{A}_{N-1}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

$$\bar{\bar{z}}_{k+1}=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ (\bar{\Psi}_{k+2}) & (-\bar{B}_{k+2}\cdot z_{k+3}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix},\ \bar{\bar{z}}_{k+2}=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ (\bar{\Psi}_{k+5}) & (-\bar{B}_{k+5}\cdot z_{k+6}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix},\ldots,\ \bar{\bar{z}}_N=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ (\bar{\Psi}_{N-1}) & (-\bar{B}_{N-1}\cdot z_N) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

Представление $\mathfrak{M}_{\bar{\bar{G}}}$ (если $det(\bar{\bar{G}}_{k-3(n-1)})=0$ для любого k из $2\le M\le[k-3(n-1)]\le k\le m-2$, $n=1,2,\ldots,\frac{k-M}{3}+1$)

$$\begin{bmatrix}\mathbb{E}_M(-\tilde{\bar{\beta}}_{M+1}) & & & \\ & \mathbb{E}_{M+1}(-\tilde{\bar{\beta}}_{M+2}) & & \\ & --- & & \\ & & \mathbb{E}_{k-1}(-\tilde{\bar{\beta}}_k) & \\ & & & \mathbb{E}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\bar{G}}_{M-1} & & & \\ & \bar{\bar{G}}_M & & \\ & & --- & \\ & & \bar{\bar{G}}_{k-2} & \\ & & & \bar{\bar{G}}_{k-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{E}_M & & & \\ (-\tilde{\bar{C}}_{M+1})\mathbb{E}_{M+1} & & & \\ & --- & & \\ & (-\tilde{\bar{C}}_{k-1})\mathbb{E}_{k-1} & & \\ & & (-\tilde{\bar{C}}_k)\mathbb{E}_k & \end{bmatrix}=\mathfrak{M}_{\bar{\bar{G}}}=\begin{bmatrix}\tilde{\bar{q}}_M & \tilde{\bar{z}}_{M+1} & & \\ \tilde{\bar{P}}_{M+1} & \tilde{\bar{q}}_{M+1} & \tilde{\bar{z}}_{M+2} & \\ & --- & --- & --- \\ & \tilde{\bar{P}}_{k-1} & \tilde{\bar{q}}_{k-1} & \tilde{\bar{z}}_k \\ & & \tilde{\bar{P}}_k & \tilde{\bar{q}}_k\end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

где

$$\left\{\tilde{\bar{\beta}}_{\mu+1}=-(\tilde{\bar{z}}_{\mu+1}\cdot\bar{\bar{G}}_\mu^{-1}),\ \tilde{\bar{C}}_{\mu+1}=-(\bar{\bar{G}}_\mu^{-1}\cdot\tilde{\bar{P}}_{\mu+1})\right\}_{\mu=M}^{k-1};\ \bar{\bar{G}}_{\mu-1}=\tilde{\bar{q}}_\mu-\tilde{\bar{z}}_{\mu+1}\cdot\bar{\bar{G}}_\mu^{-1}\cdot\tilde{\bar{P}}_{\mu+1},\ \bar{\bar{G}}_{k-1}=\tilde{\bar{q}}_k,\ \mu=k-1,\ldots,M. \tag{4.29}$$

Здесь элементы-блоки определены в виде [5]

$$\tilde{\bar{q}}_k=\begin{bmatrix}q_{k-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_k-\hat{U}_k) & z_{k+1}\\ \mathbb{O} & P_{k+1} & \bar{G}_k\end{bmatrix},\ \tilde{\bar{q}}_{k-1}=\begin{bmatrix}q_{k-4} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_{k-3}-\hat{U}_{k-3}) & z_{k-2}\\ \mathbb{O} & P_{k-2} & \bar{G}_{k-3}\end{bmatrix},\ldots,\ \tilde{\bar{q}}_M=\begin{bmatrix}q_{M-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_M-\hat{\Theta}_M) & z_{M+1}\\ \mathbb{O} & P_{M+1} & \bar{G}_M\end{bmatrix}, \tag{4.30}$$

$$\tilde{\bar{P}}_k=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-\hat{A}_{k-2}\cdot P_{k-2}) & (\hat{\bar{\varphi}}_{k-2})\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix},\ \tilde{\bar{P}}_{k-1}=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-\hat{A}_{k-5}\cdot P_{k-5}) & (\hat{\bar{\varphi}}_{k-5})\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix},\ldots,\ \tilde{\bar{P}}_{M+1}=\begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-\hat{A}_{M+1}\cdot P_{M+1}) & (\hat{\bar{\varphi}}_{M+1})\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}, \tag{4.31}$$

---

x) Имеется в виду, что все $\{det(\bar{\bar{\Lambda}}_{j+1})\neq 0\}_{j=k}^{N}$ и $\{det(\bar{\bar{G}}_{\mu-1})\neq 0\}_{\mu=k}^{M}$.

$$\tilde{\tilde{z}}_K = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (-z_{K-2}\cdot\hat{\mathbb{B}}_{K-2}) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\hat{\tilde{\Psi}}_{K-2}) & \mathbb{O} \end{bmatrix}, \tilde{\tilde{z}}_{K-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (-z_{K-5}\cdot\hat{\mathbb{B}}_{K-5}) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\hat{\tilde{\Psi}}_{K-5}) & \mathbb{O} \end{bmatrix}, \ldots, \tilde{\tilde{z}}_{M+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (-z_{M+1}\cdot\hat{\mathbb{B}}_{M+1}) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\hat{\tilde{\Psi}}_{M+1}) & \mathbb{O} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

В (4.25)÷(4.27), (4.30)÷(4.32), соответствующие матрицы $[\bar{U},\bar{\theta},\bar{A},\bar{B}]$ и $[\hat{\bar{U}},\hat{\bar{\theta}},\hat{\bar{A}},\hat{\bar{B}}]$ – определены в [5] в представлениях 70(70′) и 68(68′) соответственно, а $\{q, \rho, z\}$ – элементы-блоки исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I).

В-третьих, Если $\mathbb{C}$ (I.I) – трехдиагональная матрица, то, естественно, элементарные[x)] матрицы $\{\bar{\bar{q}}_j\}_{j=K}^{N}$ (4.25) и $\{\tilde{\tilde{q}}_\mu\}_{\mu=K}^{M}$ (4.30) являются невырожденными и $\{det(\bar{\bar{q}}_j) = (-z_j\cdot\rho_j)\cdot q_{j+1}\}_{j=K}^{N}$, а $\{det(\tilde{\tilde{q}}_\mu) = (-z_{\mu+1}\cdot\rho_{\mu+1})\cdot q_{\mu-1}\}_{\mu=K}^{M}$.

Доказательство первого утверждения теоремы является прямым следствием полученных матричных факторизаций вида $\mathbb{C}(\bar{\Lambda})$ либо $\mathbb{C}(\bar{G})$ (см., например, [5]) для невырожденной квазитрехдиагональной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). Справедливость второго утверждения теоремы, в случае обращения в нуль одного или одновременно двух (т.е. $[det(\bar{\Lambda}_K)=0$ или $det(\bar{\Lambda}_K)=0=det(\bar{\Lambda}_{K+3})]$ либо $[det(\bar{G}_K)=0$ или $det(\bar{G}_K)=0=det(\bar{G}_{K-3})]$) однотипных ведущих блочных угловых миноров матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), нами уже показана (см. Леммы IO и II в [6]). Пусть теперь в последовательностях $\{\bar{\Lambda}\}$(I.7) либо $\{\bar{G}\}$ (I.6) имеют место периодические вырождения (с периодом 3, который обусловлен леммой IO [6]и $det(\mathbb{C})\neq 0$) матриц, т.е.

$\{det(\bar{\Lambda}_K)=0, det(\bar{\Lambda}_{K+3})=0, det(\bar{\Lambda}_{K+6})=0, \ldots, det(\bar{\Lambda}_N)=0\}$, где $3 \le K, N \le m-1$,

$\{det(\bar{G}_K)=0, det(\bar{G}_{K-3})=0, det(\bar{G}_{K-6})=0, \ldots, det(\bar{G}_M)=0\}$, где $2 \le M, K \le m-2$.

Другими словами, в последовательностях (конечной длины N и M) $\{\bar{\Lambda}_K\}$ и $\{\bar{G}_K\}$ имеются периодически вырожденные матрицы.

Как видно из определения, у $\omega(\bar{\Lambda})$ и $\hat{\omega}(\bar{G})$– индуцированных матриц, содержащих квазитрехдиагональные блоки $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}$ и $\mathfrak{M}_{\bar{G}}$ в качестве своих характерных матриц, ведущие блочные угловые миноры совпадают с такими же ведущими блочными угловыми минорами исходной блочно-трехдиагональной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), поскольку другие ее факторизующие матрицы-множители на квазидиагоналях имеют единичные матрицы.

Из N равенств $\{det(\bar{\Lambda}_{K+3(n-1)})=0$, где $n=1,2,\ldots,\frac{N-K}{3}+1\}$ и M равенств $\{det(\bar{G}_{K-3(n-1)})=0$, где $n=1,2,\ldots,\frac{K-M}{3}+1\}$, следует, что N-верхних – $\Delta_1^{K+3(n-1)-1}$ и M – нижних – $\Delta_{K-3(n-1)+1}^{m}$ ведущих блочных угловых миноров матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) обращаются в нуль. В силу требования неособенности матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) и в соответствии с Леммой IO [6] в этом случае будут ненулевыми также соответственно ее N – верхних – $\Delta_1^{K+3(n-1)}$, где

x) Так были названы нами в работе [5] матрицы минимальной размерности, стоящие вдоль главной квазидиагонали характерных (в общем случае квазитрехдиагональных) матриц $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}$ и $\mathfrak{M}_{\bar{G}}$.

$n=1,2,\dots,\frac{N-K}{3}+1$ и M – нижних – $\Delta^{m}_{K-3(n-1)}$, где $n=1,2,\dots,\frac{K-M}{3}+1$ ведущих блочных угловых миноров и соответственно у индуцированных матриц $\omega(\bar{\Lambda})$ и $\hat{\omega}(\bar{G})$.

В силу Замечания 3 из [6] всегда можно выбрать в этом случае такое разбиение $\mathbb{C}$ (I.I), что матрицы q_n, входящие в диагональные блоки матриц $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}$ и $\mathfrak{M}_{\bar{G}}$ (4.23)÷(4.32), будут невырожденными. Следовательно, будут ненулевыми также N – верхних – $\Delta_1^{K+3(n-1)+1}$ и M – нижних – $\Delta^{m}_{K-3(n-1)-1}$ ведущих блочных угловых миноров как у $\mathbb{C}$ (I.I), так и у $\omega(\bar{\Lambda})$ и $\hat{\omega}(\bar{G})$. Итак, если выбрать теперь блочные разбиения характерных матриц $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}$ и $\mathfrak{M}_{\bar{G}}$ вида (4.25)÷(4.27) и (4.30)÷(4.32), то в силу отличия от нуля последних из указанных ведущих блочных угловых миноров матриц $\mathbb{C}$ (I.I) и $\omega(\bar{\Lambda}), \hat{\omega}(\bar{G})$, ведущие блочные угловые миноры характерных матриц $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}$ и $\mathfrak{M}_{\bar{G}}$ также будут ненулевыми. Это и обеспечивает существование и определенность <u>новых</u> последовательностей $\{\bar{\bar{\Lambda}}\}$ (4.24) и $\{\bar{\bar{G}}\}$ (4.29), а также разложений (4.23) и (4.28).

<u>Замечание 4</u>. Обратим еще раз особое внимание, что в общем случае невырожденных блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}$ (I.I) будут невырождены только матрицы $\bar{\bar{q}}_K=\bar{\bar{\Lambda}}_{K+1}$, $\tilde{\bar{q}}_K=\bar{\bar{G}}_{K-1}$, что следует из доказательства Леммы IO [6], т.е.

$$\left\{\left[\det(\bar{\bar{q}}_K)=\det(\bar{\bar{\Lambda}}_{K+1})\right]=\det\left(\begin{bmatrix}\bar{\Lambda}_K & r_K & \mathbb{O}\\ p_K & (q_K-\bar{U}_K) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{K+1}\end{bmatrix}\right)\neq 0\right\},\ \left\{\left[\det(\tilde{\bar{q}}_K)=\det(\bar{\bar{G}}_{K-1})\right]=\det\left(\begin{bmatrix}q_{K-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_K-\hat{\bar{U}}_K) & r_{K+1}\\ \mathbb{O} & p_{K+1} & \bar{G}_K\end{bmatrix}\right)\neq 0.\right.$$

Если же $\mathbb{C}$ (I.I) невырожденная трехдиагональная матрица, то <u>все</u> матрицы $\bar{\bar{q}}_n$ (4.25) и $\tilde{\bar{q}}_n$ (4.30) невырождены, поскольку соответствующие $\det(\bar{\Lambda})=\bar{\Lambda}=0$ и $\det(\bar{G})=\bar{G}=0$. <u>Теорема доказана</u>.

<u>Следствие 2</u>. К характерным матрицам $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}$ (4.23)÷(4.27) и $\mathfrak{M}_{\bar{G}}$ (4.28)÷(4.32) применима, естественно, Теорема 2. Используя теперь совместную комбинацию Теорем 2,4 и 5, легко (с учетом последовательностей $\{\bar{\bar{\Lambda}}$ и $\bar{\bar{G}}\}$ и явного вида матриц $\{\bar{\bar{q}}_3$ и $\tilde{\bar{q}}_3\}$) записать явный вид мультипликативных представлений для вычисления ведущих блочных угловых миноров, отдельные из которых обращаются в нуль, и определителя блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}$ (I.I). В силу очевидности теперь этих представлений мы не останавливаемся на них. Следует также отметить, что полученные в теореме результаты легко переносятся и на случай типа (4.8).

<u>Следствие 3</u>. Построение полностью определенного явного вида (4.23)÷(4.32) матричных факторизаций характерных матриц $\mathfrak{M}_{\bar{\Lambda}}$ и $\mathfrak{M}_{\bar{G}}$, в случае обращения в нуль двух и более однотипных ведущих блочных угловых миноров матриц $\mathbb{C}$ (I.I), приводит, как очевидно, к естественным матричным факторизациям матриц $\mathbb{C}$ (I.I) на основе естественно-элементарных матриц минимальной размерности. При этом нет необходимости прибегать к пере-

становкам строк и столбцов у исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). Последнее обстоятельство позволяет строить, как очевидно, естественные оптимальные методы обращения таких матриц и решения с ними систем уравнений.

Замечание 5. Вычислительная устойчивость и ограниченность величин $\{\overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{G}}\}$ и $\{\overline{\Lambda}, \overline{\Lambda}\}$ делают, очевидно, предпочтительными мультипликативные представления при вычислении ведущих блочных угловых миноров и определителя матриц $\mathbb{C}$ (I.I).

Полученные же выше соответствующие итерационные представления, в свою очередь, играют большую роль в аналитических исследованиях.

Заключение

I. Обобщены (Теорема I) полученные ранее в [I] представления мультипликативного вида для вычисления ведущих угловых миноров и определителя (без всяких ограничений на их поведение) трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I).

2. Получены (Теоремы 2 и 3) мультипликативные и неизвестные ранее представления итерационного вида для вычисления ведущих блочных угловых миноров, ни один из которых не равен нулю, и определителя (а также множество представлений определителя через ведущие блочные угловые миноры обоих типов) блочно-трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) и некоторых блочных факторизованных матриц.

3. Впервые выполнены исследования (Теоремы 4 и 5) факторизационных свойств индуцированных матриц, если один или одновременно два и более однотипных ведущих блочных угловых миноров блочно-трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) обращаются в нуль, и фактически впервые получены на их основе (при указанном поведении ведущих блочных угловых миноров $\mathbb{C}$ (I.I)):

- полные естественные матричные факторизации блочно-трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) и им обратных;
- мультипликативные представления для вычисления ведущих блочных угловых миноров и определителя матриц $\mathbb{C}$ (I.I).

Авторы признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящей серии работ и предоставленную возможность работать над ней.

Литература

I. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-86-531, Дубна,I986.
2. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-87-533, Дубна,I987.

3. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-88-623, Дубна,1987.
4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-88-598, Дубна,1988.
5. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-88-786, Дубна,1988.
6. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-89-203, Дубна,1989.
7. Емельяненко Г.А., Им Ен Сек, ОИЯИ Р11-88-452, Дубна,1988.
8. Ильин В.П., Кузнецов Ю.А. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М., "Наука", 1985.
9. Rizvi S.A.H. Inverses of quasitridiagonal matrics. "Linear Algebra and Appl.", 56, p. 177-184, 1984.
10. Rizvi S.A.H. Block determinants. "Proc. Nat. Acad. Sci., India", Sec. A, 55, 160-667, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 мая 1989 года.