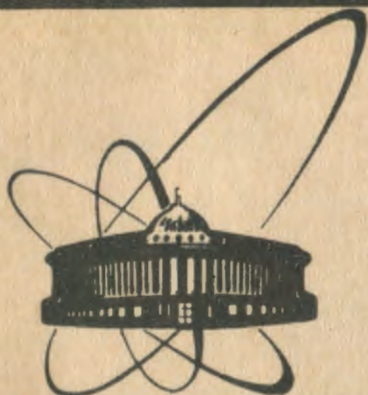


89-34

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



P11-89-34

Т.Жанлав, И.В.Пузынин

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ
МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

1989

Введение

Рассматривается нестационарная задача

$$\bar{a} \frac{\partial u}{\partial t} = u'' - f(x, u, u'), \quad a \leq x \leq b, \quad t > 0, \quad (I)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

$$\ell_1 u = \alpha_1 u + \beta_1 u' = \varphi_1(t), \quad x=a, \quad (3)$$

$$\ell_2 u = \alpha_2 u + \beta_2 u' = \varphi_2(t), \quad x=b, \quad t \geq 0,$$

где $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \leq 0$, $\beta_2 \geq 0$ и $u_0(x), \varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - заданные гладкие функции. Константа \bar{a} в (I) может быть комплексной и $u(x, t)$ - комплекснозначная неизвестная функция. Предположим, что задача (I)-(3) имеет единственное решение, причем оно является достаточно гладким.

Уравнение (I) включает ряд важных для приложения уравнений. При вещественном \bar{a} уравнение (I) является нелинейным параболическим. Если \bar{a} - чисто мнимое, то уравнение (I) превращается в нелинейное уравнение Шредингера, которое широко применяется для описания процессов в нелинейной физике. В зависимости от вида нелинейности оно описывает различные явления в нелинейной оптике, в описании световых пучков в среде с насыщением нелинейности, в физике плазмы, теории волн, в моделировании циклотронного резонанса^{/1-5/}.

Кроме того, поведение широкого класса двухкомпонентных диссипативных систем в окрестности точки бифуркации описывается^{/6/} уравнением вида (I).

В настоящее время существует множество приближенных методов решения задачи (I)-(3).

Отметим, что в некоторых случаях представляют интерес при эволюции по t сохраняющиеся величины. Они имеют определенный физический смысл и представляют собой интегралы от степеней решения задачи (I)-(3) и его производных. Так как сплайны хорошо аппроксимируют не только решение, но и его производные^{/7/}, можно ожидать, что схе-

мы сплайн-коллокации для задачи (I)-(3) будут давать хорошие результаты при вычислении интегралов движения. Цель данной работы - построение и численное исследование свойств таких вычислительных схем.

I. Численный алгоритм

Предположим, что нелинейная часть уравнения (I) является достаточно гладкой функцией и представляется в виде

$$f(x, u, u') = f_1(x, u_1, u_2, u_1', u_2') + if_2(x, u_1, u_2, u_1', u_2') , \quad (4)$$

где f_1 и f_2 - действительные функции от своих аргументов, u_1 и u_2 - реальная и мнимая части решения $u(x, t)$. Отметим, что представление (4) допускается для широкого класса функций $f(x, u, u')$.

С учетом (4) и $\bar{a} = a_1 + ia_2$ уравнение (I) сводится к системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} &= u_1^n - f_1 , \\ a_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= u_2^n - f_2 . \end{aligned} \right\} \quad (I')$$

Для численного решения задачи (I)-(3) построим сетку $\Delta = \Delta_N \times \Delta_\tau$, где

$$\Delta_N: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b , \quad h_1 = x_{i+1} - x_i ,$$

$$\Delta_\tau: t_n = n\tau , \quad n=0, 1, \dots$$

Мы будем искать приближенное решение задачи (I)-(3) в виде функции $S(x, t)$, которая при каждом фиксированном t является кубическим сплайном класса C^2 по переменной x с узлами на сетке Δ_N , т.е.

$$u \sim S = \sum_{j=-1}^{N+1} \bar{\alpha}_j(t) V_j(x) . \quad (5)$$

Здесь $V_j(x)$ - нормализованные кубические в-сплайны^{/7/}. При этом предполагается, что сетка Δ_N дополнена узлами

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 , \quad x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} .$$

Потребуем, чтобы при всех $t = t_n$ сплайн S удовлетворял уравнению

$$\varphi(S^{n+1}) \equiv \bar{a} \cdot \frac{S^{n+1} - S^n}{\tau} - \sigma(S^{n+1} - f^{n+1}) - (1-\sigma)(S^n - f^n) = 0, \quad x \in \Delta_N, \quad (6)$$

$$0 < \sigma \leq 1 ,$$

$$\ell_1 S^{n+1} = \varphi_1^{n+1} , \quad x = a ,$$

$$\ell_2 S^{n+1} = \varphi_2^{n+1} , \quad x = b . \quad (7)$$

S^0 - интерполяционный или локально-аппроксимационный кубический сплайн для начальной функции $u_0(x)$ на сетке Δ_N , удовлетворяющий условию (3).

Схема (6)-(7) является чисто неявной и нелинейной относительно S^{n+1} , и поэтому для ее решения необходимо использовать те или иные итерационные процессы. Мы линеаризируем уравнение (6) с помощью непрерывного аналога метода Ньютона^{9/}. В результате, на каждом временном слое мы имеем итерационный процесс

$$v_k^n - f_{S'}'(x, S_k^{n+1}, S_k^{n+1}) v_k' - (f_{S'}'(x, S_k^{n+1}, S_k^{n+1}) + \frac{\bar{\sigma}}{\tau \sigma}) v_k = \psi_k, \quad (8)$$

$$x \in \Delta_N,$$

$$\ell_1 v_k = c_k (\varphi_1^{n+1} - \varphi_1^n), \quad x = a, \quad (9)$$

$$\ell_2 v_k = c_k (\varphi_2^{n+1} - \varphi_2^n), \quad x = b,$$

$$\psi_k = \frac{1}{\sigma} \varphi(S_k^{n+1}), \quad c_0 = 1, \quad c_k = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \sigma_i), \quad k > 0,$$

$$S_{k+1}^{n+1} = S_k^{n+1} + \sigma_k v_k, \quad S_0^{n+1} = S^n, \quad k=0, 1, \dots, n=0, 1, \dots \quad (10)$$

Здесь σ_k - итерационный параметр.

В предположении (4) задача (8)-(9) представляет собой матричную систему линейных алгебраических уравнений, и она решается методом матричной трехточечной прогонки^{10/}. Для каждого конкретного случая можно установить критерий устойчивости и корректности матричной прогонки.

Сходимость итерационного процесса, очевидно, имеет место, если временный шаг τ не слишком велик, причем скорость сходимости итераций квадратична^{8/}. Поэтому для эволюционных задач типа (I) достаточно выбрать итерационный параметр $\sigma_k = 1$. В этом случае непрерывный аналог метода Ньютона превращается в обычный метод Ньютона. Итерационный процесс (8)-(10) может быть прекращен, если выполнено, например, условие

$$\max_{x \in \Delta_N} |v_k| \leq \varepsilon, \quad (II)$$

где ε - заданная точность.

Выбор веса σ в схеме (6), как правило, диктуется условием устойчивости и аппроксимации схемы. Нетрудно видеть, что схема (6)

имеет аппроксимацию $O(\tau^\gamma + h^2)$, $h = \max h_1$,

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \neq 1/2, \\ 2, & \text{если } \sigma = 1/2. \end{cases}$$

Схема (6) называется линейно устойчивой^{/II/}, если устойчива линейная схема

$$\bar{a} \frac{S^{n+1} - S^n}{\tau} = \sigma S^{n+1} + (1 - \sigma) S^n. \quad (I2)$$

Последняя устойчива на равномерной сетке, если выполнено неравенство

$$\tau \lambda_k (1 - 2\sigma) \leq 2a_1,$$

где λ_k - собственные значения оператора $\Delta u = u_{xx}$ ^{/I2/}. Итак, например, если $a_1 > 0$, то линейная схема (I2) безусловно устойчива при $\sigma \geq 1/2$. Естественно, при этом считается заданным однородное краевое условие $S^n(a) = S^n(b) = 0$.

Ясно, что для нелинейных задач (I) нужно использовать хотя бы линейную устойчивую схему, и поэтому применяется схема (6) с весами $\sigma \geq 1/2$, когда $a_1 > 0$. Однако этого недостаточно для устойчивости схемы (6), и качество численной схемы проверяется на тестовых примерах, для которых известны аналитические решения. В случае параболической задачи ($\bar{a} = 1$) схема (6) при $\sigma = 1$ рассмотрена в^{/I3/}, и доказана сходимость приближенного решения к точному со скоростью

$$O(\tau + h^2).$$

2. Численный эксперимент и обсуждение

С целью проверки качества схемы (6) мы рассмотрим краевую задачу для уравнения Шредингера

$$i u_t = u_{xx} + 2 |u|^2 \cdot u, \quad (I3)$$

$$|u| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Односолитонное решение задачи (I3) имеет вид^{/II/}

$$u(x, t) = 2\eta \cdot e^{-i[2\xi x - 4(\xi^2 - \eta^2)t + \Psi_0 + \frac{\pi}{2}]} \cdot \text{sech}(2\eta x - 8\xi\eta t - x_0), \quad (I4)$$

где x_0, η, ξ и Ψ_0 - константы. Как в^{/II/}, мы возьмем $x_0 = \Psi_0 = 0, \quad \xi = 1, \quad \eta = 0,5; 1; 2; 3$.

В качестве функции $u_0(x)$ в (2) берем $u(x, 0)$ из (I4). Можно показать, что на равномерной сетке Δ_N достаточным условием устойчивости и корректности матричной прогонки является условие

$$\tau \leq h^2 / 3\sigma.$$

Качество схемы (6) проверяется выполнением законов сохранения

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx ; \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (|u|^4 - |u'|^2) dx . \quad (I5)$$

Нетрудно вычислить точные значения интегралов (I5), и для удобства приведем их значения при некоторых значениях η .

η	$J_1 = 4\eta$	$J_2 = 16\eta(\eta^2/3 - 1)$
0,5	2	- 7,333...
1	4	-10,666...
2	8	10,666...
3	12	96

Для того чтобы найти приближенное решение задачи (I3), необходимо заменять асимптотическое краевое условие в (I3) условием

$$u(-L, t) = u(L, t) = 0 ,$$

где L - конечное, но достаточно большое число.

В связи с этим пределы интегрирования в (I5) заменяются соответственно числами $-L, L$, и при этом эти интегралы вычислялись по формуле трапеций с узлами на равномерной сетке Δ_N . В численных расчетах выбраны $L=10$, $\sigma=1/2$, $\varepsilon=10^{-4}$. В таблицах I-2, показывающих сходимость приближенного решения, введено обозначение

$$I_{\infty}(h) = \max_{x \in \Delta_N} |s^N(x) - u^N(x)| , \quad u^N(x) = u(x, t_N) .$$

В работе ^{II}/приведено сравнение численных результатов, полученных различными методами (явная и неявная схемы конечных разностей, схема Кранк-Никольсона, метод Фурье и другие).

Все они дали хороший результат для величины J_1 . А что касается величины J_2 , то она там вычислена со сравнительно меньшей точностью. Это, по-видимому, объясняется тем, что первая производная решения аппроксимируется с точностью $O(h)$. В то же время она вычисляется по схеме (6) с большой точностью, о чем свидетельствуют значения J_2 в таблицах I-2. Следует отметить, что для солитонных решений уравнения Шредингера характерно их резкое изменение в некоторых узких интервалах. В связи с этим приходится использовать сетку с очень маленьким шагом. Это естественно приводит к резкому возрастанию счетного времени и объема оперативной памяти ЭВМ. Поэтому при использовании равномерных сеток актуальным является либо использование схемы с большой точностью, либо применение различных приемов уточнений приближенного решения на последовательности сеток. Как замеча-

Таблица 1 ($\tau = 0,01$)

$\eta=0,5$	$h = 0,25$			$h/2 = 0,125$			$h/4 = 0,0625$		
	L_{∞}	J_1	J_2	L_{∞}	J_1	J_2	L_{∞}	J_1	J_2
0,25	0,05404413	I,9901679	-7,2697220	0,01306613	I,9993500	-7,3291479	0,00300691	I,9999590	-7,3330697
0,5	0,10069340	I,9901779	-7,2760815	0,02497650	I,9993527	-7,3295856	0,00576658	I,9999596	-7,3330993
0,75	0,14695263	I,9901880	-7,2821316	0,03708073	I,9993556	-7,3300277	0,00859856	I,9999602	-7,3331293
I,0	0,19386330	I,9901977	-7,2874045	0,04967916	I,9993586	-7,3304289	0,01156693	I,9999612	-7,3331567
$\eta=1,0$	$h=0,125$			$h/2=0,0625$			$h/4=0,03125$		
	L_{∞}	J_1	J_2	L_{∞}	J_1	J_2	L_{∞}	J_1	J_2
0,25	0,08901844	3,9972977	-10,658792	0,02283783	3,9998604	-10,666324	0,00569392	3,9999992	-10,666661
0,5	0,18584963	3,9974047	-10,669624	0,04815420	3,9998896	-10,667055	0,01205994	4,0000067	-10,666706
0,75	0,29237790	3,9974045	-10,669028	0,07555132	3,9998878	-10,666949	0,01895560	4,0000063	-10,666697
I,0	0,39431134	3,9973378	-10,661789	0,10138339	3,9998677	-10,666404	0,02543191	4,0000011	-10,666661

Таблица 2 $(\tau = 0,0025 ; \eta = 2,0)$
 $(\tau = 0,002 ; \eta = 3,0)$

$\eta=2,0$	$h = 0,125$			$h/2 = 0,0625$			$h/4 = 0,03125$		
	L_{∞}	J_1	J_2	L_{∞}	J_1	J_2	L_{∞}	J_1	J_2
0,125	0,59276663	7,9759235	10,242354	0,16232406	7,9984516	10,630709	0,04343521	7,9999371	10,664546
0,25	1,23800850	7,9758163	10,393438	0,33958112	7,9984039	10,646278	0,09089934	7,9999230	10,665531
0,375	1,77691990	7,9756455	10,576985	0,48322607	7,9983624	10,656715	0,12891151	7,9999125	10,666052
0,5	2,28549430	7,9758036	10,396306	0,63769681	7,9984212	10,640416	0,17091713	7,9999292	10,665104
$\eta=3,0$	$h = 0,0625$			$h/2 = 0,03125$			$h/4 = 0,015625$		
	L_{∞}	J_1	J_2	L_{∞}	J_1	J_2	L_{∞}	J_1	J_2
0,25	1,838181	11,992523	95,584082	0,5137392	11,999741	95,976481	0,16233497	12,000055	96,000639
0,50	3,6127618	11,992199	95,692799	1,0231961	11,999639	95,982207	0,32374539	12,000025	96,000243
0,75	5,195382	11,992340	95,650030	1,5238496	11,999706	95,979627	0,48425687	12,000049	96,000542
1,0	6,6794203	11,992400	95,608066	2,0339325	11,999680	95,979520	0,64807334	12,000038	96,000348

но в /8/, при работе с быстро меняющимися функциями погрешность может увеличиваться при увеличении порядка точности схемы. Следовательно, для нашей задачи более предпочтительным является метод уточнения решений на последовательности сеток. Очевидно, на каждом фиксированном временном слое метод уточнения решений по Ричардсону применим /14/ для коэффициентов сплайна (5) на равномерной сетке. В таблице 3 приведены эти уточнения. В ней через $L_{\infty}(h, h/2)$ и $L_{\infty}(h/2, h/4)$ обозначены величины

$$L_{\infty}(h, h/2) = \max_{x \in \Delta_N} \left| \frac{4S_{h/2}^n(x) - S_h^n(x)}{3} - u^n(x) \right|,$$

$$L_{\infty}(h/2, h/4) = \max_{x \in \Delta_N} \left| \frac{4S_{h/4}^n(x) - S_{h/2}^n(x)}{3} - u^n(x) \right|,$$

где $S_h(x)$ - сплайн, определенный на равномерной сетке с шагом h .

Таблица 3 ($\tau = 0,0025$)

$\rho = 2,0$	$h = 0,125$	$h/2 = 0,0625$	$h/4 = 0,03125$		
t	$L_{\infty}(h)$	$L_{\infty}(h/2)$	$L_{\infty}(h/4)$	$L_{\infty}(h, h/2)$	$L_{\infty}(h/2, h/4)$
0,125	0,59276663	0,16232406	0,04343521	0,03300498	0,00394814
0,25	1,2380085	0,33958112	0,09089934	0,0886695	0,00953018
0,375	1,7769199	0,48322607	0,12891151	0,15604559	0,01472728
0,5	2,2854943	0,63769681	0,17091713	0,24958195	0,02296895

Литература

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЕЭУФ, 1971, 61,1,с.118, 1973, 64,5,с.1627.
2. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
3. Выслоух В.А. УФН, 1982, 136, вып.3, с.519.
4. Филиппычев Д.С. Вестник. Моск.ун-та., серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 1987, 1, с.24.
5. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. ЖВМ и МФ, 1987, 27,2, с.202.

6. Ахромеева Т.С. и др. ДАН СССР, 1984, 279, № 3, с.591;
1984, 279, № 5, с.1091.
7. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-
функций. М., Наука, 1980.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
9. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, вып.1,
с.127.
10. Самарский А.А., Николаев Б.С. Методы решения сеточных уравнений.
М.: Наука, 1978.
11. Ablowitz M.J., Taha T.R. Clarkson Colledge of Technology I.F.N.S.
preprint N°15. Postdam.N.Y., 1981 .
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
13. Жанлав Т., Пузынин И.В. ОИИИ, РИИ-87-722, Дубна, 1987.
14. Жанлав Т., Жидков Е.П. ОИИИ, РИИ-86-415, Дубна, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1989 года.