89-191

e+

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Ж 694

Р11-89-191

Е.П.Жидков, Э.Г.Никонов*, Б.Н.Хоромский

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

---

*Московский государственный университет

1989

В квантовой теории поля для описания двухчастичных кварковых систем, например, векторных мезонов, активно используется квазипотенциальный подход [1-5]. В работе [6] для расчетов спектра масс и ширин лептонных распадов возбужденных состояний систем типа $J/\psi$, $\Upsilon$-мезонов использовалось квазипотенциальное уравнение с гиперсингулярным оператором на полуоси. В настоящей работе на основе результатов [7] исследуются функциональные свойства такого типа операторов, получены оценки погрешности аппроксимации методом Галеркина задачи на собственные значения для гиперсингулярных интегральных операторов на полуоси. Найдены условия разложимости погрешности приближенных решений по параметру $r^{-1}$, где $[0; r]$ - отрезок дискретизации исходного интегрального оператора, заданного на полуоси.

§ 1. Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\left.\begin{aligned} A\psi &= \mu\psi \\ (\psi,\psi) &= 1 \end{aligned}\right\}, \qquad /1/$$

где $\psi$ - неизвестная функция из подпространства $L_{2,\infty}$ антисимметричных функций гильбертова пространства $L^2(-\infty,\infty)$, $\mu$ - неизвестный спектральный параметр. Оператор $A \in (L_{2,\infty} \to L_{2,\infty})$ и имеет вид [7]

$$A = A_1 + \alpha L, \qquad /1.2/$$

где операторы $A_1$ и $L$ определяются из соотношений

$$(A_1\psi)(p) = p^2\psi(p) + \beta^3\pi^{-1}\frac{d^2}{dp^2}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|p-k|\,\psi(k)\,dk\,;$$

$$(L\psi)(p) = \pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|p-k|\,\psi(k)\,dk\,.$$

Здесь $\psi(p) \in L_{2,\infty}$, $\alpha$, $\beta$ - заданные положительные константы, $p, k \in (-\infty,\infty)$. Решение задачи будем искать в классе функций $D(A) = \{\psi \in L_{2,\infty} : \|A_1\psi\| < \infty\}$. Согласно [7], $A_1$ является симметрическим положительно определенным оператором. Существует вполне непрерывный оператор $T_1 = A_1^{-1}$ . Будем обозначать далее собственные элементы оператора $A_1$ через $z_m$. Причем

$$z_m(p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\infty}^{\infty} \exp(ipr)\,\phi_m(r)\,dr, \quad m = \overline{1,\infty},$$

где

$$\phi_m(r) = c\,Ai(\beta r + \xi_m);$$

здесь

$$Ai(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(t^3/3 + \xi t)]\,dt$$

есть функция Эйри, а $\xi_m$ - нули функции Эйри. Собственные значения оператора $A_1$ имеют вид $\chi_m = -\beta^2 \xi_m$. Можно доказать /7/, что для любого числа $\beta > 0$ найдется такое число $\alpha_0 = \alpha_0(\beta)$ , что для всех $\alpha < \alpha_0$ оператор $A$ имеет вполне непрерывный обратный оператор $T \in (L_{2,\infty} \to L_{2,\infty})$.

Аппроксимируем задачу /1.1/ методом Галеркина на предельно плотной последовательности замкнутых подпространств $\{H_n\}$, $H_n = \mathrm{span}\{\eta_i\}_1^n$ , каждому из которых соответствует проектор вида

$$P_n\,\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\psi)\,\eta_i(x). \tag{/1.3/}$$

Здесь $\psi \in L_{2,\infty}$, а $\eta_i$ - кусочно-линейные функции вида

$$\eta_i(x) = \begin{cases} h^{-1}x + 1 - i, & (i-1)h \le x \le ih \\ -h^{-1}x + 1 + i, & ih \le x \le (i+1)h, \end{cases}$$

где $h = r/n$ - шаг дискретизации, $[0;\,r]$ - отрезок вещественной оси. Коэффициенты $f_i(\psi)$ выберем так, чтобы $P_n\psi$ минимизировал функционал $\|\psi - P_n\psi\|^2_{L_{2,\infty}}$ . В результате получим уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} (b_{ij}\,f_j(\psi) - 2(\psi, \eta_j)) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{/1.4/}$$

где $b_{ij} = (\eta_i, \eta_j)$; $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$. В дальнейшем для анализа оценок погрешностей будем использовать проектор вида /1.3/ с коэффициентами $f_i(\psi)$ , получающимися из уравнения /1.4/. Обозначим $P^{(n)} = I - P_n$.

Теорема 1.1. Справедлива оценка

$$\|P^{(n)} T_1\|_{L_{2,\infty}} \le c_h h^{\gamma} + c_r r^{-\gamma} ,$$

где $\gamma \in (0; 1/4)$.

Доказательство. Введем пространство Соболева /с нецелым индексом $\gamma \ge 0$/ периодических функций с периодом длины $r$, которое можно отождествить с пространством $H^{\gamma}(\Gamma)$ /12/, $\gamma \ge 0$, где $\Gamma$ - окружность длины $r$. Используем также пространства $H^{\gamma} = H^{\gamma}(-\infty, \infty)$, определенные на всей оси /12/ при $\gamma \ge 0$. Имеем для всех $\psi \in H^0$

$$\|P^{(n)} T_1 \psi\|_{H^0} = \|\sum_{i=1}^{\infty} (\psi, z_i)\chi_i^{-1} P^{(n)} z_i\|_{H^0} \le \sum_{i=1}^{\infty} |(\psi, z_i)| \times$$

$$\times |\chi_i|^{-1} \|P^{(n)} z_i\|_{H^0} \le \|\psi\|_{H^0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\chi_i|^{-2} \|P^{(n)} z_i\|^2_{H^0}\right)^{1/2} .$$

Далее запишем

$$\|P^{(n)} z_i\|^2_{H^0} \le \int_0^r |P^{(n)} \bar{z}_i(x)|^2 dx + \int_r^{\infty} z_i^2(x)\,dx + h^2 (\max_{x \in [r-h,\, r]} |z_i(x)|)^2 . \quad /1.5/$$

Функция $\bar{z}_i(x)$ в выражении $\int_0^r |P^{(n)} \bar{z}_i(x)|^2 dx$ совпадает с $z_i(x)$ на отрезке $[0; r-h]$ и является линейной на отрезке $[r-h, r]$, причем, $\bar{z}_i(r) = 0$ и

$$\int_{r-h}^{r} |\bar{z}_i(x) - z_i(x)|^2 dx \le h^2 (\max_{x \in [r-h,\, r]} |z_i(x)|)^2 .$$

Продолжим функцию $\bar{z}_i(x)$ периодическим образом на всю действительную ось, тогда $\|\bar{z}_i\|_{H^0} = \|\bar{z}_i\|_{H^0(\Gamma)}$. Согласно /8-11/, для выбранного проектора справедливо неравенство

$$\|P^{(n)} \bar{z}_i(x)\|_{H^0(\Gamma)} \le c h^{\gamma} \|\bar{z}_i\|_{H^{\gamma}(\Gamma)} ,$$

где $c$ не зависит от $h$ и $\bar{z}_i(x)$. В силу интерполяционной теоремы /12/ можем записать, что

$$\|\bar z_i\|_{H^{\gamma}(\Gamma)} \le (\|\bar z_i\|_{H^{\circ}(\Gamma)})^{1-\gamma} (\|z_i\|_{H^1(\Gamma)})^{\gamma} .$$

Так как справедливы неравенства

$$\|\bar z_i\|_{H^{\circ}(\Gamma)} \le \|\bar z_i\|_{H^{\circ}} \le c_1\|z_i\|_{H^{\circ}} ;$$

$$\|\bar z_i\|_{H^1(\Gamma)} \le \|\bar z_i\|_{H^1} ;$$

$$\|\bar z_i\|_{H^1} \le \|\bar z_i'\|_{H^{\circ}} \le c_2 \|z_i'\|_{H^{\circ}}$$

и, кроме того, согласно [7],

$$\|z_i'\|_{H^{\circ}} \le c_D |\chi_i| \|z_i\|_{H^{\circ}} ,$$

то

$$\int_0^r |P^{(n)} \bar z_i(x)|^2 dx \le c_h h^{\gamma} |\chi_i|^{\gamma} \|z_i\|_{H^{\circ}} . \qquad /1.6/$$

Далее оценим второе слагаемое

$$\int_r^{\infty} z_i^2(x)\, dx \le r^{-2\gamma}\int_r^{\infty} |x|^{2\gamma} z_i^2(x)\, dx \le c r^{-2\gamma}\int_r^{\infty} (1+|x|^2)^{\gamma} z_i^2(x)\, dx \le$$

$$\le c r^{-2\gamma}\int_0^{\infty} (1+|x|^2)^{\gamma} z_i^2(x)\, dx .$$

Используя представление $z_i(x)$ и эквивалентную норму в $H^{\gamma}$ [12]

$$\|\phi_i\|^2_{H^{\gamma}} = \int_0^{\infty} (1+|x|^2)^{\gamma} z_i^2(x)\, dx ,$$

получим

$$\int_r^{\infty} z_i^2(x)\, dx \le c\, r^{-2\gamma}\|\phi_i\|^2_{H^{\gamma}} .$$

Далее, согласно [12], имеем

$$\| \phi_i \|_{H^\gamma} \leq (\| \phi_i \|_{H^\circ})^{1-\gamma} \; (\| \phi_i \|_{H^1})^{\gamma} \quad ,$$

и, кроме того,

$$\| \phi_i \|_{H^1} \leq \| \phi'_i \|_{H^\circ} .$$

Согласно определению $\phi_i$, получим

$$\| \phi'_i \|^2_{H^\circ} \leq 2 \int_0^\infty [ A'i(\beta r + \xi_i )]^2 dr .$$

Из свойств функции Эйри [13] следует, что $A'i(-x) \leq Ax^{1/4}$, $x > 0$, A не зависит от x. Поэтому можно показать [7], что

$$\| \phi'_i \|_{H^\circ} \leq c_1 | \chi_i |^{3/4} \; \| \phi_i \|_{H^\circ} \quad .$$

Так как $\| z_i \|_{H^\circ} = \| \phi_i \|_{H^\circ}$, то окончательно получим

$$\left( \int_r^\infty z_i^2(x)\, dx \right)^{1/2} \leq c_r \, r^{-\gamma} | \chi_i |^{3\gamma/4} \; \| z_i \|_{H^\circ} . \qquad /1.7/$$

Представив /1.6/ и /1.7/ в /1.5/, получим

$$\| P^{(n)} T_1 \psi \| \leq \| \psi \| [ (c_h h^\gamma + c_r r^{-\gamma}) \sum^\infty | \chi_i |^{-2+2\gamma} + h \max_{x \in [r-h, r]} | z_i(x) | ] .$$

Пренебрегая слагаемым $h \cdot \max_{x \in [r-h,r]} | z_i(x) |$ в силу предположения о равномерной по i ограниченности $| z_i(x) |$, $| z'_i(x) |$, $x > r$ и используя соотношение $\chi_i \sim i^{2/3}$, при $\gamma < 1/4$, получим утверждение теоремы.

Согласно [7], $T = T_1 G$, где G - ограниченный оператор, поэтому при $n \to \infty$, $\| P^{(n)} T \| \to 0$ в силу теоремы 1.1.

Для решений задачи /1.1/ справедлива оценка [7]

$$\| P^{(n)} \psi_k \|^2 \leq d_1 h^2 \| \psi'_k \|^2_{L_{2,\infty}} + d_2 r^{-4} \| x^2 \psi_k(x) \|^2_{L_{2,\infty}} \; , \qquad /1.8/$$

где $\psi_k$ - k-тая собственная функция оператора A; $d_1$, $d_2$ не зависят от h, r и $\psi_k$. В работе [7] для погрешности приближенных собственных чисел $\mu_{k,n}$ в случае однократного изолированного собственного значения $\mu_k$ получена оценка

$$\mu_{k,n} - \mu_k = \mu_{k,n}\,(1+\epsilon_{k,n})\,\|P^{(n)}\psi_k\|^2_{L_{2,\infty}} , \qquad /1.9/$$

где $\epsilon_{k,n} = O(\|P^{(n)}T\|) \to 0$ при $n \to \infty$ согласно теореме 1.1.

Отметим, что можно получить более точное приближение $\overline{\mu_{k,n}}$ к числу $\mu_k$, для которого

$$|\overline{\mu_{k,n}} - \mu_k| \le |\mu_{k,n}|\, O(\|P^{(n)}T\|)\,\|P^{(n)}\psi_k\|^2_{L_{2,\infty}} ,$$

если при одинаковом шаге $h$ для двух различных значений $r$ вычислить $\mu_{k,n}$ и исключить первое слагаемое в равенстве /1.9/, предполагая, что величина $\|P^{(n)}\psi_k\|^2$ имеет разложение по степеням $r^{-1}$, содержащее хотя бы одно слагаемое.

§ 2. В работе /14/ были получены условия разложимости погрешности приближенных решений по параметру $r^{-1}$, где $[0;r]$ - интервал дискретизации для операторов вида $V+G$, определенных на полуоси, где $V$ - неограниченный симметрический оператор в гильбертовом пространстве, а $G$ - интегральный оператор с ограниченным в $H$ ядром. Сформулируем более общую теорему о разложении погрешности по параметру $r^{-1}$, чем теорема 1 § 1 из /14/. Определим проектор $P_r$ такой, что для $x(t) \in H = L^2[0;\infty)$ имеем

$$P_r\, x(t) = \begin{cases} x(t), & t \le r, \\ 0, & t > r, \end{cases}$$

тогда

$$\|x - P_r x\|^2 = \int_r^\infty x^2(t)\,dt, \quad r > 0 .$$

Обозначим $P^{(r)} = I - P_r$. Сформулируем задачу на собственные значения для симметрического оператора $A$ в виде нелинейного уравнения /15/

$$\Phi(z) = \begin{Bmatrix} Ax - \lambda x \\ 2^{-1}(x,x) - 2^{-1} \end{Bmatrix} = 0 , \qquad /2.1/$$

где $z = (x, \lambda)$ - элемент прямой суммы $H_1 = H + R$, $x \in H$, $\lambda \in R$, $\Phi \in (D(A) + R \to R(A) + R)$, $R$ - множество действительных чисел, $D(A)$ - область определения, $R(A)$ - область значений оператора $A$. Обозначим через $z^* = (x^*, \lambda^*)$ точное решение задачи /2.1/.

Рассмотрим линейный ограниченный симметрический оператор $A_r$, аппроксимирующий оператор $A$ следующим образом:

$A_r = P_r A P_r$, $A_r \in (P_r D(A) \to P_r R(A))$.

Задачу на собственные значения для оператора $A_r$ представим аналогично /2.1/ в виде нелинейного уравнения

$$\Phi_r(z) = \begin{Bmatrix} A_r x - \lambda P_r x \\ 2^{-1}(P_r x, P_r x) - 2^{-1} \end{Bmatrix} = 0, \qquad /2.2/$$

где

$z = (x, \lambda) \in (P_r D(A) + R)$ и $\Phi_r \in (P_r D(A) + R \to P_r R(A) + R)$.

Определим $P_r z = (P_r x, \lambda)$. Пусть в пространстве $H$ заданы линейные множества $B$ и $B'$:

$B \subset D(A) \subset H$, $B' \subset R(A) \subset H$, $x^* \in B$.

Эти множества определяются классами разрешимости задачи

$\Phi'(z^*) z = f$, $f = (g, \mu)$, $z = (x, \lambda)$;

если $g \in B'$, то $x \in B$, и при этом $A(B) \subset B'$. Обозначим $B_1 = B + R$, $B'_1 = B' + R$, тогда $f \in B'_1$, $z \in B_1$. Наша цель - получить разложение величины

$$\Delta_r = z_r^* - P_r z^* = P_r \sum_{k=1}^{N} c \; (z^*) r^{-km_0 + m_3} + \Omega_r, \; \|\Omega_r\| = O(r^{-Nm_0 + m_3}),$$

$$m_3 - m_0 < 0 \qquad /2.3/$$

по степеням $r^{-1}$; $z_r^*$ - точное решение задачи /2.2/.

Теорема 2.1.

I. Пусть выполнены условия:

1/ существует однократное изолированное собственное число $\lambda^*$ задачи /2.1/ с собственной функцией $x^*$

$z^* = (x^*, \lambda^*) \in B_1$;

2/ $\|[\Phi'(z^*)]^{-1} P^{(r)}\| \to 0$ при $r \to \infty$;

3/ $\|A_r - A\| \to 0$ при $r \to \infty$.

Тогда существует такое число $r_0 > 0$, что для всех $r > r_0$ оператор $\Phi'_r(P_r z^*)$ имеет равномерно ограниченный обратный и

$$\| \Phi_r'(P_r z^*)^{-1} \| \le M_1 ,$$

где $M_1$ не зависит от $r$.

II. Если выполнены условия 1/-3/ и условие

4/ $\|\Phi_r(P_r z^*)\| = 0$ при $r \to \infty$,

тогда найдется такое число $r_1 > 0$, что для всех $r > r_1$ в некоторой $\delta$-окрестности элемента $P_r z^*$ существует единственное решение $z_r^*$ задачи /2.2/ такое, что $\| P_r z^* - z_r^* \| \to 0$ при $r \to \infty$.

III. Если выполнены условия 1/-4/ и для любого $r > \max(r_0, r_1)$ существует разложение

$$5/\ P_r A x - A_r P_r x = P_r \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\, r^{-km_0 + m_1} + \Omega_{r,o}, \quad m_1 - m_o < 0,$$

для любого $x \in B$, $a_k(x) \in B'$ и не зависят от $r$;

$$6/\ (y, x) - (P_r y, P_r x) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k(x, y)\, r^{-km_0 + m_2} - \omega_{r,0}, \quad m_2 - m_0 < 0,$$

для любых $x \in B$, $y \in B$, $\mu_k(x,y)$ не зависят от $r$ и выполнены соотношения

$$\| \Omega_{r,o} \| = o(r^{-Nm_0 + m_1}), \quad | \omega_{r,o} | = o(r^{-Nm_0 + m_2}),$$

$m_o$ - положительное целое число, тогда для решения $z_r^*$ уравнения /2.2/ справедливо разложение

$$z_r^* - P_r z^* = P_r \sum_{k=1}^{N} c_k(z^*)\, r^{-km_0 + m_3} + \Omega_r,$$

$$\|\Omega_r\| = o(r^{-Nm_0 + m_3}), \quad m_o - m_3 < 0,$$

где $c_k(z^*) \in B_1$ и не зависят от $r$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Используя условие 1/ и результаты [16], можно доказать [17], что оператор $\Phi'(z^*)$ имеет ограниченный обратный и

$$\| \Phi'(z^*)^{-1} \| \le M, \quad M = \max(1, m^{-1}),$$

где $m = \inf\limits_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \lambda^*} | \lambda^* - \lambda |$, $\sigma(A)$ - спектр оператора $A$. Представим оператор $\Phi_r'(P_r z^*)$ в виде

$$\Phi_r'(P_r z^*) = \Phi'(z^*) + \Delta, \ \Delta = \Phi_r'(P_r z^*) - \Phi'(z^*).$$

С помощью определения производной Фреше /15/ получим

$$\Delta z = [\Phi_r'(P_r z^*) - \Phi'(z^*)] z = a_1 + a_2,$$

где

$$a_1 = \left\{ \begin{matrix} (A_r - A) x - \lambda(P_r x^* - x^*) \\ (x, P_r x^* - x^*). \end{matrix} \right\}.$$

В силу ограниченности по норме элемента $z(\|z\|^2 = \|x\|_H^2 + \lambda^2$, $\|z\| \le 1)$, свойств оператора $P_r$ и условия 3/ теоремы имеем $\|a_1\| \to 0$ при $r \to \infty$. Второе слагаемое имеет вид

$$a_2 = \left\{ \begin{matrix} -\lambda^*(P_r x - x) \\ 0 \end{matrix} \right\},$$

$\|\Phi'(z^*)^{-1} a_2\| \to 0$ при $r \to \infty$ в силу условия 2/. Следовательно, существует такое число $r_0 > 0$, что для всех $r > r_0$

$$\|\Phi'(z^*)^{-1} \Delta\| < 1.$$

Поэтому по теореме об обратном операторе /18/ для $\Phi_r'(P_r z^*)$ существует непрерывный обратный, ограниченный по норме некоторой константой $M_1$, не зависящей от $r$.

Доказательство утверждений II и III полностью совпадает с доказательством соответствующих утверждений теоремы 1 § 1 из /14/.

Рассмотрим класс операторов, к которым применима теорема 2.1. Пусть далее $A$ - вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_{2,\infty}$ с полной системой собственных функций $\{\phi_i\}_1^\infty$, которым соответствуют собственные числа $\mu_i$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.1. Пусть для числа $\epsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\left( \int_0^\infty p^{2\epsilon} \phi_i^2(p)\, dp \right)^{1/2} \le \mu_i^\epsilon \|\phi_i\|_{L_{2,\infty}},$$

для всех $i = \overline{1, \infty}$ и ряд $\sum_{i=1}^\infty \mu_i^{2-2\epsilon}$ сходится, тогда выполнены условия 2/-4/ теоремы 2.1.

Доказательство. Заметим, что для любого $\psi \in L_{2,\infty}$

$$|(P^{(r)}\psi, \phi_i)| = |\int_r^\infty \psi(p)\,\phi_i(p)\,dp| \le \|\psi\|\, r^{-\epsilon} \left(\int_r^\infty p^{2\epsilon}\, \phi_i^2(p)\,dp\right)^{1/2} \le \qquad /2.4/$$

$$\le r^{-\epsilon}\, \mu_i^{\epsilon}\, \|\phi_i\|\, \|\psi\|$$

для всех $i = \overline{1, \infty}$.

Для доказательства утверждения 2/ рассмотрим равенство

$$\Phi'(z^*) \begin{Bmatrix} \psi \\ \lambda \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} A\psi - \lambda^*\psi - \lambda x^* \\ (x^*, \psi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P^{(r)} & x \\ & 0 \end{Bmatrix},$$

где $\|x\|_{L_{2,\infty}} \le 1$. Домножив скалярно на $x^*$ это выражение, получим

$$-\lambda(x^*, x^*) = (P^{(r)}x, x^*).$$

В силу /2.4/ $\lambda \to 0$ при $r \to \infty$. Подставив представление

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi, \phi_i)\phi_i ,$$

получим выражение

$$\|\psi\|^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu_i \ne \lambda^*}}^{\infty} \left( \frac{(P^{(r)}x, \phi_i) + \lambda(x^*, \phi_i)}{\mu_i - \lambda^*} \right)^2 ,$$

которое стремится к нулю при $r \to \infty$ в силу /2.4/, второго условия леммы и стремления к нулю $\lambda$. Докажем выполнимость условия 3/ теоремы 2.1

$$\|A_r\psi - A\psi\|^2 \le \left\|\sum_{i=1}^{\infty} (P^{(r)}\psi, \phi_i)\mu_i\phi_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{\infty} (\psi, \phi_i)\mu_i P^{(r)}\phi_i\right\|^2 \le$$

$$\le \sum^{\infty} \mu_i^2 |(P^{(r)}\psi, \phi_i)|^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(\psi, \phi_i)|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \|P^{(r)}\phi_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $r \to \infty$ в силу /2.4/ и второго условия леммы, а второе слагаемое - в силу первого и второго условия леммы. Докажем справедливость условия 4/ теоремы 2.1. Из представления

$$\Phi_r (P_r z^*) = \left\{ \begin{array}{l} A_r x^* - \lambda^* P_r x^* \\ (P_r x^*, P_r x^*) - 1 \end{array} \right\}$$

и

$$A_r x^* - \lambda^* P_r x^* = (A_r - A) x^* + \lambda^* (x^* - P_r x^*)$$

в силу условия 3/ теоремы 2.1 и свойств проектора $P_r$ следует условие 4/ теоремы 2.1. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть в условиях леммы 2.1 функции $\phi_i(x)$ имеют представление

$$\phi_i(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_{k,i}}{x^{km_o}} + o(x^{-Nm_o}), \qquad /2.5/$$

где $m_0 > 0$ - целое число, тогда выполнены условия 5/ и 6/ теоремы 2.1.

Доказательство. По теореме Гильберта [18] для любой функции $\psi$ справедливо равенство

$$A\psi = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\psi, \phi_i)\phi_i + \xi_M, \quad ||\xi_M|| = O(\mu_M),$$

где $\mu_M \to 0$ при $M \to \infty$. Поэтому, выбрав M таким, что

$$||A\psi - \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\psi, \phi_i)\phi_i|| = o(r^{-Nm_o}),$$

получим с точностью до $o(r^{-Nm_o})$

$$P_r A\psi - A_r P_r \psi = P_r \sum_{i=1}^{M} (P^{(r)} \psi, \phi_i)\mu_i \phi_i .$$

Так как по условиям теоремы 2.1 $\psi \in B_1$, где $B_1$ определено представлением /2.5/, то

$$(P^{(r)}\psi,\phi_i) = \int_r^\infty \psi(x)\,\phi_i(x)\,dx = \int_r^\infty \Big[\sum_{k=1} \frac{\bar c_k(\psi)}{x^{km_o}} + o(x^{-Nm_o})\Big] *$$

$$\times\Big[\sum_{k=1}^{N} \frac{q_{k,i}}{x^{km_o}} + o(x^{-Nm_o})\Big]\,dx .$$

После перемножения сумм и взятия интегралов приходим к условию 5/ теоремы 2.1. Условие 6/ следует из равенства для любых $\psi$, $\eta \in B_1$

$$(\psi,\eta) - (P_r\,\psi,\ P_r\,\eta) = \int_r^\infty \psi(x)\,\eta(x)\,dx .$$

Лемма доказана.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия лемм 2.1 и 2.2, тогда для решения $z_r^* = (x_r^*, \lambda_r^*)$ уравнения /2.2/ справедливо представление /2.3/.

Из свойств собственных функций $z_m$ и собственных чисел $\chi_m$ оператора $A_1$ следует

Лемма 2.3. Для оператора $T_1$ выполнены условия лемм 2.1 и 2.2, то есть справедлива теорема 2.2.

Поскольку $T$ и $T_1$ близки по норме и обладают аналогичными свойствами, следует ожидать, что для $T$ также справедливы приведенные выше утверждения.

Полученные при помощи теоремы 2.1 разложения применялись при уточнении приближенных собственных чисел для задач типа /1.1/, например, для уравнения /19,20/ :

$$x^2\psi(x)/2 + \pi^{-1}\int_0^\infty \ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\psi(y)\,dy = \lambda\psi(x)\,,\ \psi(x) \underset{x\to\infty}{=} O(x^{-3})\,.$$

Коэффициенты $\mu_i$ для экстраполяции по $r^{-1}$ удовлетворяют в этом случае системе

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1 \\ \mu_1 r_1^{-4} + \mu_2 r_2^{-4} = 0 \end{cases}$$

для двух значений $r_1$ и $r_2$. Приведем абсолютные погрешности $\Delta(r_1, r_2)$ величин $\lambda(r_1, r_2) = \mu_1\lambda_1(r_1) + \mu_2\lambda_1(r_2)$, где $\lambda_1(r_i)$ - приближенное значение величины $\lambda_1/\lambda_1 = -0{,}5/$ при $r_i$:
$\Delta/10;\ 12{,}5/ = -9{,}0\cdot 10^{-8}$; $\Delta/10;\ 15/ = -7{,}2\cdot 10^{-7}$; $\Delta/12{,}5;\ 15/ = -4{,}0\cdot 10^{-8}$. Отметим, что уточнение по $r$ проводилось после со-

ответствующего уточнения решений по $h$ для каждого $r_i$ при помощи экстраполяции Ричардсона по трем сеткам с числом неизвестных соответственно $n_1 = 2^5$, $n_2 = 2^6$, $n_3 = 2^7$. При этом погрешности приближенных решений получились следующими: $\Delta/10/ = 2,8\cdot 10^{-6}$, $\Delta/12,5/ = 1,1\cdot 10^{-6}$, $\Delta/15/ = 4,9\cdot 10^{-7}$. Вопросы экстраполяции сеточных решений по шагу $h$ хорошо изучены /21/. Если же известно разложение погрешности приближенных решений по параметру $r^{-1}$, то уточнение можно проводить по двум параметрам $h$ и $r$ одновременно, что значительно снижает трудоемкость численных алгоритмов для рассматриваемого класса задач.

ЛИТЕРАТУРА


1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. - J. Nuovo Cimento, 1963, v.29, p.380.
2. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. - J.Nuovo Cimento, 1968, v.55A, No.2, p.232.
3. Сидоров А.В., Скачков Н.Б. - Препринт ОИЯИ, Р2-80-45, Дубна, 1980.
4. Жидков Е.П.и др. - Сообщение ОИЯИ, Р11-85-465, Дубна,1985.
5. Жидков Е.П. и др. - Сообщение ОИЯИ, Р11-87-261, Дубна, 1987.
6. Zhydkov E.P. et al. - Preprint of JINR, E11-88-494, Dubna, 1988.
7. Жидков Е.П., Никонов Э.Г., Хоромский Б.Н. - Препринт ОИЯИ, Р11-89-188, Дубна, 1989.
8. Babuska I., Aziz A.K. - In: Aziz A.K. (ed). The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. New York Academic Press, 1972, p.3.
9. Arnold D.N., Wendland W.L. - Math. Comput., 1983, 41, p.349.
10. Arnold D.N., Wendland W.L. - Numer.Math., 1985, 47, p.317.
11. Ruotsalainen K., Wendland W. - Numer. Math., 1988, 53, p.299.
12. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. - Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
13. Справочник по специальным функциям. Под. ред. Абрамовиц М. и Стиган И.М. М.: Наука, 1979.
14. Жидков Е.П., Никонов Э.Г., Хоромский Б.Н. - Препринт ОИЯИ, Р11-87-375, Дубна, 1987.
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. - Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
16. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
17. Гареев Ф.А. и др. - ЖВМ и МФ,1977,т.17, № 2, с.407.

18. Канторович Л.В., Акилов Г.П. - Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
19. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. - Сообщение ОИЯИ, Р11-84-740, Дубна, 1984.
20. Жидков Е.П., Никонов Э.Г., Хоромский Б.Н. - Сообщение ОИЯИ, Р11-85-970, Дубна, 1985.
21. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. - Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 марта 1989 года.