объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-89-203

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

О ПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ НЕВЫРОЖДЕННЫХ КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ (И ИМ ОБРАТНЫХ) МАТРИЦ В СЛУЧАЕ ОБРАЩЕНИЯ В НУЛЬ ОДНОГО ИЛИ (ОДНОВРЕМЕННО) ДВУХ ГЛАВНЫХ БЛОЧНЫХ УГЛОВЫХ МИНОРОВ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

*Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1989

I. <u>Введение</u>

Целью настоящей работы является завершение наших исследований [I+8] по изучению свойств факторизаций квазитрехдиагональных (и им обратных) матриц. При этом настоящий цикл работ охватывает как случаи, когда все главные блочные угловые миноры таких матриц отличны от нуля, а их диагональные блоки невырождены, так и случаи, когда некоторые из указанных квазиминоров обращаются в нуль и диагональные блоки произвольные.

Итак, пусть $\mathbb{C}$ – <u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица общего вида

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_1 & \tilde r_2 & & & & \\ \tilde p_2 & E_2 & \tilde r_3 & & & \\ & \tilde p_3 & E_3 & \tilde r_4 & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & \tilde p_{m-1} & E_{m-1} & \tilde r_m \\ & & & & \tilde p_m & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & & & \\ & q_2 & & & & \\ & & q_3 & & & \\ & & & \ldots & & \\ & & & & q_{m-1} & \\ & & & & & q_m \end{bmatrix}=\tilde{\mathbb{C}}\cdot\mathbb{C}_{\Phi} \qquad (I.I)$$

, где

$$\{\tilde r_k=r_k\cdot q_k^{-1}\}_{k=2}^{m},\ \{\tilde p_k=p_k\cdot q_{k-1}^{-1}\}_{k=2}^{m}, \qquad (I.2)$$

$\{E_k, q_k\}_{k=1}^{m}$ – <u>неособенные</u>[x] (E_k-единичные) квадратные (в общем случае разных размерностей) диагональные элементы-блоки, а $\{r_k, p_k;\ \tilde r_k, \tilde p_k\}_{k=2}^{m}$ – прямоугольные элементы-блоки[xx] у матриц $\mathbb{C}$ и $\tilde{\mathbb{C}}$ соответственно и $\mathbb{C}_{\Phi}$ – квазидиагональная матрица. Будем также всюду далее обозначать $\{\mathbb{O}_k\}_{k=1}^{m}$ – нулевые матрицы соответствующих размерностей.

<u>Замечание I</u>. Напомним, что в настоящей серии работ понятия квазитрехдиагональная и блочно-трехдиагональная матрица являются эквивалентными. Эквивалентными являются и понятия верхних (нижних) главных угловых квазиминоров и верхних (нижних) главных блочных угловых миноров-$\Delta_1^j(\Delta_j^m)$, т.е. миноров (определителей) матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), начинающихся с q_1 (и с q_m). Кроме того, в указанной серии работ мы ввели отдельную нумерацию представлений как для самих матриц $\mathbb{C}$ (I.I), так и для им обратных $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$. Принята также (для удобства) единая нумерация лемм и теорем, отдельная как для матриц $\mathbb{C}$ (I.I), так и для им обратных $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$. В работах [4÷7] и всюду далее мы пользуемся обозначениями $\mathbb{C}(\Lambda)$, $\mathbb{C}(G)$ и $\mathbb{C}(\Lambda,G)$; $\mathbb{B}(\Lambda)$, $\mathbb{B}(G)$ и $\mathbb{B}(\Lambda,G)$ для представлений матриц $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ <u>как функций последоват</u>ельностей матриц $\{\Lambda\}$ (I.3) и $\{G\}$ (I.4).

x) Отметим, что ограничения на невырожденность всех квазидиагональных элементов-блоков матриц $\mathbb{C}$ (I.I) нами в этой работы будут сняты.

xx) Если $\{q_1, q_k, r_k, p_k;\ \tilde r_k, \tilde p_k\}_{k=2}^{m}$ – линейные операторы, то $\mathbb{C}$ (I.I) будут матрицей линейных операторов.

Ниже мы приводим лишь те из основных результатов, полученных в [4÷7], которые будут явно использованы в настоящей работе.

Итак, для ситуации, когда некоторые верхние (нижние) главные угловые квазиминоры $\mathbb{C}$ (I.I) обращаются в нуль, в работе [4] были определены последовательности матриц вида

$$\begin{cases} \text{Если } det(\Lambda_k)\neq 0, \text{ то } \Lambda_{k+1}=E_k-\tilde p_k\cdot\Lambda_k^{-1}\cdot\tilde r_k,\ \Lambda_2=E_1,\ k=2,3,\ldots,m. \\ \text{Если } det(\Lambda_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\leq k\leq m-1) \text{ то } \Lambda_{k+1}=?, \text{ но } \Lambda_{k+2}=E_{k+1}. \end{cases} \qquad (I.3)$$

$$\begin{cases} \text{Если } det(G_k)\neq 0, \text{ то } G_{k-1}=E_k-\tilde r_{k+1}\cdot G_k^{-1}\cdot\tilde p_{k+1},\ G_{m-1}=E_m,\ k=m-1,m-2,\ldots,1. \\ \text{Если } det(G_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\leq k\leq m-2), \text{ то } G_{k-1}=?, \text{ но } G_{k-2}=E_{k-1}. \end{cases} \qquad (I.4)$$

Далее в [4÷7] на основе (I.3) и (I.4) были рассмотрены возможные множества представлений для $\mathbb{C}$ (I.I), например [4],

<u>Представление 28(28′)</u>(при $det(\Lambda_k)=0$ для любого k из $(3\leq k\leq m-1)$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ (-\beta_2)E_2 & & & & & & & \\ \ldots & & & & & & & \\ & (-\beta_{k-1})E_{k-1} & & & & & & \\ & & \mathbb{O}_k\, E_k & & & & & \\ & & & \mathbb{O}_{k+1} E_{k+1} & & & & \\ & & & & (-\beta_{k+2})E_{k+2} & & & \\ & & & & \ldots & & & \\ & & & & & (-\beta_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & \ldots & & & \\ & & E_{k-1} & & & \\ & & & E_k\ \mathbb{B}_{k+1}\cdots\mathbb{B}_m & & \\ & & & E_{k+1} & & \\ & & & \ldots & & \\ & & & & E_{m-1} & \\ & & & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & & \mathbb{O} \\ & \ldots & & & & \\ & & \Lambda_{k-1} & & & \\ & & & \begin{bmatrix}\Lambda_k & \tilde r_k\\ \tilde p_k(E_k-\theta_k) & \end{bmatrix} & & \\ & & & E_{k+1} & & \\ & & & & \Lambda_{k+3} & \\ & & & & \ldots & \\ \mathbb{O} & & & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & \ldots & & & \\ & & E_{k-1} & & & \\ & & & E_k & & \\ & & & A_{k+1}E_{k+1} & & \\ & & & A_{k+2}\ E_{k+2} & & \\ & & & \ldots & \ldots & \\ & & & A_m & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & \\ \ldots & & & & \\ E_{k-2}(-c_{k-1}) & & & & \\ & E_{k-1}\,\mathbb{O}_k & & & \\ & & E_k\ \mathbb{O}_{k+1} & & \\ & & & E_{k+1}(-c_{k+2}) & \\ & & & \ldots & \\ & & & E_{m-1}(-c_m) & \\ & & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & \ldots & & & \\ & & q_k & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda) \qquad (I.5)$$

, где

$$\begin{cases} \mathbb{B}_j=\tilde r_{k+1}\cdot\prod_{j=k+2}^{j} c_j\cdot\Lambda_{j+1}^{-1},\ j=k+1,k+2,\ldots,m;\ A_i=\Lambda_{i+1}^{-1}\cdot\prod_{j=k+2}^{i}\beta_j\cdot\tilde p_{k+1},\ i=k+1,\ldots,m, \\ \theta_k=\sum_{j=k+1}^{m}(\mathbb{B}_j\cdot\Lambda_{j+1}\cdot A_j),\ c_{j+1}=-(\Lambda_{j+1}^{-1}\cdot\tilde r_{j+1}),\ \beta_{j+1}=-(\tilde p_{j+1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}),\ 1\leq j\leq k-1,\ k+2\leq j\leq m-1, \end{cases} \quad \text{а} \qquad (I.6)$$

соответствующие матрицы $\{\Lambda\}$ полностью определены в (I.3).

<u>При этом</u> $(E_k-\theta_k)=G_{k-1}$, если $\{det(G_j)\neq 0\}_{j=k}^{m-1}$.

<u>Представление 27(27′)</u>(при $det(G_k)=0$ для любого k из $(2\leq k\leq m-2)$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) & & & & & \\ \ldots & & & & & \\ E_{k-2}(-\hat\beta_{k-1}) & & & & & \\ & E_{k-1}\,\mathbb{O}_k & & & & \\ & & E_k\ \mathbb{O}_{k+1} & & & \\ & & & E_{k+1}(-\hat\beta_{k+2}) & & \\ & & & \ldots & & \\ & & & E_{m-1}(-\hat\beta_m) & & \\ & & & & E_m & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & \ldots & & & & \\ & & E_{k-2} & & & \\ & & & E_{k-1} & & \\ \hat A_1\cdots\hat A_{k-1} & & & E_k & & \\ & & & & E_{k+1} & \\ & & & & \ldots & \\ & & & & E_{m-1} & \\ & & & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_0 & & & & & \mathbb{O} \\ & \ldots & & & & \\ & & G_{k-3} & & & \\ & & & E_{k-1} & & \\ & & & \begin{bmatrix}(E_k-\hat\theta_k) & \tilde r_{k+1}\\ \tilde p_{k+1} & G_k\end{bmatrix} & & \\ & & & & G_{k+1} & \\ & & & & \ldots & \\ \mathbb{O} & & & & & G_{m-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & \hat{\mathbb{B}}_1 & \\ & E_2 & & \hat{\mathbb{B}}_2 & \\ & & \ldots & \ldots & \\ & & E_{k-1} & \hat{\mathbb{B}}_{k-1} & \\ & & & E_k & \\ & & & E_{k+1} & \\ & & & \ldots & \\ & & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\hat c_2)E_2 & & & & & \\ \ldots & & & & & \\ & (-\hat c_{k-1})E_{k-1} & & & & \\ & & \mathbb{O}_k\ E_k & & & \\ & & & \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} & & \\ & & & & (-\hat c_{k+2})E_{k+2} & \\ & & & & \ldots & \\ & & & & & (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & \ldots & & & \\ & & q_k & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(G) \qquad (I.7)$$

, где

$$\begin{cases} \hat A_j=\tilde p_k\cdot\prod_{j=j+1}^{k-1}\hat c_j\cdot G_{j-1}^{-1},\ j=1,2,\ldots,k-1;\ \hat{\mathbb{B}}_i=G_{i-1}^{-1}\cdot\prod_{j=i+1}^{k-1}\hat\beta_j\cdot\tilde r_k,\ i=1,2,\ldots,k-1,\ \hat\theta_k=\sum_{j=1}^{k-1}(\hat A_j\cdot G_{j-1}\cdot\hat{\mathbb{B}}_j), \\ \hat c_{j+1}=-(G_j^{-1}\cdot\tilde p_{j+1}),\ \hat\beta_{j+1}=-(\tilde r_{j+1}\cdot G_j^{-1}),\ 1\leq j\leq k-2;\ k+2\leq j\leq m-1, \end{cases} \quad \text{а соответству-} \qquad (I.8)$$

ющие матрицы $\{G\}$ полностью определены в (I.4).

<u>При этом</u> $(E_k-\hat\theta_k)=\Lambda_{k+1}$, $\{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k}$.

2. <u>Факторизованные представления квазитрехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I), некоторые из верхних (нижних) главных блочных угловых миноров которых обращаются в нуль, без каких-либо ограничений на свойства их квазидиагональных элементов</u>

Ранее в работах [I÷8] нами исследовались всевозможные способы факторизаций $\mathbb{C}$ (I.I) в предположениях $\{det(q_i)\neq 0\}_{i=1}^{m}$, а также всех ненулевых (либо отдельных нулевых) верхних (нижних) главных блочных угловых миноров у $\mathbb{C}$ (I.I). В настоящем разделе мы ослабим требование невырожденности всех квазидиагональных элементов $\{q_i\}_{i=1}^{m}$ и рассмотрим соответствующие факторизации $\mathbb{C}$ (I.I), являющиеся обобщением результатов [3,9], лишь для простейших случаев обращения в нуль верхних (нижних) блочных угловых миноров. Итак, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 26</u>. Пусть $\mathbb{C}$ - <u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_k, p_k\}_{k=2}^{m}$ и диагональными квадратными блоками $\{q_k\}_{k=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей), такими, что $det(q_1)\neq 0$ <u>либо</u> $det(q_m)\neq 0$. Если при этом любой $(k+1)$ нижний (<u>либо</u> любой $(k-1)$ верхний) главные угловые квазиминоры $\mathbb{C}$ (I.I) обращаются в нуль и <u>при этом</u> $det(q_{k-1})\neq 0$ (<u>либо</u> $det(q_{k+1})\neq 0$), то для $\mathbb{C}$ (I.I) справедливы следующие факторизованные представления

<u>Представление I55(I55')</u> (при $det(\bar{G}_k)=0$ и $det(q_{k-1})\neq 0\neq det(q_m)$) для любого фиксированного k из $2\le k\le m-2$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\bar{\beta}}_2) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & E_{k-2}(-\hat{\bar{\beta}}_{k-1}) & & & & \\ & & & E_{k-1}\ \mathbb{O}_k & & & \\ & & & & E_k\ \mathbb{O}_{k+1} & & \\ & & & & & E_{k+1}(-\hat{\bar{\beta}}_{k+2}) & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & E_{m-1}(-\hat{\bar{\beta}}_m) \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & E_{k-2} & & \\ & & & & E_{k-1} & \\ \hat{\bar{A}}_1 & \cdots & & \hat{\bar{A}}_{k-1} & E_k & \\ & & & & & E_{k+1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}_0 & & & & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & \bar{G}_{k-3} & & & \\ & & & q_{k-1} & & \\ & & & & \begin{bmatrix} (q_k-\hat{\bar{\theta}}_k) & z_{k+1} \\ p_{k+1} & \bar{G}_k \end{bmatrix} & \\ & & & & & \bar{G}_{k+1} \\ & & & & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & & & \bar{G}_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & \hat{\bar{B}}_1 & \\ & E_2 & \hat{\bar{B}}_2 & \\ & & \ddots\ \vdots & \\ & & E_{k-1}\ \hat{\bar{B}}_{k-1} & \\ & & E_k & \\ & & & E_{k+1} \\ & & & \ddots \\ & & & E_{m-1} \\ & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-\hat{\bar{c}}_2) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & E_{k-2}(-\hat{\bar{c}}_{k-1}) & & & & \\ & & & E_{k-1}\ \mathbb{O}_k & & & \\ & & & & E_k\ \mathbb{O}_{k+1} & & \\ & & & & & E_{k+1}(-\hat{\bar{c}}_{k+2}) & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & E_{m-1}(-\hat{\bar{c}}_m) \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar{G}) \qquad (2.I)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\bar{A}}_j = p_k\cdot\prod\limits_{s=j+1}^{k-1}\hat{\bar{c}}_s\cdot\bar{G}_{j-1}^{-1},\ j=1,2,\dots,k-1;\ \ \hat{\bar{B}}_i=\bar{G}_{i-1}^{-1}\cdot\prod\limits_{s=i+1}^{k-1}\hat{\bar{\beta}}_s\cdot z_k,\ i=1,2,\dots,k-1;\ \ \hat{\bar{\theta}}_k=\sum\limits_{s=1}^{k-1}(\hat{\bar{A}}_s\cdot\bar{G}_{s-1}\cdot\hat{\bar{B}}_s). \\ \underline{\text{При этом}}\ \ (q_k-\hat{\bar{\theta}}_k)=\bar{\Lambda}_{k+1},\ \text{если}\ \{det(\bar{\Lambda}_s)\neq 0\}_{s=2}^{k}. \end{cases} \qquad (2.2)$$

<u>Представление I56(I56')</u> (при $det(\bar{\Lambda}_k)=0$ и $det(q_{k+1})\neq 0\neq det(q_1)$ для любого фиксированного k из $3\le k\le m-1$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\bar{\beta}_2)E_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & (-\bar{\beta}_{k-1})E_{k-1} & & & & & \\ & & \mathbb{O}_k\ E_k & & & & \\ & & & \mathbb{O}_{k+1}\ E_{k+1} & & & \\ & & & & (-\bar{\beta}_{k+2})E_{k+2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (-\bar{\beta}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & \\ & E_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & E_{k-1} & & \\ & & & E_k\ \bar{B}_{k+1}\cdots\bar{B}_m & \\ & & & E_{k+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & E_{m-1} \\ & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_2 & & & & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & \bar{\Lambda}_{k-1} & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_k & z_k \\ p_k & (q_k-\bar{\theta}_k) \end{bmatrix} & & \\ & & & & q_{k+1} & \\ & & & & & \bar{\Lambda}_{k+3} \\ & & & & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & & & \bar{\Lambda}_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & E_{k-1} & \\ & & E_k & \\ & & \bar{A}_{k+1}\ E_{k+1} & \\ & & \bar{A}_{k+2}\quad E_{k+2} & \\ & & \vdots\qquad\ \ddots & \\ & & \bar{A}_m \qquad\quad E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-\bar{c}_2) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & E_{k-2}(-\bar{c}_{k-1}) & & & & \\ & & & E_{k-1}\ \mathbb{O}_k & & & \\ & & & & E_k\ \mathbb{O}_{k+1} & & \\ & & & & & E_{k+1}(-\bar{c}_{k+2}) & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & E_{m-1}(-\bar{c}_m) \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar{\Lambda}) \qquad (2.3)$$

где

$$\begin{cases} \bar{B}_j = z_{k+1}\cdot\prod\limits_{s=k+2}^{j}\bar{c}_s\cdot\bar{\Lambda}_{s+1}^{-1},\ j=k+1,k+2,\dots,m;\ \ \bar{A}_i=\bar{\Lambda}_{i+1}^{-1}\cdot\prod\limits_{s=k+2}^{i}\bar{\beta}_s\cdot p_{k+1},\ i=k+1,\dots,m;\ \ \bar{\theta}_k=\sum\limits_{s=k+1}^{m}(\bar{B}_s\cdot\bar{\Lambda}_{s+1}\cdot\bar{A}_s). \\ \underline{\text{При этом}}\ \ (q_k-\bar{\theta}_k)=\bar{G}_{k-1},\ \text{если}\ \{det(\bar{G}_s)\neq 0\}_{s=k}^{m}. \end{cases} \qquad (2.4)$$

<u>Здесь</u>.

$$\begin{cases} \text{Если } det(\bar{G}_s)\neq 0, \text{ то } \bar{G}_{s-1}=q_s-z_{s+1}\cdot\bar{G}_s^{-1}\cdot p_{s+1},\ \bar{G}_{m-1}=q_m\ (det(q_m)\neq 0),\ s=m-1,\dots,1 \\ \text{Если } det(\bar{G}_s)=0 \text{ для любого } s \text{ из } (2\le s\le m-2), \text{ то } \bar{G}_{s-1}=\,?, \text{ но } \bar{G}_{s-2}=q_{s-1}, \\ \text{где } det(q_{s-1})\neq 0. \text{ Т.е. } \{\bar{G}_s=G_s\cdot q_{s+1}\}, \text{ где } \{G_s\}_{s=0}^{m-1} \text{ есть (I.4).} \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$\begin{cases} \text{Если } det(\bar{\Lambda}_s)\neq 0, \text{ то } \bar{\Lambda}_{s+1}=q_s-p_s\cdot\bar{\Lambda}_s^{-1}\cdot z_s,\ \bar{\Lambda}_2=q_1\ (det(q_1)\neq 0),\ s=2,3,\dots,m \\ \text{Если } det(\bar{\Lambda}_s)=0 \text{ для любого } s \text{ из } (3\le k\le m-1), \text{ то } \bar{\Lambda}_{s+1}=\,?, \text{ но } \bar{\Lambda}_{s+2}=q_{s+1}, \\ \text{где } det(q_{s+1})\neq 0. \text{ Т.е. } \{\bar{\Lambda}_s=\Lambda_s\cdot q_{s-1}\}, \text{ где } \{\Lambda_s\}_{s=2}^{m+1} \text{ есть (I.3),} \end{cases} \qquad (2.6)$$

а последовательности матриц $\{\bar{c},\hat{\bar{c}};\bar{\beta},\hat{\bar{\beta}}\}$ определены (в соответствии с (2.5) и (2.6) аналогично (I.6), (I.8)) в виде

$$\begin{cases} \bar{\beta}_{s+1}=-(p_{s+1}\cdot\bar{\Lambda}_{s+1}^{-1}),\ \bar{c}_{s+1}=-(\bar{\Lambda}_{s+1}^{-1}\cdot z_{s+1}), \\ \text{где } 1\le s\le k-2 \text{ и } k+1\le s\le m-1; \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\bar{\beta}}_{s+1}=-(z_{s+1}\cdot\bar{G}_s^{-1}),\ \hat{\bar{c}}_{s+1}=-(\bar{G}_s^{-1}\cdot p_{s+1}), \\ \text{где } 1\le s\le k-2 \text{ и } k+1\le s\le m-1. \end{cases} \qquad (2.7)$$

<u>Доказательство</u>. Представления I55(I55') и I56(I56') получаем из соответствующих представлений 27(27') и 28(28'); их справедливость проверяется путем перемножения факторизующих матриц-множителей в I55(I55') и I56(I56') соответственно. При этом следует иметь в виду, что введенные выше определения последовательностей $\{\bar{G}\}$ (2.5) и $\{\bar{\Lambda}\}$ (2.6) являются дальнейшим обобщением последовательностей $\{G\}$ (I.4) и $\{\Lambda\}$ (I.3). <u>Теорема доказана</u>.

Следующая теорема является обобщением соответствующего результата из [6].

<u>Теорема 27</u>. Пусть $\mathbb{C}$ - <u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_k, p_k\}_{k=2}^{m}$ и диагональными квадратными блоками $\{q_k\}_{k=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей), такими, что $det(q_1)\neq 0$ (<u>либо</u> $det(q_m)\neq 0$). Пусть также $\{\bar{G}_k\}$ и $\{\bar{\Lambda}_k\}$ последовательности матриц (2.5) и (2.6), удовлетворяющих одному из условий:

I. $[det(\bar{G}_k)=0$ и $det(\bar{G}_{k-3})=0$ для любого k из $(5\le k\le m-2)$, при этом $det(q_{k-1})\neq 0\neq det(q_{k-4})]$ <u>либо</u>
$[det(\bar{\Lambda}_k)=0$ и $det(\bar{\Lambda}_{k+3})=0$ для любого k из $(8\le k\le m-4)$, при этом $det(q_{k+1})\neq 0\neq det(q_{k+4})]$.

П. $[det(\bar{G}_k)=0$ и $det(\bar{G}_\ell)=0$ для любого k фиксированного и любого ℓ из $(2\le \ell< k-3)$, при этом $det(q_{k-1})\neq 0\neq det(q_{\ell-1})]$ <u>либо</u>
$[det(\bar{\Lambda}_k)=0$ и $det(\bar{\Lambda}_\ell)=0$ для любого k фиксированного и любого ℓ из $(k+3<\ell\le m-1)$, при этом $det(q_{k+1})\neq 0\neq det(q_{\ell+1})]$. Тогда для матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) справедливы следующие факторизованные представления

<u>Представление I57(I57′)</u> (при условии $\mathrm{I_I}$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\hat\beta}_2) \\ \cdots \\ E_{k-5}(-\hat{\hat\beta}_{k-4}) \\ E_{k-4}\,\mathbb{O}_{k-3} \\ E_{k-3}\,\mathbb{O}_{k-2} \\ E_{k-2}(-\hat{\hat\beta}_{k-1}) \\ E_{k-1}\,\mathbb{O}_{k} \\ E_{k}\,\mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-\hat{\hat\beta}_{k+2}) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-\hat{\hat\beta}_m) \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdots \\ E_{k-4} \\ \hat{\hat A}_1 \cdots \hat{\hat A}_{k-4}\, E_{k-3} \\ E_{k-2} \\ \mathbb{O}\; E_{k-1} \\ \hat{\hat A}_{k-2}\hat{\hat A}_{k-1}\, E_k \\ E_{k+1} \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar G_0 \\ \cdots \\ \bar G_{k-6} \\ q_{k-4} \\ \begin{bmatrix} (q_{k-3}-\hat{\hat\Theta}_{k-3}) & z_{k-2} \\ p_{k-2} & \bar G_{k-3} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} (-z_{k-2}\cdot\hat{\hat B}_{k-2}) & \mathbb{O} \\ (\hat{\hat\varphi}_{k-2}) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad q_{k-1} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} (-\hat{\hat A}_{k-2}\cdot p_{k-2}) & (\hat{\hat\varphi}_{k-2}) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} (q_k-\hat{\hat U}_k) & z_{k+1} \\ p_{k+1} & \bar G_k \end{bmatrix} \\ \bar G_{k+1} \\ \cdots \\ \bar G_{m-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 \;\; \hat{\hat B}_1 \\ \cdots \\ E_{k-4}\;\hat{\hat B}_{k-4} \\ E_{k-3} \\ E_{k-2}\;\mathbb{O}\;\hat{\hat B}_{k-2} \\ E_{k-1}\;\hat{\hat B}_{k-1} \\ E_k \\ E_{k+1} \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{\hat c}_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\hat{\hat c}_{k-4})E_{k-4} \\ \mathbb{O}_{k-3}E_{k-3} \\ \mathbb{O}_{k-2}E_{k-2} \\ (-\hat{\hat c}_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (-\hat{\hat c}_{k+2})E_{k+2} \\ \cdots \\ (-\hat{\hat c}_m)E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar G) \qquad (2.8)$$

, где

соответствующие матрицы $\{\hat{\hat A}_j, \hat{\hat B}_i\}_{j,i=1}^{k-4}$ и $\hat{\hat\Theta}_{k-3}$ – определены в виде (2.2), а $\hat{\hat\varphi}_{k-2}=(q_{k-2}-\bar G_{k-3})\cdot\hat{\hat B}_{k-2}$, $\hat{\hat\psi}_{k-2}=\hat{\hat A}_{k-2}\cdot(q_{k-2}-\bar G_{k-3})$, $\hat{\hat A}_{k-2}=-p_k\cdot p_{k-1}$,
$\hat{\hat A}_{k-1}=p_k$, $\hat{\hat B}_{k-2}=-z_{k-1}\cdot z_k$, $\hat{\hat B}_{k-1}=z_k$, $\hat{\hat U}_k=p_k\cdot[q_{k-1}+p_{k-1}\cdot(q_{k-2}+z_{k-1}\cdot p_{k-1})\cdot z_{k-1}]\cdot z_k$, (2.9)
а $\{\hat{\hat\beta}, \hat{\hat c}\}$ – имеют вид (2.7) и полностью определены в соответствии с $\{\bar G\}$ (2.5). <u>При этом</u> $(q_{k-3}-\hat{\hat\Theta}_{k-3})=\bar\Lambda_{k-2}$, если $\{det(\bar\Lambda_з)\neq 0\}_{з=3}^{k-1}$.

<u>Представление I58(I58′)</u> (при условии $\mathrm{П_I}$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\hat\beta}_2) \\ \cdots \\ E_{l-2}(-\hat{\hat\beta}_{l-1}) \\ E_{l-1}\,\mathbb{O}_l \\ E_l\,\mathbb{O}_{l+1} \\ E_{l+1}(-\hat{\hat\beta}_{l+2}) \\ \cdots \\ E_{k-2}(-\hat{\hat\beta}_{k-1}) \\ E_{k-1}\,\mathbb{O}_k \\ E_k\,\mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-\hat{\hat\beta}_{k+2}) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-\hat{\hat\beta}_m) \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_{l-2} \\ E_{l-1} \\ \hat{\hat A}_1 \cdots \hat{\hat A}_{l-1}\,E_l \\ E_{l+1} \\ \cdots \\ E_{k-2} \\ E_{k-1} \\ \hat{\hat A}_{l+1}\cdots\hat{\hat A}_{k-1}\,E_k \\ E_{k+1} \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar G_0 \\ \bar G_1 \\ \cdots \\ \bar G_{l-3} \\ q_{l-1} \\ \begin{bmatrix} (q_l-\hat{\hat\Theta}_l) & z_{l+1} \\ p_{l+1} & \bar G_l \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} (-z_{l+1}\cdot\hat{\hat B}_{l+1}) & \mathbb{O} \\ (\hat{\hat\varphi}_{l+1}) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \\ \bar G_{l+1} \\ \mathbb{O} \quad \cdots \quad \mathbb{O} \\ \bar G_{k-3} \\ q_{k-1} \\ \begin{bmatrix} (-\hat{\hat A}_{l+1}\cdot p_{l+1})(\hat{\hat\psi}_{l+1}) \\ \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} (q_k-\hat{\hat U}_k) & z_{k+1} \\ p_{k+1} & \bar G_k \end{bmatrix} \\ \bar G_{k+1} \\ \cdots \\ \bar G_{m-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 \;\; \hat{\hat B}_1 \\ E_2 \;\; \hat{\hat B}_2 \\ \cdots \\ E_{l-1}\;\hat{\hat B}_{l-1} \\ E_l \\ E_{l+1} \;\; \hat{\hat B}_{l+1} \\ \cdots \\ E_{k-2}\;\hat{\hat B}_{k-2} \\ E_{k-1}\;\hat{\hat B}_{k-1} \\ E_k \\ E_{k+1} \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{\hat c}_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\hat{\hat c}_{l-1})E_{l-1} \\ \mathbb{O}_l E_l \\ \mathbb{O}_{l+1}E_{l+1} \\ (-\hat{\hat c}_{l+2})E_{l+2} \\ \cdots \\ (-\hat{\hat c}_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (-\hat{\hat c}_{k+2})E_{k+2} \\ \cdots \\ (-\hat{\hat c}_m)E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar G) \qquad (2.10)$$

, где

соответствующие матрицы $[\{\hat{\hat A}_j, \hat{\hat B}_i\}_{j,i=1}^{l-1}, \{\hat{\hat A}_j, \hat{\hat B}_i\}_{j,i=l+2}^{k-1}; \hat{\hat\psi}_{l+1}, \hat{\hat\varphi}_{l+1}, \hat{\hat\theta}_l]$ –
– определены в (2.9), $\hat{\hat A}_{l+1}=p_k\cdot\prod_{з=l+2}^{k-1}\hat{\hat c}_з$, $\hat{\hat B}_{l+1}=\prod_{з=l+2}^{k-1}\hat{\hat\beta}_з\cdot z_k$, (2.11)
$\hat{\hat U}_k=\hat{\hat A}_{l+1}(2q_{l+1}-\bar G_l)\hat{\hat B}_{l+1}+\sum_{з=l+2}^{k-1}(\hat{\hat A}_з\cdot\bar G_{з-1}\cdot\hat{\hat B}_з)$. <u>При этом</u> $(q_l-\hat{\hat\theta}_l)=\bar\Lambda_{l+1}$ если $\{det(\bar G_з)\neq 0\}_{з=3}^{l}$.

<u>Представление I59(I59′)</u> (при условии $\mathrm{I_2}$)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\bar\beta_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\bar\beta_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (-\bar\beta_{k+2})E_{k+2} \\ \mathbb{O}_{k+3}E_{k+3} \\ \mathbb{O}_{k+4}E_{k+4} \\ (-\bar\beta_{k+5})E_{k+5} \\ \cdots \\ (-\bar\beta_m)E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdots \\ E_{k-1} \\ E_k\,\bar B_{k+1}\bar B_{k+2} \\ E_{k+1}\;\mathbb{O} \\ E_{k+2} \\ E_{k+3}\,\bar B_{k+4}\cdots\bar B_m \\ E_{k+4} \\ \cdots \\ E_{m-1} \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar\Lambda_2 \\ \cdots \\ \bar\Lambda_{k-1} \\ \begin{bmatrix} \bar\Lambda_k & z_k \\ p_k(q_k-\bar U_k) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (\bar\psi_{k+2}) & (-\bar B_{k+2}\cdot z_{k+3}) \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad q_{k+1} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{O} & (\bar\varphi_{k+2}) \\ \mathbb{O} & (-p_{k+3}\bar A_{k+2}) \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \bar\Lambda_{k+3} & z_{k+3} \\ p_{k+3}(q_{k+3}-\bar\theta_{k+3}) & \end{bmatrix} \\ q_{k+4} \\ \bar\Lambda_{k+6} \\ \cdots \\ \bar\Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdots \\ E_{k-1} \\ E_k \\ \bar A_{k+1}E_{k+1} \\ \bar A_{k+2}\,\mathbb{O}\,E_{k+2} \\ E_{k+3} \\ \bar A_{k+4}E_{k+4} \\ \bar A_{k+5}\;\; E_{k+5} \\ \cdots \\ \bar A_m \;\; E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1(-\bar c_2) \\ \cdots \\ E_{k-2}(-\bar c_{k-1}) \\ E_{k-1}\,\mathbb{O}_k \\ E_k\,\mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-\bar c_{k+2}) \\ E_{k+2}\,\mathbb{O}_{k+3} \\ E_{k+3}\,\mathbb{O}_{k+4} \\ E_{k+4}(-\bar c_{k+5}) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-\bar c_m) \\ E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar\Lambda) \qquad (2.12)$$

, где

соответствующие матрицы $\{\bar B_j, \bar A_i\}_{j,i=k+4}^{m}$ и $\bar\Theta_{k+3}$ – определены в виде (2.4), а $\bar\varphi_{k+2}=(q_{k+2}-\bar\Lambda_{k+3})\cdot\bar A_{k+2}$, $\bar\psi_{k+2}=\bar B_{k+2}\cdot(q_{k+2}-\bar\Lambda_{k+3})$, $\bar B_{k+1}=z_{k+1}$, $\bar B_{k+2}=-z_{k+1}\cdot z_{k+2}$, (2.13)
$\bar A_{k+1}=p_{k+1}$, $\bar A_{k+2}=-p_{k+2}\cdot p_{k+1}$, $\bar U_k=z_{k+1}\cdot[q_{k+1}+z_{k+2}\cdot(q_{k+2}+p_{k+3}\cdot z_{k+3})\cdot p_{k+2}]\cdot p_{k+1}$, а $\{\bar\beta, \bar c\}$–имеют вид (2.7) и полностью определены в соответствии с $\{\bar\Lambda\}$ (2.6).
<u>При этом</u> $(q_{k+3}-\bar\Theta_{k+3})=\bar G_{k+2}$, если $\{det(\bar G_з)\neq 0\}_{з=k}^{m-1}$.

Представление 160(160′)(при условии Π_2)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\bar{\beta}_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\bar{\beta}_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k\ E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (-\bar{\beta}_{k+2})E_{k+2} \\ (-\bar{\beta}_{l-1})E_{l-1} \\ \mathbb{O}_l\ E_l \\ \mathbb{O}_{l+1}E_{l+1} \\ (-\bar{\beta}_{l+2})E_{l+2} \\ (-\bar{\beta}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_{k-1} \\ E_k\bar{B}_{k+1}\cdots\bar{B}_{l-1} \\ E_{k+1} \\ E_{l-1} \\ E_l\bar{B}_{l+1}\cdots\bar{B}_m \\ E_{l+1} \\ E_{m-1} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_2 & & & & \mathbb{O} \\ & \bar{\Lambda}_{k-1} & & & \\ & \begin{bmatrix}\bar{\Lambda}_k & z_k \\ p_k & (q_k-\bar{\vartheta}_k)\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (\bar{\psi}_{l-1}) & (-\bar{B}_{l-1}z_l)\end{bmatrix} & \\ & & q_{k+1} & & \\ & \mathbb{O} & \bar{\Lambda}_{k+3} & \mathbb{O} & \\ & & \bar{\Lambda}_{l-1} & & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \bar{\varphi}_{l-1} \\ \mathbb{O} & (-p_l\bar{\Lambda}_{l-1})\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\bar{\Lambda}_l & z_l \\ p_l & (q_l-\bar{\theta}_l)\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & & q_{l+1} & \\ & & & \bar{\Lambda}_{l+3} & \\ & & & & \bar{\Lambda}_{m+1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_{k-1} \\ E_k \\ \bar{\Lambda}_{k+1}E_{k+1} \\ \bar{\Lambda}_{l-1}\quad E_{l-1} \\ E_l \\ \bar{\Lambda}_{l+1}E_{l+1} \\ \bar{\Lambda}_m\quad E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-\bar{c}_2) \\ E_{k-2}(-\bar{c}_{k-1}) \\ E_{k-1}\ \mathbb{O}_k \\ E_k\ \mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-\bar{c}_{k+2}) \\ E_{l-2}(-\bar{c}_{l-1}) \\ E_{l-1}\ \mathbb{O}_l \\ E_l\ \mathbb{O}_{l+1} \\ E_{l+1}(-\bar{c}_{l+2}) \\ E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar{\Lambda}) \qquad (2.14)$$

где

$$\left\{\begin{array}{l} \text{соответствующие матрицы } [\{\bar{B}_j, \bar{\Lambda}_i\}_{j,i=l+1}^{m}, \{\bar{B}_j, \bar{\Lambda}_i\}_{j,i=k+1}^{l-2}; \bar{\psi}_{l-1}, \bar{\varphi}_{l-1}, \bar{\theta}_l]- \\ \text{-определены в (2.13)}, \ \bar{B}_{l-1} = z_{k+1}\prod_{z=k+2}^{l-1}\bar{c}_z, \ \bar{A}_{l-1} = \prod_{z=k+2}^{l-1}\bar{\beta}_z\, p_{k+1}, \qquad (2.15) \\ \bar{\bar{\vartheta}}_k = \bar{B}_{l-1}(2q_{l-1}-\bar{\Lambda}_l)\bar{A}_{l-1} + \sum_{z=k+1}^{l-2}(\bar{B}_z\bar{\Lambda}_{z+1}\bar{A}_z). \ \underline{\text{При этом}}\ (q_l-\bar{\theta}_l)=\bar{G}_{l-1}, \text{если } \{det(\bar{G}_z)\neq 0\}_{z=l}^{m-1}. \end{array}\right.$$

<u>Доказательство</u> теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 26 с использованием результатов теоремы 19 из [6], поэтому мы на нем не останавливаемся.

<u>Замечание 2.</u> Как видим, при переходе к новым последовательностям матриц $\{\bar{G}\}$ (2.5) и $\{\bar{\Lambda}\}$(2.6) вид Представлений 28(28′), 27(27′) и 63(63′)÷66(66′)[6](при соответствующих условиях) для $\mathbb{C}(G)$ и $\mathbb{C}(\Lambda)$ стал более общим и менее зависимым от требования $\{det(q_i)\neq 0\}_{i=1}^{m}$. В итоге обобщены,следовательно,и представления 1(1′)÷4(4′)[3]. Аналогично, воспользовавшись определениями последовательностей $\{\bar{G}\}$(2.5) и $\{\bar{\Lambda}\}$(2.6), можно перенести остальные результаты работы [6] при различных комбинациях обращения в нуль <u>однотипных</u> квазиминоров.

Обобщения соответствующих результатов работы [7] в случае <u>одновременного</u> обращения в нуль квазиминоров обоих типов дает следующая теорема.

<u>Теорема 28</u>. Пусть $\mathbb{C}$ -<u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица общего вида (1.1) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_k, p_k\}_{k=2}^{m}$ и квадратными блоками $\{q_k\}_{k=1}^{m}$(в общем случае разных размерностей), такими, что

$det(q_1)\neq 0$ <u>и</u> $det(q_m)\neq 0$. Если при этом (при любом k из $2\le k\le m-2$) (k)-верхний <u>и</u> $(k-1)$ -нижний главные угловые квазиминоры $\mathbb{C}$ (1.1) <u>одновременно</u> обращаются в нуль и <u>при этом</u> $det(q_{k-1})\neq 0$ <u>и</u> $det(q_{k+2})\neq 0$, то для $\mathbb{C}$ (1.1) справедливы следующие факторизованные представления

<u>Представления 161(161′)÷165(165′)</u> (при условии $\{[det(\bar{G}_k)=0, det(q_{k-1})\neq 0$ для любого k из $(2\le k\le m-2)$ <u>но</u> $\{det(\bar{G}_z)\neq 0\}_{z=k+1}^{m-2}, \{det(\bar{G}_z)\neq 0\}_{z=0}^{k-3}]$ <u>и</u> $[det(\bar{\Lambda}_{k+1})=0, det(q_{k+2})\neq 0$ для того же k <u>но</u> $\{det(\bar{\Lambda}_z)\neq 0\}_{z=3}^{k}, \{det(\bar{\Lambda}_z)\neq 0\}_{z=k+4}^{m+1}]\}$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ E_2 & & \mathbb{O} & \\ E_{k-1} & & & \\ (-\bar{Z}_1)\ldots(-\bar{Z}_{k-1})E_k & & & \\ & E_{k+1}\bar{F}_{k+2}\ldots\bar{F}_m & & \\ & E_{k+2} & & \\ \mathbb{O} & & E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\{(\overset{(k-1)}{B\cdot S})_z\}_{z=1}^{2}] & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\bar{\Lambda}_{k+1} & z_{k+1} \\ p_{k+1} & \bar{G}_k\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & [\{(\overset{(m)}{B\cdot S})_z\}_{z=1}^{2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & \hat{F}_1 & \\ E_2 & \hat{F}_2 & \mathbb{O} \\ E_{k-1} & \hat{F}_{k-1} & \\ & E_k & \\ & E_{k+1} & \\ \mathbb{O} & (-\hat{Z}_{k+2})E_{k+2} & \\ & (-\hat{Z}_m) & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar{\Lambda},\bar{G}) \qquad (2.16)$$

, где

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{Z}_j = \prod_{z=j+1}^{k}\bar{\beta}_z, \ j=1,2,\ldots,k-1; \quad \bar{F}_j = z_{k+2}\prod_{z=k+3}^{j}\bar{c}_z\, B_{jj}(\bar{\Lambda},\bar{G}), \ j=k+2,k+3,\ldots,m, \\ \hat{F}_i = B_{ii}(\bar{\Lambda},\bar{G})\prod_{z=i+1}^{k-1}\hat{\beta}_z\, z_k, \ i=1,2,\ldots,k-1; \quad \hat{Z}_j = \prod_{z=k+2}^{j}\hat{c}_z, \ i=k+2,k+3,\ldots,m, \qquad (2.17) \\ \text{а } \{\hat{c},\bar{c};\hat{\beta},\bar{\beta}\} \text{ - имеют вид (2.7) и полностью определены в соответст-} \\ \text{вии с } \{\bar{G}\}\ (2.5),\ \{\bar{\Lambda}\}\ (2.6). \end{array}\right.$$

Здесь $[(\overset{k-1}{B\cdot S})_1, (\overset{k-1}{B\cdot S})_2]$, $[(\overset{m}{B\cdot S})_1, (\overset{m}{B\cdot S})_2]$ есть также обобщения [7] соответствующих представлений 30(30′), 31(31′) для усеченных матриц $\mathbb{C}^{1}_{k-1}$, $\mathbb{C}^{k+2}_{m}$, которые имеют вид

<u>Представление 166(166′)</u>$(1\le i\le k-1)$ <u>Представление 167(167′)</u> $(1\le i\le k-1)$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\bar{\beta}_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\bar{\beta}_i)E_i \\ \cdots \\ (-\bar{\beta}_{k-1})E_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B^{-1}_{11}z_2\hat{c}_2](z_2) \\ \cdots \\ [B^{-1}_{ii}z_{i+1}\hat{c}_{i+1}](z_{i+1}) \\ \cdots \\ [B^{-1}_{k-2k-2}z_{k-1}\hat{c}_{k-1}](z_{k-1}) \\ [B^{-1}_{k-1k-1}] \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{1}_{k-1}(\bar{\Lambda},\bar{G}) = \begin{bmatrix} [B^{-1}_{11}](z_2) \\ [B^{-1}_{22}\bar{\beta}_2z_2](z_3) \\ \cdots \\ [B^{-1}_{ii}\bar{\beta}_iz_i](z_{i+1}) \\ \cdots \\ [B^{-1}_{k-1k-1}\bar{\beta}_{k-1}z_{k-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{c}_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\hat{c}_i)E_i \\ \cdots \\ (-\hat{c}_{k-1})E_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad (2.18)$$

<u>Представление 166(166′)</u>$(k+2\le j\le m)$ <u>Представление 167(167′)</u>$(k+2\le j\le m)$

$$\begin{bmatrix} E_{k+2} \\ (-\bar{\beta}_{k+3})E_{k+3} \\ \cdots \\ (-\bar{\beta}_j)E_j \\ \cdots \\ (-\bar{\beta}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B^{-1}_{k+2k+2}z_{k+3}\hat{c}_{k+3}](z_{k+3}) \\ \cdots \\ [B^{-1}_{jj}z_{j+1}\hat{c}_{j+1}](z_{j+1}) \\ \cdots \\ [B^{-1}_{m-1m-1}z_m\hat{c}_m](z_m) \\ [B^{-1}_{mm}] \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{k+2}_{m}(\bar{\Lambda},\bar{G}) = \begin{bmatrix} [B^{-1}_{k+2k+2}](z_{k+3}) \\ [B^{-1}_{k+3k+3}\bar{\beta}_{k+3}z_{k+3}](z_{k+4}) \\ \cdots \\ [B^{-1}_{jj}\bar{\beta}_jz_j](z_{j+1}) \\ \cdots \\ [B^{-1}_{m-1m-1}\bar{\beta}_mz_m] \\ [B^{-1}_{mm}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+2} \\ (-\hat{c}_{k+3})E_{k+3} \\ \cdots \\ (-\hat{c}_j)E_j \\ \cdots \\ (-\hat{c}_m)E_m \end{bmatrix}, \qquad (2.19)$$

где

$$\{B_{11}=\bar{G}_0^{-1}, B_{zz}=(\bar{\Lambda}_{z+1}+\bar{G}_{z-1}-q_z)^{-1}, B_{k-1k-1}=\bar{\Lambda}_k^{-1}\}_{z=2}^{k-2}, \{B_{k+2k+2}=\bar{G}_{k+1}^{-1}, B_{zz}=(\bar{\Lambda}_{z+1}+\bar{G}_{z-1}-q_z)^{-1}, B_{mm}=\bar{\Lambda}_{m+1}^{-1}\}_{z=k+3}^{m} \qquad (2.20)$$

Представления I68(I68′)÷I72(I72′) (при тех же условиях)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \mathbb{O} & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & & & \\ \hat{\bar{\xi}}_1 & \cdots & & \hat{\bar{\xi}}_{k-1} & E_k & & & & \\ & & & & & E_{k+1} & (-\hat{\bar{\tau}}_{k+2}) & \cdots & (-\hat{\bar{\tau}}_m) \\ & & & & & & E_{k+2} & & \\ & \mathbb{O} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & E_{m-1} & \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\{(\overset{(k-1)}{B\cdot T})_3\}_{3=1}^{2}\right] & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{k+1} & r_{k+1} \\ p_{k+1} & \bar{G}_k \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \left[\{(\overset{(m)}{B\cdot T})_3\}_{3=1}^{2}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-\bar{\tau}_1) & & & & & \\ & E_2 & (-\bar{\tau}_2) & & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & E_{k-1} & (-\bar{\tau}_{k-1}) & & & \\ & & & E_k & & & \\ & & & & E_{k+1} & & \\ & & & & \bar{\bar{\xi}}_{k+2} & E_{k+2} & \\ & \mathbb{O} & & & \bar{\bar{\xi}}_{k+3} & & E_{k+3} \\ & & & & \vdots & & \ddots \\ & & & & \bar{\bar{\xi}}_m & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar{\Lambda},\bar{G}) \qquad (2.2I)$$

где

$$\left\{\begin{aligned} &\hat{\bar{\xi}}_j = p_k \cdot \prod_{3=j+1}^{k-1} \hat{\bar{c}}_3 \cdot B_j(\bar{\Lambda},\bar{G}),\ j=1,2,\dots,k-1;\quad \hat{\bar{\tau}} = \prod_{3=k+2}^{j} \hat{\bar{\beta}}_3,\ j=k+2,k+3,\dots,m, \\ &\bar{\tau}_i = \prod_{3=i+1}^{k} \bar{c}_3,\ i=1,2,\dots,k-1;\quad \bar{\bar{\xi}}_i = B_{ii}(\bar{\Lambda},\bar{G}) \cdot \prod_{3=k+3}^{i} \bar{\beta}_3 \cdot p_{k-3},\ i=k+2,\dots,m, \text{ а} \\ &\text{также } \{\bar{c},\hat{\bar{c}};\bar{\beta},\hat{\bar{\beta}}\} \text{ – имеют вид (2.7) и полностью определены в} \\ &\text{соответствии с } \{\bar{G}\}\ (2.5),\ \{\bar{\Lambda}\}\ (2.6). \end{aligned}\right. \qquad (2.22)$$

Здесь $[(\overset{k-1}{B\cdot T})_1, (\overset{k-1}{B\cdot T})_2], [(\overset{m}{B\cdot T})_1, (\overset{m}{B\cdot T})_2]$ есть также обобщения [7] соответствующих представлений 33(33′), 34(34′) для усеченных матриц $\mathbb{C}_{k-1}^{1}$, $\mathbb{C}_m^{k+2}$ которые имеют вид

Представление I73(I73′) $(1 \le i \le k-1)$ Представление I74(I74′) $(1 \le i \le k-1)$

$$\begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}\hat{\bar{\beta}}_2 \cdot p_2] & & & \\ (p_2) & [B_{22}^{-1}\hat{\bar{\beta}}_3 \cdot p_3] & & \\ & \ddots & & \\ & (p_i) & [B_{ii}^{-1}\hat{\bar{\beta}}_{i+1} \cdot p_{i+1}] & \\ & & \ddots & \\ & & (p_{k-1}) & [B_{k-1k-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-\bar{c}_2) & & \\ & E_2 & (-\bar{c}_3) & \\ & & \ddots & \\ & & E_i & (-\bar{c}_{i+1}) \\ & & & \ddots \\ & & E_{k-2} & (-\bar{c}_{k-1}) \\ & & & E_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_{k-1}^{1}(\bar{\Lambda},\bar{G}) = \begin{bmatrix} E_1 & (-\hat{\bar{\beta}}_2) & & \\ & E_2 & (-\hat{\bar{\beta}}_3) & \\ & & \ddots & \\ & & E_i & (-\hat{\bar{\beta}}_{i+1}) \\ & & & \ddots \\ & & E_{k-2} & (-\hat{\bar{\beta}}_{k-1}) \\ & & & E_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}] & & & \\ (p_2) & [B_{22}^{-1} p_2 \cdot \bar{c}_2] & & \\ & \ddots & & \\ & (p_i) & [B_{ii}^{-1} p_i \bar{c}_i] & \\ & & \ddots & \\ & & (p_{k-1}) & [B_{k-1k-1}^{-1} p_{k-1} \bar{c}_{k-1}] \end{bmatrix}, \qquad (2.23)$$

Представление I73(I73′) $(k+2 \le j \le m)$ Представление I74(I74′) $(k+2 \le j \le m)$

$$\begin{bmatrix} [B_{k+2k+2}^{-1} \hat{\bar{\beta}}_{k+3} \cdot p_{k+3}] & & & \\ (p_{k+3}) & [B_{k+3k+3}^{-1} \hat{\bar{\beta}}_{k+4} \cdot p_{k+4}] & & \\ & \ddots & & \\ & (p_j) & [B_{jj}^{-1} \hat{\bar{\beta}}_{j+1} \cdot p_{j+1}] & \\ & & \ddots & \\ & & (p_{m-1}) & [B_{m-1m-1}^{-1} \hat{\bar{\beta}}_m \cdot p_m] \\ & & & (p_m)\ [B_{mm}^{-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+2} & (-\bar{c}_{k+3}) & \\ & \ddots & \\ & E_j & (-\bar{c}_{j+1}) \\ & & \ddots \\ & E_{m-1} & (-\bar{c}_m) \\ & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}_m^{k+2}(\bar{\Lambda},\bar{G}) = \begin{bmatrix} E_{k+2} & (-\hat{\bar{\beta}}_{k+3}) & \\ & \ddots & \\ & E_j & (-\hat{\bar{\beta}}_{j+1}) \\ & & \ddots \\ & E_{m-1} & (-\hat{\bar{\beta}}_m) \\ & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{k+2k+2}^{-1}] & & & \\ (p_{k+3}) & [B_{k+3k+3}^{-1} p_{k+3} \cdot \bar{c}_{k+3}] & & \\ & \ddots & & \\ & (p_j) & [B_{jj}^{-1} p_j \cdot \bar{c}_j] & \\ & & \ddots & \\ & & (p_m) & [B_{mm}^{-1} p_m \bar{c}_m] \end{bmatrix}, \qquad (2.24)$$

где

$$\left\{\begin{aligned} &\text{для } \{B_{33}\}_{3=1}^{k-1} \text{ и } \{B_{33}\}_{3=k+2}^{m} \text{ справедливы (2.20) и полностью определены} \\ &\text{в соответствии с } \{\bar{G}\}\ (2.5),\ \{\bar{\Lambda}\}\ (2.6). \ \underline{\text{При этом все}}\ \{det(B_{33}) \ne 0\}_{3=1}^{k-1} \\ &\text{и } \{det(B_{33}) \ne 0\}_{3=k+2}^{m} \text{ в соответствии с Теоремой 6(6′)[3].} \end{aligned}\right. \qquad (2.25)$$

Доказательство. Представления I6I(I6I′)÷I65(I65′) и I68(I68′)÷I72(I72′) получаем из представлений 73(73′)÷76(76′)[7] и 79(79′)÷82(82′) [7] соответственно. Их справедливость проверяется путем перемножения факторизующих матриц (2.I6) и (2.2I). При этом следует иметь в виду определения последовательностей $\{\bar{G}\}$ (2.5), $\{\bar{\Lambda}\}$ (2.6) и определения для $B_{33}(\bar{\Lambda},\bar{G})$ (2.20). Теорема доказана.

Замечание 3. Ограничения вида $[det(q_1) \ne 0$ и $det(q_{k+1}) \ne 0]$ либо $[det(q_m) \ne 0$ и $det(q_{k-1}) \ne 0]$ в теореме 26 не носят принципиального характера и могут быть сняты путем предварительного выбора нового блочного разбиения исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). На самом деле.

I°. Схема для предварительного анализа Представления I56(I56′)

I). Если $[\Delta_1^1 \ne 0 \ne det(\bar{\Lambda}_2 \equiv q_1)]$, но при этом для любого фиксированного k из интервала $(3 \le k \le m-1)$ имеет место равенство

$$\{[det(\bar{\Lambda}_k)=0] \to [\Delta_1^{k-1}=0] \text{ и } \underline{\text{при этом}}\ det(q_{k+1})=0\}, \qquad (2.26)$$

то следует выполнить новое разбиение исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) в виде[x)]

$$\bar{q}_j = \begin{cases} q_j, & \text{если } 1 \le j \le k, \\ q_{j+1}, & \text{если } k+2 \le j \le m-1, \\ \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} \\ p_{k+2} & q_{k+2} \end{bmatrix}, & \text{если } j=k+1; \end{cases} \quad \bar{r}_j = \begin{cases} r_j, & \text{если } 2 \le j \le k, \\ [r_{k+1}, \mathbb{O}_{k,k+2}], & \text{если } j=k+1, \\ \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{k+1,k+3} \\ r_{k+3} \end{bmatrix}, & \text{если } j=k+2, \\ r_{j+1}, & \text{если } k+3 \le j \le m-1; \end{cases} \quad \bar{p}_j = \begin{cases} p_j, & \text{если } 2 \le j \le k, \\ \begin{bmatrix} p_{k+1} \\ \mathbb{O}_{k+2,k} \end{bmatrix}, & \text{если } j=k+1, \\ [\mathbb{O}_{k+3,k+1}, p_{k+3}], & \text{если } j=k+2, \\ p_{j+1}, & \text{если } k+3 \le j \le m-1. \end{cases} \qquad (2.27)$$

2). Если же $[\Delta_1^1 = 0 = det(\bar{\Lambda}_2 \equiv q_1)]$, то сначала выполняется новое разбиение

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{q}_1 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{r}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{1,3} \\ r_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}_2 = [\mathbb{O}_{3,1}, p_3], && (2.28) \\ &\bar{q}_j = q_{j+1}, \text{ если } 2 \le j \le m-1,\ \bar{r}_j = r_{j+1},\ \bar{p}_j = p_{j+1}, \text{ если } 3 \le j \le m-1, && (2.29) \end{aligned}\right.$$

исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), и уже с этим разбиением снова выполняется анализ (2.26) и если необходимо, то новое разбиение (2.27). При этом в соответствии с Леммой I0 из следующего раздела всегда выполняется условие $det(\bar{q}_1) \ne 0$ в (2.28). После анализа I° Представление I56 (I56′) записывается в новых переменных $\{\bar{q}, \bar{r}, \bar{p}\}$ и при этом уже $det(\bar{q}_{k+1}) \ne 0$ в силу выполненного разбиения.

II°. Схема для предварительного анализа Представления I55(I55′)

I). Если $[\Delta_m^m \ne 0 \ne det(\bar{G}_{m-1} \equiv q_m)]$, но при этом для любого фиксированного k из интервала $(2 \le k \le m-2)$ имеет место равенство

$$\{[det(\bar{G}_k)=0] \to [\Delta_{k+1}^{m}=0] \quad \underline{\text{и при этом}}\ det(q_{k-1})=0\}, \qquad (2.30)$$

то следует выполнить новое разбиение исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) в виде

---

x) Здесь $\mathbb{O}_{i,j}$ –(блочно-прямоугольные)нулевые матрицы размерностью $[i{\cdot}j]$.

$$\bar{\bar{q}}_j=\begin{cases} q_j, & \text{если } k\le j\le m,\\ q_{j-1}, & \text{если } 2\le j\le k-2,\\ \begin{bmatrix} q_{k-2} & r_{k-1}\\ p_{k-1} & q_{k-1}\end{bmatrix}, & \text{если } j=k-1;\end{cases}\quad \bar{\bar{r}}_j=\begin{cases} r_j, & \text{если } k+1\le j\le m,\\ \begin{bmatrix} 0_{k-2,k}\\ r_k\end{bmatrix}, & \text{если } j=k,\\ [r_{k-2}, 0_{k-3,k-1}], & \text{если } j=k-1,\\ r_{j-1}, & \text{если } 3\le j\le k-2;\end{cases}\quad \bar{\bar{P}}_j=\begin{cases} p_j, & \text{если } k+1\le j\le m,\\ [0_{k,k-2}, p_k], & \text{если } j=k,\\ \begin{bmatrix} p_{k-2}\\ 0_{k-1,k-3}\end{bmatrix}, & \text{если } j=k-1,\\ p_{j-1}, & \text{если } 3\le j\le k-2.\end{cases} \quad (2.3\mathrm{I})$$

2). Если же $[\Delta_m^m=0=det(\bar{G}_{m-\bar{1}}=q_m)]$, то сначала выполняется новое разбиение

$$\begin{cases} \bar{\bar{q}}_m=\begin{bmatrix} q_{m-1} & r_m\\ p_m & q_m\end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{r}}_m=[r_{m-1}, 0_{m-2,m-1}], \quad \bar{\bar{P}}_m=\begin{bmatrix} p_{m-1}\\ 0_{m,m-2}\end{bmatrix},\\ \bar{\bar{q}}_j=q_{j-1}, \quad \text{если } 3\le j\le m-1, \quad \bar{\bar{r}}_j=r_{j-1}, \ \bar{\bar{p}}_j=p_{j-1}, \quad \text{если } 3\le j\le m, \end{cases} \quad (2.32)$$

исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), и уже с этим разбиением снова выполняется анализ (2.30) и <u>если необходимо</u>, то новое разбиение (2.3I). <u>При этом</u> в соответствии с Леммой I0 из следующего раздела, всегда выполняется условие $det(\bar{\bar{q}}_m)\neq 0$ в (2.32). После анализа Π^0 Представление I55(I55$'$) записывается в новых переменных $\{\bar{\bar{q}},\bar{\bar{z}},\bar{\bar{P}}\}$ и <u>при этом</u> уже $det(\bar{\bar{q}}_{k-1})\neq 0$ в силу выполненного разбиения.

<u>Замечание 4</u>. Процедуры (2.I4) из I^0 и (2.32) из Π^0 позволяют также снять ограничения вида $det(q_1)\neq 0$ и $det(q_m)\neq 0$ в Представлениях I(I$'$)+4(4$'$)[3]. Отметим также, что анализ, аналогичный I^0 и Π^0, можно выполнить и для Теоремы 28.

Нельзя не отметить, что выше мы продемонстрировали технику предварительных новых разбиений исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) для случая $det(q_{k+1})=0$ <u>либо</u> $det(q_{k-1})=0$, вводя невырожденные диагональные блоки $\bar{\bar{q}}_{k+1}$ и $\bar{\bar{q}}_{k-1}$ размерности минимальной из возможных блочных размерностей (т.е. 2). В случае, если блочные размерности этих матриц окажутся более высокого порядка, например, третьего

$$\bar{\bar{q}}_{k-1}=\begin{bmatrix} q_{k-3} & r_{k-2} & \\ p_{k-2} & q_{k-2} & r_{k-1}\\ & p_{k-1} & q_{k-1}\end{bmatrix} \quad \text{либо} \quad \bar{\bar{q}}_{k+1}=\begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3}\\ & p_{k+3} & q_{k+3}\end{bmatrix},$$ то техника

указанных разбиений в принципе не меняется.

3. <u>Свойства индуцированных (в общем случае квазитрехдиагональных) матриц, порождаемых факторизованными представлениями для $\mathbb{C}$ (I.I)</u>

Прежде всего отметим, что индуцированными ($\equiv$ порождаемыми) матрицами мы называем, как и прежде (см., например, Замечание 4 в [7]) средние матрицы-сомножители в представлениях для $\mathbb{C}$ (I.I), которые содержат нетождественную информацию о значении их главных блочных квазиминоров. Такими индуцированными матрицами являются, например, третий

сомножитель в (2.I), (2.3). Обратим внимание на следующее.

Если $det(\bar{\Lambda}_k)=0$ и $det(q_{k+1})=0$ в (2.3) <u>либо</u> $det(\bar{G}_k)=0$ и $det(q_{k-1})=0$ в (2.I), то после выполнения процедур, требуемых Замечанием 3, соответствующие индуцированные матрицы имеют, например, вид

$$\omega=\begin{bmatrix} \omega_{\bar{\Lambda}} & & 0\\ & \bar{\bar{q}}_{k+1} & \\ 0 & & \omega_{\bar{\bar{\Lambda}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\Lambda}_{k-1} & \\ & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k\\ p_k & (q_k-\bar{\theta}_k)\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\omega_{\bar{\Lambda}} & & 0\\ & \left\{\bar{\bar{q}}_{k+1}=\begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2}\\ p_{k+2} & q_{k+2}\end{bmatrix}=\bar{\bar{\Lambda}}_{k+2}\right\} & \\ 0 & & \omega_{\bar{\bar{\Lambda}}}=\begin{bmatrix} \bar{\bar{\Lambda}}_{k+3} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\bar{\Lambda}}_m\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

$$\Omega=\begin{bmatrix} \Omega_{\bar{\bar{G}}} & & 0\\ & \bar{\bar{q}}_{k-1} & \\ 0 & & \Omega_{\bar{G}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{G}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\bar{G}}_{k-3}\end{bmatrix}=\Omega_{\bar{\bar{G}}} & & 0\\ & \left\{\bar{\bar{q}}_{k-1}=\begin{bmatrix} q_{k-2} & r_{k-1}\\ p_{k-1} & q_{k-1}\end{bmatrix}=\bar{\bar{G}}_{k-2}\right\} & \\ 0 & & \Omega_{\bar{G}}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (q_k-\hat{\theta}_k) & r_{k+1}\\ p_{k+1} & \bar{G}_k\end{bmatrix} & & \\ & \bar{G}_{k+1} & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{G}_{m-1}\end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad (3.\mathrm{I})$$ где

$$\begin{cases} \{\bar{\bar{\Lambda}}_{\zeta+1}=\bar{q}_\zeta-\bar{p}_\zeta\cdot\bar{\bar{\Lambda}}_\zeta^{-1}\cdot r_\zeta, \ \bar{\bar{\Lambda}}_{k+2}=\bar{\bar{q}}_{k+1}\}_{\zeta=k+2}^{m-1}, \quad \{\bar{\bar{G}}_{\zeta-1}=\bar{\bar{q}}_\zeta-\bar{\bar{r}}_{\zeta+1}\cdot\bar{\bar{G}}_\zeta^{-1}\cdot\bar{\bar{p}}_{\zeta+1}, \ \bar{\bar{G}}_{k-2}=\bar{\bar{q}}_{k-1}\}_{\zeta=k-2}^{2}, \quad (3.2)\\ \text{а соответствующие матрицы } [q, r, P] \text{ – элементы исходной матрицы}\\ \mathbb{C} \text{ (I.I).}\end{cases}$$

В силу введенных выше доопределений, квадратные матрицы $\{\bar{\Lambda}_\zeta\}_{\zeta=k+3}^m$ и $\{\bar{\bar{G}}_\zeta\}_{\zeta=k-3}^1$ имеют такие же размерности и стоят на таких же местах в квазидиагональных матрицах ω и Ω соответственно как матрицы $\{\bar{\Lambda}_{\zeta+1}\}_{\zeta=k+3}^m$, $\{\bar{G}_{\zeta-1}\}_{\zeta=k-3}^1$, которые являются неопределенными в силу задания процессов $\{\bar{\Lambda}$ и $\bar{G}\}$ из-за $det(q_{k+1})=0$ и $det(q_{k-1})=0$.

По условию теоремы 26 у невырожденной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) допускается лишь по одному нулевому верхнему (<u>либо</u> нижнему) квазиминору. Следовательно, в силу только что сказанного выше ни одна из матриц $\{\bar{\bar{\Lambda}}_\zeta\}_{\zeta=k+3}^m$ и $\{\bar{\bar{G}}_\zeta\}_{\zeta=k-3}^1$ не может быть вырожденной и, следовательно, процессы $(3.2)_{\mathrm{I})}$, $(3.2)_{2)}$ (т.е. матрицы $\{\bar{\bar{\Lambda}}_\zeta\}_{\zeta=k+3}^m$ и $\{\bar{\bar{G}}_\zeta\}_{\zeta=k-3}^1$) полностью определены в отличие от матриц $\{\bar{\Lambda}_{\zeta+1}\}_{\zeta=k+3}^m$ и $\{\bar{G}_{\zeta-1}\}_{\zeta=k-3}^1$. В силу неособенности $\mathbb{C}$ (I.I) имеем $det(\omega)\neq 0$ и $det(\Omega)\neq 0$, а следовательно, $det(\omega_{\bar{\Lambda}})\neq 0\neq det(\omega_{\bar{\bar{\Lambda}}})$, $det(\Omega_{\bar{\bar{G}}})\neq 0\neq det(\Omega_{\bar{G}})$, а также (в силу доопределений) $det(\bar{\bar{q}}_{k+1})\neq 0$ и $det(\bar{\bar{q}}_{k-1})\neq 0$.

<u>Замечание 5</u>. В Теореме 27 мы рассмотрели представления I57 (I57$'$)+ +I70(I70$'$) невырожденной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) для случая одновременного выполнения условий $\mathrm{I}_{\mathrm{I})}$, $\mathrm{I}_{2)}$ <u>либо</u> одновременного выполнения условий $\Pi_{\mathrm{I})}$ и $\Pi_{2)}$. Если же окажется, в указанных[x)] представлениях I59(I59$'$), I57(I57$'$), $det(q_{k+1})=0$ и (либо) $det(q_{k+4})=0$ <u>или</u> $det(q_{k-1})=0$ и (либо) $det(q_{k-4})=0$, то следует снова воспользоваться Замечанием 3 в соответствующих случаях. Далее, опираясь на результаты Теоремы 26 и всего сказанного выше, покажем справедливость следующих результатов.

<u>Лемма I0</u>. Если квазитрехдиагональная матрица $\mathbb{C}$ (I.I) <u>неособенная</u>, то <u>два ее подряд</u> идущих верхних (нижних) главных угловых квази-

x) Такая же рекомендация будет справедлива и для представлений I60(I60$'$), I58(I58$'$).

минора одновременно в нуль не обращаются. Другими словами, равенство нулю двух подряд идущих однотипных главных угловых квазиминоров есть <u>достаточное</u> условие вырожденности матриц $\mathbb{C}$ (I.I).

<u>Доказательство</u> леммы следует, например, в случае верхних главных угловых квазиминоров из Представлений I56(I56′) с учетом (3.I)$_{I)}$. На самом деле. Равенство нулю $det(\bar\Lambda_k)=0$ по сути означает, что $\Delta_1^{k-1}=0$, т.е. верхний угловой квазиминор $(k-1)$ порядка матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) (т.е. $det(\mathbb{C}^1_{k-1})=0$) равен нулю в соответствии с определениями усеченных матриц $\mathbb{C}^1_{k-1}$ и $\mathbb{C}^m_{k+2}$ [7]. Равенство (при условии $det(\bar\Lambda_k)=0$) еще и $det\left(\begin{bmatrix}\bar\Lambda_k & r_k\\ p_k & (q_k-\bar\theta_k)\end{bmatrix}\right)=0$ по сути означало бы $\Delta_1^k=0$. Но это, в свою очередь, означало бы, что $[det(\omega_{\bar\Lambda})=0 \Rightarrow det(\mathbb{C})=0]$, что противоречило бы условию леммы о $det(\mathbb{C})\neq 0$. Следовательно, при $det(\mathbb{C})\neq 0$ обращаться в нуль Δ_1^{k-1} и Δ_1^k не могут. Кроме того, как видно из (3.I)$_{I)}$ с учетом $det(\bar q_{k+1})\neq 0\neq det(\omega_{\bar\Lambda})$, в этом случае все последующие верхние главные угловые квазиминоры $\mathbb{C}$ (I.I) также обращались бы в нуль. Аналогично доказательство и для нижних главных угловых квазиминоров $\{\Delta_k^m\}_{k=1}^m$, если воспользоваться Представлением I55(I55′) с учетом (3.I)$_{2)}$. <u>Лемма доказана</u>.

<u>Замечание 6</u>. Очевидно, Лемма I0 является соответствующим обобщением известного результата для трехдиагональных матриц (см., например, [I0,II,I2]). Кроме того, следует также отметить, что введенные нами в [4] понятия условного <u>вырождения первого рода</u> матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) по сути совпадают с вырождением $\mathbb{C}$ (I.I) в случае обращения в нуль двух <u>подряд</u> идущих однотипных квазиминоров матрицы $\mathbb{C}$ (I.I).

Отметим также, что (как следует из доказательства Леммы I0 при $det(\mathbb{C})\neq 0$) элементарные матрицы $\begin{bmatrix}\bar\Lambda_k & r_k\\ p_k & (q_k-\hat{\bar\theta}_k)\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}(q_k-\bar\theta_k) & r_{k+1}\\ p_{k+1} & \bar G_k\end{bmatrix}$ являются невырожденными. Результат следующей Леммы позволяет установить невырожденность некоторых элементарных матриц и в случае <u>одновременного</u> обращения в нуль двух близких (отдаленных) <u>однотипных</u> квазиминоров.

<u>Лемма II</u>. Пусть $\mathbb{C}$ -<u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) и пусть у этой матрицы одновременно обращаются в нуль два близких (отдаленных) однотипных квазиминора, т.е. для последовательностей матриц $\{\bar G\}$ (2.5) <u>либо</u> $\{\bar\Lambda\}$ (2.6) выполняется одно из условий I или П Теоремы 27. Тогда элементарные матрицы

$$\begin{bmatrix}\bar\Lambda_k & r_k\\ p_k & (q_k-\bar U_k)\end{bmatrix}=Q_k,\ \begin{bmatrix}(q_k-\hat{\bar U}_k) & r_{k+1}\\ p_{k+1} & \bar G_k\end{bmatrix}=\hat Q_k,\ \begin{bmatrix}\bar\Lambda_k & r_k\\ p_k & (q_k-\bar{\bar U}_k)\end{bmatrix}=\tilde Q_k,\ \begin{bmatrix}(q_k-\hat{\bar{\bar U}}_k) & r_{k+1}\\ p_{k+1} & \bar G_k\end{bmatrix}=\hat{\hat Q}_k \tag{3.3}$$

являются невырожденными.

<u>Доказательство</u>. Согласно теореме 27 и условию Леммы II о $det(\mathbb{C})\neq 0$, а также невырожденности соответствующих индуцированных матриц должны быть невырожденными и следующие их диагональные матрицы-блоки

<u>При условии</u> I$_{2)}$ При условии I$_{I)}$

$$\mathfrak{M}_{\bar\Lambda}=\begin{bmatrix} [\bar\Lambda_k] & [r_k\ \ \mathbb{O}] & \\ \begin{bmatrix}p_k\\ \mathbb{O}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(q_k-\bar U_k) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & q_{k+1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(\bar\psi_{k+2}) & (-\bar B_{k+2}\cdot r_{k+3}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O}&\mathbb{O}&\mathbb{O}\end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix}(\varphi_{k+2}) & \mathbb{O}\\ (-p_{k+3}\cdot\bar A_{k+2}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O}&\mathbb{O}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar\Lambda_{k+3} & r_{k+3} & \mathbb{O}\\ p_{k+3} & (q_{k+3}-\bar\theta_{k+3}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O}&\mathbb{O}& q_{k+4}\end{bmatrix}\end{bmatrix},\quad \mathfrak{M}_{\bar G}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}q_{k-4} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_{k-3}-\hat{\bar\theta}_{k-3}) & r_{k-2}\\ \mathbb{O} & p_{k-2} & \bar G_{k-3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-r_{k-2}\cdot\hat{\bar B}_{k-2})\\ \mathbb{O} & (\hat{\bar\psi}_{k-2})\end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix}\mathbb{O}&\mathbb{O}&\mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-\hat{\bar A}_{k-2}\cdot p_{k-2}) & (\hat{\bar\varphi}_{k-2})\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}q_{k-1} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_k-\hat{\bar U}_k)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbb{O}\\ r_{k+1}\end{bmatrix}\\ & [\mathbb{O}\ \ p_{k+1}] & [\bar G_k]\end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

<u>При условии</u> П$_{2)}$ <u>При условии</u> П$_{I)}$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda}=\begin{bmatrix} [\bar\Lambda_k] & [r_k\ \ \mathbb{O}] & \\ \begin{bmatrix}p_k\\ \mathbb{O}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(q_k-\bar{\bar U}_k) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & q_{k+1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbb{O}\cdots\mathbb{O} & (\bar\psi_{l-1}) & (-\bar B_{l-1}\cdot r_l) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O}\cdots\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \cdots & \cdots\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ (\bar\varphi_{l-1}) & \mathbb{O}\\ (-p_l\cdot\bar A_{l-1}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O}&\mathbb{O}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar\Lambda_{k+3} & & \mathbb{O}\\ & \ddots\ \bar\Lambda_{l-1} & \\ \mathbb{O} & & \begin{bmatrix}\bar\Lambda_l & r_l & \mathbb{O}\\ p_l & (q_l-\bar\theta_l) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & q_{l+1}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{bmatrix},\quad \tilde{\mathfrak{M}}_{\bar G}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{l-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_l-\hat{\bar\theta}_l) & r_{l+1}\\ \mathbb{O} & p_{l+1} & \bar G_l\end{bmatrix} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \bar G_{l+1}\ \ddots\ \bar G_{k-3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-r_{l+1}\cdot\hat{\bar B}_{l+1})\\ \mathbb{O} & (\hat{\bar\psi}_{l+1})\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \cdots & \cdots\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\cdots\mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (-\hat{\bar A}_{l+1}\cdot p_{l+1}) & (\hat{\bar\varphi}_{l+1})\ \ \mathbb{O}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}q_{k-1} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (q_k-\hat{\bar{\bar U}}_k)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbb{O}\\ r_{k+1}\end{bmatrix}\\ & [\mathbb{O}\ \ p_{k+1}] & [\bar G_k]\end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

где соответствующие матрицы $[\bar\psi,\bar\varphi,\bar\theta,\hat\theta,\bar U,\bar{\bar U},\hat U,\hat{\bar{\bar U}};\bar B,\hat{\bar B},\bar A,\hat A]$ – определены в (2.9), (2.II) и в (2.I3), (2.I5). Как нетрудно видеть, матрицы $\mathfrak{M}_{\bar\Lambda}, \mathfrak{M}_{\bar G}$; $\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar G}$ (при указанном разбиении их на блоки) являются квазитрехдиагональными матрицами. Применим теперь к каждой из них Лемму I0.

Итак, в матрицах $\mathfrak{M}_{\bar\Lambda}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda}$ первые верхние квазиминоры $\Delta_1^1(\bar\Lambda)=0$ и $\tilde\Delta_1^1(\bar\Lambda)=0$, поскольку $det(\bar\Lambda_k)=0$, но вторые квазиминоры должны быть $\Delta_1^2(\bar\Lambda)\neq 0$ и $\tilde\Delta_1^2(\bar\Lambda)\neq 0$ в силу Леммы I0 и с учетом$^{x)}$ $det(q_{k+1})\neq 0$. В противном случае было бы $det(\mathfrak{M}_{\bar\Lambda})=0=det(\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda})$. Отсюда и из формального блочного вида квазитрехдиагональных матриц $\mathfrak{M}_{\bar\Lambda}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda}$ получаем, что $det(Q_k)=det\left(\begin{bmatrix}\bar\Lambda_k & r_k\\ p_k & (q_k-\bar U_k)\end{bmatrix}\right)\neq 0$ и $det(\tilde Q_k)=det\left(\begin{bmatrix}\bar\Lambda_k & r_k\\ p_k & (q_k-\bar{\bar U}_k)\end{bmatrix}\right)\neq 0$, поскольку$^{x)}$ $det(q_{k+1})=0$. Далее имеем $\Delta_1^3(\bar\Lambda)=det(\mathfrak{M}_{\bar\Lambda})\neq 0$ и $\tilde\Delta_1^3(\bar\Lambda)=det(\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar\Lambda})\neq 0$. В противном случае было бы $det(\mathbb{C})=0$. Аналогичные рассуждения можно было бы провести и относительно нижних квазиминоров квазитрехдиагональных матриц $\mathfrak{M}_{\bar G}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_{\bar G}$, в результате чего мы получили бы, что $det(\hat Q_k)=det\left(\begin{bmatrix}(q_k-\hat{\bar U}_k) & r_{k+1}\\ p_{k+1} & \bar G_k\end{bmatrix}\right)\neq 0$ и $det(\hat{\hat Q}_k)=det\left(\begin{bmatrix}(q_k-\hat{\bar{\bar U}}_k) & r_{k+1}\\ p_{k+1} & \bar G_k\end{bmatrix}\right)\neq 0$, поскольку$^{x)}$ $det(q_{k-1})\neq 0$. <u>Лемма доказана.</u>

<u>Следствие I</u> (из Леммы II). Лемма II позволяет выполнить дальнейшие <u>разложения соответ</u>ствующих индуцированных матриц для <u>неособенных</u>

$^{x)}$Этого всегда можно достичь в силу Замечаний 3 и 5.

(в общем случае квазитрехдиагональных) матриц $\mathcal{M}_{\bar\Lambda}, \widetilde{\mathcal{M}}_{\bar\Lambda}, \mathcal{M}_{\bar G}, \widetilde{\mathcal{M}}_{\bar G}$. Справедливы следующие факторизованные представления

<u>При условии</u> $I_2)$ <u>При условии</u> $I_1)$

$$\mathcal{M}_{\bar\Lambda}=\begin{bmatrix} \mathbb{E}_k & & & \\ \vec{0} & E_{k+1} & & \\ (\xi_{k+2}) & \vec{0}^T & \mathbb{E}_{k+3} & \\ & & \vec{0} & E_{k+4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_k & & & \\ & q_{k+1} & & \\ & & \varepsilon_{k+3} & \\ & & & q_{k+4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{E}_k & \vec{0}^T & (\mu_{k+2}) & \\ & E_{k+1} & \vec{0} & \\ & & \mathbb{E}_{k+3} & \\ & & & E_{k+4} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\bar G}=\begin{bmatrix} E_{k-4} & \vec{0} & & \\ & \mathbb{E}_{k-3} & \vec{0}^T & (\hat\mu_{k-2}) \\ & & E_{k-1} & \\ & & & \mathbb{E}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{k-4} & & & \\ & \hat\varepsilon_{k-3} & & \\ & & q_{k-1} & \\ & & & \hat Q_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{k-4} & & & \\ \vec{0}^T & \mathbb{E}_{k-3} & & \\ & \vec{0} & E_{k-1} & \\ (\hat\xi_{k-2}) & \vec{0}^T & & \mathbb{E}_k \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

где

$$\begin{cases} \xi_{k+2}=(V_{k+2}\cdot Q_k^{-1}),\ \mu_{k+2}=(Q_k^{-1}\cdot W_{k+2}),\ \varepsilon_{k+3}=(Q_{k+3}-V_{k+2}\cdot Q_k^{-1}\cdot W_{k+2}), \\ \hat\xi_{k-2}=(\hat Q_k^{-1}\cdot\hat V_{k-2}),\ \hat\mu_{k-2}=(\hat W_{k-2}\cdot\hat Q_k^{-1}),\ \hat\varepsilon_{k-3}=(Q_{k-3}-\hat W_{k-2}\cdot\hat Q_k^{-1}\cdot\hat V_{k-2}),\ \vec{0}=(0,0),\ T - \text{знак} \end{cases} \tag{3.7}$$

транспонирования. <u>При этом</u> $det(\hat Q_k)\neq 0\neq det(Q_k)$, $det(\varepsilon_{k+3})\neq 0\neq det(\hat\varepsilon_{k-3})$.

<u>При условии</u> $\Pi_2)$ <u>При условии</u> $\Pi_1)$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\bar\Lambda}=\begin{bmatrix} \mathbb{E}_k & & & & \\ & E_{k+1} & & & \\ \mathbb{O} & & \ddots\ E_{l-1} & & \\ (\tilde\xi_{l-1}) & \mathbb{O} & & \mathbb{E}_l & \\ & & & & E_{l+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_k & & & & & \\ & q_{k+1} & & & & \\ & & \Lambda_{k+3} & & & \\ & & & \ddots\ \Lambda_{l-1} & & \\ & & & & \tilde\varepsilon_l & \\ & & & & & q_{l+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{E}_k & \mathbb{O} & (\tilde\mu_{l-1}) & & \\ & E_{k+1} & \mathbb{O} & & \\ & & \ddots\ E_{l-1} & & \\ & & & \mathbb{E}_l & \\ & & & & E_{l+1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{\bar G}=\begin{bmatrix} E_{l-1} & & & & \\ & \mathbb{E}_l & \mathbb{O} & (\hat{\tilde\mu}_{l+1}) & \\ & & E_{l+2} & \mathbb{O} & \\ & & & \ddots\ E_{k-1} & \\ & & & & \mathbb{E}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{l-1} & & & & \\ & \hat{\tilde\varepsilon}_l & & & \\ & & G_{l+1} & & \\ & & & \ddots\ G_{k-3} & \\ & & & & \hat{\widetilde{Q}}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{l-1} & & & & \\ & \mathbb{E}_l & & & \\ & & E_{l+1} & & \\ & \mathbb{O} & & \ddots\ E_{k-1} & \\ & (\hat{\tilde\xi}_{l+1}) & \mathbb{O} & & \mathbb{E}_k \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

где

$$\begin{cases} \tilde\xi_{l-1}=(\widetilde{V}_{l-1}\cdot\widetilde{Q}_k^{-1}),\ \tilde\mu_{l-1}=(\widetilde{Q}_k^{-1}\cdot\widetilde{W}_{l-1}),\ \tilde\varepsilon_l=(\widetilde{Q}_l-\widetilde{V}_{l-1}\cdot\widetilde{Q}_k^{-1}\cdot W_{l-1}), \\ \hat{\tilde\xi}_{l+1}=(\hat{\widetilde{Q}}_k^{-1}\cdot\hat{\widetilde{V}}_{l+1}),\ \hat{\tilde\mu}_{l+1}=(\hat{\widetilde{W}}_{l+1}\cdot\hat{\widetilde{Q}}_k^{-1}),\ \hat{\tilde\varepsilon}_l=(\hat{\widetilde{Q}}_l-\hat{\widetilde{W}}_{l+1}\cdot\hat{\widetilde{Q}}_k^{-1}\cdot\hat{\widetilde{V}}_{l+1}),\ \mathbb{O} - \text{тождественно ну-} \end{cases} \tag{3.9}$$

левая матрица. <u>При этом</u> $det(\widetilde{Q}_k)\neq 0\neq det(\hat{\widetilde{Q}}_k)$, $det(\tilde\varepsilon_l)\neq 0\neq det(\hat{\tilde\varepsilon}_l)$.

Здесь в (3.6)÷(3.9) соответствующие матриц-блоки $[V, W, \hat V, \hat W, \widetilde V, \widetilde W, \hat{\widetilde V}, \hat{\widetilde W}]$ – определены в Представлениях I57(I57′)÷I60(I60′), а невырожденные квазидиагональные блоки $[Q_k, \hat Q_k, \widetilde Q_k, \hat{\widetilde Q}_k]$ есть (3.3).

<u>Доказательство</u>. Воспользовавшись невырожденностью матриц-блоков $[Q_k, \hat Q_k, \widetilde Q_k, \hat{\widetilde Q}_k]$, в квазитрехдиагональных матрицах (3.4) и (3.5), получаем представления (3.6) и (3.8) при соответствующих условиях. А неособенность $\varepsilon_{k+3}, \hat\varepsilon_{k-3}$ и $\tilde\varepsilon_l, \hat{\tilde\varepsilon}_l$ является прямыми следствиями невырожденности матриц $\mathcal{M}_{\bar\Lambda}, \mathcal{M}_{\bar G}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_{\bar\Lambda}, \widetilde{\mathcal{M}}_{\bar G}$ соответственно. Справедливость представлений (3.6) и (3.8) можно проверить путем перемножения блочных матриц.

<u>Следствие 2</u>. Для обратных матриц $\mathbb{B}(\bar\Lambda)=(\mathcal{M}_{\bar\Lambda})^{-1}$, $\hat{\mathbb{B}}(\bar G)=(\mathcal{M}_{\bar G})^{-1}$, $\widetilde{\mathbb{B}}(\bar\Lambda)=(\widetilde{\mathcal{M}}_{\bar\Lambda})^{-1}$ и $\hat{\widetilde{\mathbb{B}}}(\bar G)=(\widetilde{\mathcal{M}}_{\bar G})^{-1}$ справедливы следующие представления

<u>При условии</u> $I_2)$ <u>При условии</u> $I_1)$

$$\mathbb{B}(\bar\Lambda)=\begin{bmatrix} [Q_k^{-1}+\mu_{k+2}\cdot\varepsilon_{k+3}^{-1}\cdot\xi_{k+2}] & \vec{0}^T & (-\mu_{k+2}\cdot\varepsilon_{k+3}^{-1}) \\ \vec{0} & q_{k+1} & \vec{0} \\ (-\varepsilon_{k+3}^{-1}\cdot\xi_{k+2}) & \vec{0}^T & \varepsilon_{k+3}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbb{B}}(\bar G)=\begin{bmatrix} \hat\varepsilon_{k-3}^{-1} & \vec{0}^T & (-\hat\varepsilon_{k-3}^{-1}\cdot\hat\mu_{k-2}) \\ \vec{0} & q_{k-1}^{-1} & \vec{0} \\ (-\hat\xi_{k-2}\cdot\hat\varepsilon_{k-3}^{-1}) & \vec{0}^T & [\hat Q_k^{-1}+\hat\xi_{k-2}\cdot\hat\varepsilon_{k-3}^{-1}\cdot\hat\mu_{k-2}] \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

<u>При условии</u> $\Pi_2)$ <u>При условии</u> $\Pi_1)$

$$\widetilde{\mathbb{B}}(\bar\Lambda)=\begin{bmatrix} [\widetilde{Q}_k^{-1}+\tilde\mu_{l-1}\cdot\tilde\varepsilon_l^{-1}\cdot\tilde\xi_{l-1}] & \mathbb{O} & (-\mu_{l-1}\cdot\tilde\varepsilon_l^{-1}) \\ \mathbb{O} & \{diag(q_{k+1}^{-1}, \Lambda_z^{-1})\}_{z=k+3}^{l-1} & \mathbb{O} \\ (-\tilde\varepsilon_l^{-1}\cdot\tilde\xi_{l-1}) & \mathbb{O} & (\tilde\varepsilon_l^{-1}) \end{bmatrix}, \quad \hat{\widetilde{\mathbb{B}}}(\bar G)=\begin{bmatrix} (\hat{\tilde\varepsilon}_l^{-1}) & \mathbb{O} & (-\hat{\tilde\varepsilon}_l\cdot\hat{\tilde\mu}_{l+1}) \\ \mathbb{O} & \{diag(G_z^{-1}, q_{k-1}^{-1})\}_{z=k-3}^{l+1} & \mathbb{O} \\ (-\hat{\tilde\xi}_{l+1}\cdot\hat{\tilde\varepsilon}_l^{-1}) & \mathbb{O} & [\hat{\widetilde{Q}}_k^{-1}+\hat{\tilde\xi}_{l+1}\cdot\hat{\tilde\varepsilon}_l^{-1}\cdot\hat{\tilde\mu}_{l+1}] \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

где соответствующие матрицы $[\varepsilon, \tilde\varepsilon, \hat\varepsilon, \hat{\tilde\varepsilon}; \xi, \hat\xi, \tilde\xi, \hat{\tilde\xi}; \mu, \hat\mu, \tilde\mu, \hat{\tilde\mu}; Q, \hat Q, \widetilde Q, \hat{\widetilde Q}]$ – определены в виде (3.7), (3.9).

<u>Доказательство</u>. Обратные матрицы (3.10) и (3.11), при соответствующих условиях, получаем из представлений (3.6) и (3.8) соответственно. А их справедливость легко проверяется на основа основных равенств $\mathcal{M}\cdot\mathcal{B}=E=\mathcal{B}\cdot\mathcal{M}$ при соответствующих условиях.

<u>Замечание 7</u>. Итак, нами установлена невырожденность <u>указанных</u> выше элементарных матриц, стоящих на квазидиагонали соответствующих индуцированных матриц в разложении $\mathbb{C}$ (I.I), при условиях, когда обращаются в нуль по одному или одновременно по два однотипных квазиминора. При этом отсутствуют по сути ограничения $\{det(q_i)\neq 0\}_{i=1}^{m}$ на квазидиагональные блоки исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I).

Нетрудно видеть (на основе [6]), что подобная ситуация имеет место и в случае одновременного обращения в нуль более чем двух <u>однотипных</u> квазиминоров у исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). Если же $\mathbb{C}$ (I.I) является трехдиагональной матрицей, то <u>все</u> элементарные матрицы [6] являются невырожденными, если $P_k\neq 0\neq z_k$ при соответствующих K.

<u>Замечание 8</u>. Используя полученные выше результаты, легко построить (при наличии нулевых квазиминоров у $\mathbb{C}$ (I.I)) множество компактных представлений для обратной матрицы $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ подобно тому, как это имело место [3,8] в случае всех отличных от нуля квазиминоров у $\mathbb{C}$ (I.I).

<u>Заключение</u>

I. Построены полные естественные факторизации (на основе элементарных матриц) квазитрехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I), а также указан способ построения множества компактных представлений явного вида матриц к ним обратных, в случае обращения в нуль одного или (одновременно) двух из их однотипных главных угловых квазиминоров.

2. Показано, что квазитрехдиагональная матрица общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) является вырожденной, если два ее соседних однотипных главных угловых квазиминора обращаются в нуль одновременно. Этот результат является обобщением известного результата в случае трехдиагональных матриц.

3. Сняты ограничения на невырожденность квазидиагональных блоков матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) при ее факторизациях как при наличии (так и при отсутствии) нулевых главных угловых квазиминоров у $\mathbb{C}$ (I.I).

4. Лемма IO позволяет снять известное ограничение

$$q_1 \neq 0 \, [det(q_1) \neq 0] \quad \text{и (или)} \quad q_m \neq 0 \, [det(q_m) \neq 0],$$

характерное для методов монотонных скалярных(матричных) прогонок.

В целом же настоящая работа (как очевидно) дает возможность построить простые обобщения схем монотонных прогонок при наличии нулевых ведущих угловых (квази)миноров у матрицы $\mathbb{C}$(I.I).

Авторы признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящей серии работ и предоставленную возможность работать над ней.

Литература

I. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-86-504, Дубна 1986.
2. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-87-524, Дубна 1987.
3. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-87-533, Дубна 1987.
4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-88-598, Дубна 1988.
5. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-88-599, Дубна 1988.
6. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-88-786, Дубна 1988.
7. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-88-922, Дубна 1988.
8. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-87-623, Дубна 1987.
9. Emelyanenko G.A. JINR, E11-83-71, Dubna, 1983.
IO. Емельяненко Г.А. ОИЯИ PII-86-531, Дубна, 1986.
II. Ильин В.П., Кузнецов Ю.А. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука , 1985.
I2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука , 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 марта 1989 года.