89-188

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-89-188

Е.П.Жидков, Э.Г.Никонов*, Б.Н.Хоромский

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в журнал "Математическое моделирование"

*Московский государственный университет

1989

ВВЕДЕНИЕ

Квазипотенциальный подход [1,2] интенсивно используется для описания связанной системы двух частиц, таких, как $q\bar{q}$, e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ и т.д. (здесь через q обозначаются кварки, через e – электрон, через μ – μ-мезон). Ввиду того, что точные аналитические решения квазипотенциальных интегральных уравнений известны лишь для некоторых простейших потенциалов, широкое применение этого подхода требует разработки численных методов решения квазипотенциальных уравнений с различными потенциалами.

В общем случае квазипотенциальное уравнение в трехмерном импульсном пространстве для связанной системы двух скалярных частиц имеет вид:

$$G^{-1}(\vec{p}, E)\, \psi(\vec{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{R^3} V(\vec{p}, \vec{k}; E)\, \psi(\vec{k})\, d\vec{k}, \qquad (0.1)$$

где $G(\vec{p}, E)$ – заданная функция Грина, $\psi(\vec{p})$ – неизвестная волновая функция относительного движения связанной системы [3], E – искомая энергия связанной системы, $\vec{p}$, $\vec{k} \in R^3$.

Рассмотрим уравнение (0.1) с потенциалом, описывающим взаимодействие кварка и антикварка [4]:

$$V(\vec{p}, \vec{k}; E) = V_1(\vec{p}, \vec{k}; E) + V_2(\vec{p}, \vec{k}; E),$$

где потенциал

$$V_1(\vec{p}, \vec{k}; E) = -\alpha(\vec{p} - \vec{k})^{-2}$$

является аналогом кулоновского потенциала и описывает взаимодействие на малых расстояниях, а потенциал

$$V_2(\vec{p}, \vec{k}; E) = \beta^3 (\vec{p} - \vec{k})^{-4}$$

явдяется запирающим, обеспечивает неограниченный рост собственных чисел уравнения (0.1) и носит феноменологический характер [5].

При таком выборе потенциала уравнение (0.1) в нерелятивистском случае запишется следующим образом [4]:

$$(E - \vec{p}^{\,2}/2)\,\psi(\vec{p}) = -(2\pi)^{-3} \int_{R^3} (-\alpha(\vec{p}-\vec{k})^{-2} + \beta^3(\vec{p}-\vec{k})^{-4})\,\psi(\vec{k})\,d\vec{k}. \tag{0.2}$$

Проинтегрировав (0.2) по угловым переменным, будем иметь в центрально-симметричном случае уравнение

$$(p^2/2 - E)\,\phi(p) = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty \ln\left|\frac{p-k}{p+k}\right|\phi(k)\,dk - \frac{\beta^3}{\pi}\frac{d^2}{dp^2}\int_0^\infty \ln\left|\frac{p-k}{p+k}\right|\phi(k)\,dk. \tag{0.3}$$

Здесь $\phi(p) = p\psi(p)$, $\psi(p) = \psi(|p|)$, $p \in [0;\infty)$. Дополнив уравнение (0.3) условиями

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \int_0^\infty \phi^2(p)\,dp = 1, \end{cases}$$

приходим к задаче на собственные значения.

При помощи уравнения (0.3) проводились численные расчеты спектра масс и ширин лептонных распадов возбужденных состояний для векторных мезонов, таких, как J/ψ и Υ [4].

В настоящей работе рассматриваются математические проблемы, связанные с построением вычислительных алгоритмов для решения спектральных задач вида (0.3). Изучаются функциональные свойства интегро-дифференциального оператора из уравнения (0.3) и аппроксимации по методу Галеркина этого уравнения. Построены вычислительные алгоритмы, сводящиеся к алгебраической проблеме на собственные значения для матриц типа теплицевых. Приводятся результаты численных расчетов.

Отметим, что свойства аппроксимаций по методу Галеркина для строго эллиптических граничных интегральных уравнений изучены в [6]. Обзор результатов по применению метода Рэлея-Ритца в задачах на собственные значения для эллиптических операторов приводится в [7,8].

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$A\psi = \mu\psi, \tag{1.1}$$

где ψ - волновая функция связанной системы, μ - искомый параметр, зависящий от энергии системы.

Задачу (1.1) рассматриваем в гильбертовом пространстве антисимметричных функций $L^2(-\infty,\infty) \equiv L_{2,\infty}$ на всей оси с условием нормировки собственных функций

$$(\psi,\ \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(k)dk = \|\psi\|^2 = 1 .$$

Оператор A в уравнении (1.1) имеет вид [4]:

$$A = V + \alpha L + \beta^3 R ,$$

где α и β - положительные постоянные, R - гиперсингулярный интегральный оператор вида

$$(R\psi)(p) = \pi^{-1} \frac{d^2}{dp^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|p-k|\,\psi(k)\,dk \ , \tag{1.2}$$

а операторы L и V определяются из следующих соотношений:

$$(L\psi)(p) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|p-k|\,\psi(k)\,dk \ ; \tag{1.3}$$

$$(V\psi)(p) = v(p)\,\psi(p) \ ; \tag{1.4}$$

непрерывная функция $v(p)$ обладает свойствами:

1. $v(p) \geq 0 \quad \forall p: \quad -\infty < p < \infty$;

2. $v(p) \to +\infty , \quad p \to \pm\infty$.

В дальнейшем для определенности рассмотрим случай $v(p) = p^2$, отражающий характерные особенности рассматриваемого класса задач. Будем искать решение в классе функций $\psi(p) \in D(A) = D(V) \cap D(R)$, где

$$D(V) = \{\psi \in L_{2,\infty} : \|V\psi\| < \infty\}; \tag{1.5}$$

$$D(L) = \{\psi \in L_{2,\infty} : \|L\psi\| < \infty\}; \tag{1.6}$$

$$D(R) = \{\psi \in L_{2,\infty} : \|R\psi\| < \infty\} . \tag{1.7}$$

§ 2. ФУРЬЕ-АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА $p^2 I + \beta^3 R$

Исследуем функциональные свойства оператора A_1 вида

$$(A_1 z)(p) = p^2 z(p) + \beta^3 (Rz)(p), \; z(p) \in L_{2,\infty} . \tag{2.1}$$

Напомним важные для дальнейшего изложения определения и свойства преобразования Фурье, различные варианты которого будем обозначать так: F_s - синус-преобразование, F_c - косинус-преобразование. В пространстве $L^2[0;\infty)$ унитарен каждый из операторов

$$\begin{aligned}(F_c\, g)(t) &= (2/\pi)^{1/2} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{\sin(st)}{s} g(s)\, ds = \\ &= (2/\pi)^{1/2} \lim_{N\to\infty} \int_0^N g(s) \cos(st)\, ds ;\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}(F_s\, g)(t) &= (2/\pi)^{1/2} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{s} g(s)\, ds = \\ &= (2/\pi)^{1/2} \lim_{N\to\infty} \int_0^N g(s) \sin(st)\, ds .\end{aligned} \tag{2.3}$$

Кроме того, $F_c^* = F_c$, $F_s^* = F_s$. Перечисленные свойства преобразования Фурье являются следствиями теоремы Планшереля /9/ .

Рассмотрим уравнение /10/ :

$$-d^2\phi(r)/dr^2 + \beta^3 r\, \phi(r) = \chi\phi(r), \qquad 0 \le r < \infty , \tag{2.4}$$

где функция $\phi(r) \in L^2[0;\infty)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\phi(0) = 0$$
$$\phi(\infty) = 0 .$$

Заменой переменных $\xi = r\beta - \chi\beta^3$ уравнение (2.4) может быть сведено к уравнению Эйри /11/:

$$-d^2\phi^0(\xi)/d\xi^2 + \xi\phi^0(\xi) = 0$$

для функций $\phi^0(\xi) = \phi(r)$. Решение последнего уравнения, удовлетворяющее граничному условию $\phi^0(\infty) = 0$, представляет собой функцию Эйри:

$$\phi^0(\xi) = c\,Ai(\beta r - \beta^{-2}\chi) = c\,Ai[\beta(r - \beta^{-3}\chi)],$$

где

$$Ai(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(t^3/3 + \xi t)]\,dt,$$

а c - нормировочная константа.

Второе граничное условие $\phi(0) = 0$ позволяет определить собственные значения χ_m уравнения (2.4):

$$\chi_m = -\beta^2 \xi_m,$$

где ξ_m - нули функции Эйри.

Собственные функции уравнения (2.4) принимают вид:

$$\phi_m(r) = c\,Ai(\beta r + \xi_m).$$

Поскольку $q(r) = \beta^3 r$ - непрерывная, снизу ограниченная функция, то оператор в уравнении (2.4) самосопряжен. Это следует из теоремы 6.2 (стр.630)/12/. Справедлива также теорема 1.1 (стр.142)/12/, согласно которой для любой функции $f(x) \in L^2[0;\infty)$ выполнено равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2,$$

где $f_m = a_m^{-1} \int_0^{\infty} f(x)\,\phi_m(x)\,dx$. Здесь $\phi_m(x)$ - собственные функции уравнения (2.4), a_m - норма $\phi_m(x)$ в $L^2[0;\infty)$. Следовательно, в силу теоремы 1.15.17/13/ о базисе в гильбертовом пространстве система собственных функций $\{\phi_m\}_1^{\infty}$ является полной ортонормированной и образует базис в $L^2[0;\infty)$.

Так как функции $\phi_m(r) \in L^1[0;\infty)$, то по теореме Планшереля /9/ существует синус-преобразование Фурье вида

$$z_m(p) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^{\infty} \phi_m(r) \sin(pr)\,dr = (F_s\,\phi_m)(p), \qquad p \in [0;\infty). \tag{2.5}$$

Если применить преобразование F_s ко всему уравнению (2.4), то согласно теореме Планшереля получим:

$$p^2 z_m(p) - \beta^3 d(F_c\,\phi_m)(p)/dp = \chi_m z_m(p)\,.$$

С другой стороны, согласно формулам обращения для сингулярного интеграла [14]

$$(F_c\,\phi_m)(p) = \pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(F_s\,\phi_m)(k)}{k-p}dk + (F_c\,\phi_m)(\infty).$$

В нашем случае $(F_c\,\phi_m)(\infty) = 0$. Поэтому

$$(F_s\,r\,\phi_m)(p) = \pi^{-1}\frac{d}{dp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_m(k)}{p-k}dk\,.$$

Таким образом, уравнение (2.4) при помощи преобразования Фурье F_s переходит в следующее:

$$p^2 z_m(p) + (\beta^3/\pi)\frac{d}{dp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_m(k)}{p-k}dk = \chi_m z_m(p)\,. \qquad (2.6)$$

Собственные функции уравнения (2.6) имеют представление (2.5), причем $z_m(-p) = -z_m(p)$ для $\forall p:\ -\infty < p < \infty$.

§ 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ A_1 И A

В этом параграфе мы сформулируем ряд утверждений о свойствах функций $\{z_m\}_1^\infty$ из (2.5).

Введем необходимые в дальнейшем обозначения:

$$(K\psi)(p) = \pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(k)}{p-k}dk\,;$$

$$(D\psi)(p) = d\psi(p)/dp\,; \qquad (3.1)$$

$$(D^{-1}\psi)(p) = \int_{-\infty}^{p}\psi(k)\,dk\,;$$

где $\psi(p) \in L_{2,\infty}$.

Согласно теореме 3.8 (стр.383) /15/ об ограниченности преобразования Гильберта

$$\tilde{f}(x) = \pi^{-1} \int_{\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-t} dt = - \lim_{\epsilon \to 0} \pi^{-1} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt$$

в пространстве $L^r(-\infty, \infty)$, $r > 1$. функция $\tilde{f}(x)$ существует почти всюду и справедливо неравенство $\|\tilde{f}\|_{L^r} \le c^r \|f\|_{L^r}$, где c^r зависит только от r.

Л е м м а 3.1.

1. Для функции $\phi \in L_{2,\infty}$ каждая пара условий

$$D^{-1} \phi \in L_{2,\infty}, \quad D^{-1} K \phi \in L_{2,\infty}.$$

$$D \phi \in L_{2,\infty}, \qquad DK\phi \in L_{2,\infty}$$

эквивалентна.

2. Если $\phi \in L_{2,\infty}$ и $D^{-1} \phi \in L_{2,\infty}$, то $D^{-1} K \phi = K D^{-1} \phi$.

3. Если $\phi \in L_{2,\infty}$ и $D\phi \in L_{2,\infty}$, то $DK\phi = KD\phi$.

Доказательство первого утверждения есть простое следствие свойств преобразований F_s, F_c и K. Далее имеем

$$(KD^{-1} \phi)(p) = -\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{k} \phi(x) dx \right) \frac{1}{k-p} dk = -\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{k} \phi(x) dx \right) \times$$

$$\times d \ln|k-p| = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|p-k| \, d\left(\int_{-\infty}^{k} \phi(x) dx \right) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) \ln|k-p| dk =$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) \int_{-\infty}^{p} \frac{dx}{x-k} dk = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(k)}{x-k} dk \, dx = (D^{-1} K\phi)(p),$$

откуда следует утверждение 2.

Так как $y = D\phi \in L_{2,\infty}$, то $D^{-1} Ky = KD^{-1} y$ или $D^{-1} KD\phi = K\phi$. Умножив последнее равенство на D слева, получим утверждение 3. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 3.1. Для операторов L из (1.3) и R из (1.2) справедливо следующее представление:

$$L = D^{-1} K; \quad R = DK$$

для всех $\psi \in D(A)$. Причем $D(L) = \{\psi \in L_{2,\infty} : D^{-1}\psi \in L_{2,\infty}\}$,

$$D(R) = \{\psi \in L_{2,\infty} : D\psi \in L_{2,\infty}\}.$$

Напомним свойства преобразования Фурье [1].

П р е д л о ж е н и е 3.1.

I. Для всех функций ϕ из $L_{2,\infty}$, удовлетворяющих условию $\|D\phi\| < \infty$, справедливы соотношения:

1) $(F_s \, d\phi(r)/dr)(p) = -p(F_c\, \phi(r))(p)$;

2) $(F_c \, d\phi(r)/dr)(p) = p(F_s\, \phi(r))(p)$; $r \in [0;\infty)$; $p \in [0;\infty)$.

II. Для всех функций $\phi \in L_{2,\infty}$, удовлетворяющих условию $\|r\phi\| < \infty$, справедливы соотношения:

1) $(F_s \, r\phi(r))(p) = -d(F_c\, \phi(r))(p)/dp = -D(F_c\phi)$;

2) $(F_c \, r\phi(r))(p) = d(F_s\, \phi(r))(p)/dp = D(F_s\phi)$;

$r \in [0;\infty)$; $p \in [0;\infty)$,

а также равенство Парсеваля

$$\|r\phi\| = \|D(\tilde{F}\phi)\|,$$

где $\tilde{F}$ - синус- или косинус-преобразования Фурье.

Л е м м а 3.2.

Для любой функции $\phi \in L_{2,\infty}$, удовлетворяющей условию $\|r^{-1}\phi\| < \infty$, справедливы соотношения:

1) $(F_s \, r^{-1}\phi(r))(p) = \int_0^p (F_c\, \phi(r))(x)\, dx = D^{-1}(F_c\phi)$;

2) $(F_c \, r^{-1}\phi(r))(p) = -\int_0^p (F_s\, \phi(r))(x)\, dx = -D^{-1}(F_s\phi)$;

$p \in [0;\infty)$; $r \in [0;\infty)$

и равенство Парсеваля

$$\|r^{-1}\phi\| = \|D^{-1}(\tilde{F}\phi)\|,$$

где $\tilde{F}$ - синус- или косинус-преобразование Фурье. Сформулируем теперь ряд утверждений о свойствах функций $\{z_m\}_1^\infty$.

Л е м м а 3.3.

Для любого $m = \overline{1,\infty}$ справедливо неравенство

$$\|D^{-1} z_m\|^2 \le C_{D^{-1}} |\chi_m|^{1/3} \|z_m\|^2 ,$$

где $C_{D^{-1}}$ не завит от номера m.

Доказательство. Согласно лемме 3.2 и определению функций z_m в (2.5),

$$\|D^{-1} z_m\|^2 = \|r^{-1} \phi_m\|^2 = 2c^2 \int_0^\infty r^{-2} A^2 i(\beta r + \xi_m)\, dr .$$

Причем $\|\phi_m\| = 1$, c - нормировочная константа. Так как для любого $x > 0$ справедливо равенство

$$\|r^{-1} \phi_m\|^2 = 2c^2 \Big(\int_0^x r^{-2} A^2 i(\beta r + \xi_m)\, dr + \int_x^\infty r^{-2} A^2 i(\beta r + \xi_m)\, dr \Big),$$

то с учетом следующих оценок:

1. $$\int_0^x r^{-2} A^2 i(\beta r + \xi_m)\, dr \le \int_0^x r^{-2} (A' i(\xi_m) r)^2\, dr = [A' i(\xi_m)]^2 x ,$$

где функция Эйри на отрезке $[0; x]$ мажорируется линейной, а

$$A' i(\xi_m) = \max_{r \in [0; x]} |A' i(\beta r + \xi_m)| .$$

2. $$\int_x^\infty r^{-2} A^2 i(\beta r + \xi_m) dr < x^{-2} \int_x^\infty A^2 i(\beta r + \xi_m)\, dr \le x^{-2} \|\phi_m\|^2/(2c^2),$$

выбрав x таким, что

$$x = (\|\phi_m\| / (c |A' i(\xi_m)|))^{2/3},$$

получаем оценку

$$\|r^{-1} \phi_m\|^2 \le c_1 |A' i(\xi_m)|^{4/3} \|\phi_m\|^{2/3},$$

где c_1 не зависит от m. С учетом соотношения $Ai(-x) \le A x^{1/4}$, $x \to \infty$, A не зависит от x /16/, получим утверждение леммы.

Следствие 3.2. Для любого $m = \overline{1, \infty}$ справедливо неравенство

$$||Lz_m||^2 \le c_L|\chi_m|^{1/3}\,||z_m||^2,$$

где c_L не зависит от m.

Доказательство

$$||Lz_m||^2 = ||KD^{-1}z_m||^2 \le c_2||D^{-1}z_m||^2 \le c_L|\chi_m|^{1/3}||z_m||^2.$$

Лемма 3.4

Для любого $m=\overline{1,\infty}$ имеет место соотношение

$$||Dz_m||^2 \le c_D\,\chi_m^2||z_m||^2,$$

где c_D не зависит от m.

Доказательство. С учетом предложения 3.1 запишем

$$||Dz_m||^2 = ||r\phi_m||^2 = 2c^2\int_0^\infty r^2A^2i(\beta r+\xi_m)\,dr.$$

Функция Эйри обладает следующими свойствами[16]:

1. $|\xi_m| = (3\pi(2m-1/2)/4)^{2/3}, \quad m\to\infty;$

2. $Ai(\xi) \le C_A\xi^{1/4}\exp[-(2/3)\xi^{3/2}], \quad \xi>0;$

3. $Ai(\xi) \to \pi^{-1/2}|\xi|^{-1/4}\cos[(2/3)|\xi|^{3/2}-\pi/4], \quad \xi\to-\infty;$

4. $|A'i(\xi)| \le A|\xi|^{1/4}, \quad \xi\to-\infty;$

C_A и A не зависят от ξ. С учетом свойств функции Эйри запишем:

$$\int_0^\infty r^2A^2i(\beta r+\xi_m)\,dr \le 4\xi_m^2\beta^{-2}\int_0^{2\xi_m/\beta}A^2i(\beta r+\xi_m)\,dr+\epsilon(m)\le$$

$$\le 4\xi_m^2\beta^{-2}\,(||Ai(\beta r+\xi\ )||^2+\epsilon_1(m)).$$

Причем $\epsilon_1(m)\to 0$ при $m\to\infty$. Поэтому можно подобрать такую постоянную a, что

$$\epsilon_1(m) \le a\,||Ai(\beta r+\xi_m)||^2 \qquad \text{для } \forall\, m=\overline{1,\infty}.$$

С учетом выражения для χ_m имеем

$$\int_0^\infty r^2 A^2 i(\beta r + \xi_m)\, dr \le 4\beta^{-4}(1+a)\chi_m^2 \| Ai(\beta r + \xi_m)\|^2 \quad .$$

Окончательно получим:

$$\| D z_m \|^2 \le 2c^{-2}\beta^{-4}(1+a)\chi_m^2 \| z_m \|^2 \quad .$$

Следствие 3.3. Для любого $m = \overline{1, \infty}$ и $r \ge 2$ имеет место неравенство

$$\| D^{(r)} z_m \|^2 \le c'_D \chi_m^2 \| D^{(r-1)} z_m \|^2 ,$$

где c'_D не зависит от m.

Лемма 3.5

Для любых $\psi, \phi \in D(A)$ (A оператор из (1.1)) и оператора A_1 из (2.1) справедливы утверждения

1. $(A_1\psi, \phi) = (\psi, A_1\phi)$;
2. $(A_1\psi, \psi) \ge c_1(\psi, \psi)$, $c_1 > 0$ не зависит от ψ;
3. существует вполне непрерывный оператор $T_1 \in (L_{2,\infty} \to L_{2,\infty})$, обратный оператору A_1.

Доказательство.

1) Оператор R является симметричным в силу леммы 3.1 и соотношений $K^* = -K$, $D^* = -D$. Следовательно, A_1 является симметричным.

2) В силу утверждений § 2 собственные функции оператора A_1 образуют базис в $L_{2,\infty}$. Поэтому справедливость 2-го утверждения леммы следует из неравенства $\chi_1 > 0$.

3) Докажем существование вполне непрерывного T_1. Мы можем из первых n собственных функций $\{z_i\}$, $i = \overline{1, n}$ построить конечную ϵ-сеть Q_ϵ для множества функции $\{T_1\psi\}$, где $\|\psi\| \le 1$. Действительно, рассмотрим величину

$$\rho^2(T_1\psi, Q_\epsilon) = \| \sum_{i=n+1}^{\infty} \chi_i^{-1}(\psi, z_i) \|^2 < \chi_{n+1}^2 \|\psi\|^2 \le K(n+1)^{-4/3},$$

где K не зависит от n.

Поэтому, выбирая n так, что $K(n+1)^{-4/3} < \epsilon^2$, получим $\rho(T_1\psi, Q_\epsilon) < \epsilon$ для $\forall \epsilon > 0$. Таким образом, множество $\{T_1\psi\}$ удовлетворяет условиям теоремы Хаусдорфа [17], и, следовательно, компактно, что и доказывает лемму.

Лемма 3.6.

Для любой $\psi \in L_{2,\infty}$ справедливо неравенство

$$\|LT_1\psi\|^2 \le M^2\|\psi\|^2,$$

где M не зависит от ψ.

Доказательство. Пусть $\|z_i\|=1$ для $i=1,\infty$, тогда

$$\|LT_1\psi\|^2 = \|LT_1\sum_{i=1}^{\infty}(\psi,z_i)z_i\|^2 = \|\sum_{i=1}^{\infty}|\chi_i|^{-1}(\psi,z_i)Lz_i\|^2 \le$$

$$\le \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\chi_i|^{-1}|(\psi,z_i)|\,\|Lz_i\|\Big)^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}|\chi_i|^{-2}\|Lz_i\|^2\sum_{i=1}^{\infty}(\psi,z_i)^2 \le$$

$$\le C_L^2\|\psi\|^2\sum_{i=1}^{\infty}\chi_i^{-2}|\chi_i|^{1/3}\|z_i\|^2 \le C_L^2\|\psi\|^2\sum_{i=1}^{\infty}(i^{2/3})^{-5/3},$$

что и доказывает лемму.

Теорема 3.1. Для любого числа $\beta>0$ найдется такое $\alpha_0=\alpha_0(\beta)$, что для всех $\alpha<\alpha_0$ оператор A из (1.1) имеет вполне непрерывный обратный.

Доказательство. Перепишем выражение для оператора A в виде

$$A = A_1 + \alpha L = (I+\alpha LT_1)A_1 .$$

В силу леммы 3.6 оператор LT_1 ограничен константой, поэтому, выбирая $\alpha_0<M^{-1}$, получим, что для $\forall\,\alpha<\alpha_0(\beta)$

$$\alpha\|LT_1\|<1.$$

Следовательно, по теореме об обратном операторе [18] оператор $G=(I+\alpha LT_1)^{-1}$ существует и ограничен по норме в $L_{2,\infty}$ некоторой константой C_α. В силу полной непрерывности T_1 оператор A^{-1} существует и является вполне непрерывным в $L_{2,\infty}$

§ 4. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА ПО БАЗИСУ $\{\phi_i\}_1^n$

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \mu T\psi\\ (\psi,\psi)-1 &= 0\end{aligned}\right\}. \qquad (4.1)$$

Здесь $T \equiv A^{-1}$, A - оператор из (1.1) при $a < a_0$. Согласно теореме 3.1, T - линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_{2,\infty}$. Тогда собственные значения уравнения (4.1) вещественны и имеют конечную кратность /19/. Будем их обозначать через μ_k ($k = 1,2,3\ldots$), записав каждое собственное значение столько раз, какова его кратность. Так как $(T\psi, \psi) \geq 0$ для любого $\psi \in L_{2,\infty}$, то все собственные значения уравнения (4.1) положительны. Собственные значения можно занумеровать в возрастающем порядке, т.е.

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots .$$

Соответствующий μ_k собственный элемент будем обозначать через ψ_k.

Пусть $\{H_n\}$ - предельно плотная в $L_{2,\infty}$ последовательность замкнутых подпространств, а P_n - соответствующий H_n ортопроектор. Определим P_n следующим образом. Пусть $[0;R]$ $(R>0)$ - отрезок вещественной оси, $h = Rn^{-1}$ - шаг дискретизации. Возьмем для $\forall n = 1,2,3,\ldots$ в качестве базиса $\{\phi_i\}_1^n$ в каждом из подпространств H_n кусочно-линейные функции вида

$$\phi_i(x) = \begin{cases} h^{-1}x + 1 - i; & (i-1)h \leq x \leq ih; \\ -h^{-1}x + 1 + i; & ih \leq x \leq (i+1)h, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, проектор P_n вида

$$(P_n \psi)(x) = \sum_{i=1}^{n} (\psi, \phi_i)\, \phi_i(x)$$

отображает любую $\psi \in L_{2,\infty}$ в конечномерное $H_n : P_n \psi \in H_n$ для $\forall n$.

Согласно /19/, метод Бубнова-Галеркина в проблеме собственных значений заключается в том, что приближенные собственные значения $\mu = \mu_{k,n}$ и приближенные собственные элементы $\psi = \psi_{k,n}$ определяются из условий:

$$P_n (\psi - \mu T \psi) = 0 \quad (\psi \in H_n).$$

Это приводит к уравнению

$$\psi = \mu P_n T \psi, \tag{4.3}$$

которое можно равным образом рассматривать как в $L_{2,\infty}$, так и в H_n. Оператор $P_n T$ самосопряжен и вполне непрерывен в H_n, поэтому собственные значения $\mu_{k,n}$ уравнения (4.3) вещественны и положительны в силу положительной определенности оператора $P_n T$; занумеруем их так, что

$$0 < \mu_{1,n} \leq \mu_{2,n} \leq \dots .$$

Справедлива следующая

Л е м м а 4.1.

Для $i = \overline{1, \infty}$ справедлива оценка

$$\int_0^R | z_i(x) - P_n z_i(x) |^2 dx \leq c_1 h^2 \chi_i^2 \| z_i \|^2$$

для $\forall R > 0$, c_1 не зависит от i и h, а функции $z_i(x)$ удовлетворяют уравнению (2.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно показать, что

$$\int_0^R |z_i(x) - P_n z_i(x)|^2 dx \leq c' h^2 \int_0^R [z'_i(x)]^2 dx ,$$

где c' не зависит от i и h. С учетом леммы 3.4

$$\int_0^R | z_i(x) - P_n z_i(x) |^2 dx \leq c_1 h^2 \chi_i^2 \| z_i \|^2 ,$$

что и доказывает лемму.

Л е м м а 4.2.

Для любого $i = \overline{1, \infty}$

$$\int_R^\infty z_i^2(x)\, dx \leq c_2 R^{-4} \chi_i^2 \| z_i \|^2$$

для любого $R > 0$, c_2 не зависит от i и R.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (1.5) имеем

$$\int_R^\infty z_i^2(x)\, dx = \int_R^\infty x^{-4} (x^2 z_i(x))^2 dx \leq R^{-4} \int_R^\infty (x^2 z_i(x))^2 dx \leq$$

$$\leq 0{,}5\ R^{-4} \| x^2 z_i(x) \|^2$$

и, кроме того,

$$x^2 z_i(x) + \beta^3(DKz_i)(x) = \chi_i z_i(x).$$

Поэтому

$$\| x^2 z_i(x) \| = \| \chi_i z_i(x) - \beta^3(KDz_i)(x) \|^2 \le c_p \chi_i \| z_i \|^2 ,$$

что и доказывает лемму.

Л е м м а 4.3. Для любого $i = \overline{1.\infty}$

$$\| P^{(n)} z_i \|^2 \le (c_h h^2 + c_R R^{-4}) \chi_i^2 \| z_i \|^2 , \quad (P^{(n)} = I - P_n),$$

где c_h, c_R не зависят от i, h и R.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\| P^{(n)} z_i \|^2 = \int_0^R | P^{(n)} z_i(x) |^2 dx + \int_R^\infty z_i^2(x)\, dx ,$$

то, применяя леммы 4.1 и 4.2, получим требуемое утверждение.

Л е м м а 4.4.

1. Для любой функции $\psi(x) \in L_{2,\infty}$ такой, что $\psi'(x) \in L_{2,\infty}$ и $[x^2\psi(x)] \in L_{2,\infty}$, выполнено неравенство

$$\| P^{(n)} \psi \|^2 \le d_1 h^2 \| \psi' \|^2 + d_2 R^{-4} \| x^2 \psi(x) \|^2 ,$$

где d_1, d_2 не зависят от h, R и ψ.

2. Для любой функции $\psi(x) \in L_{2,\infty}$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\psi, z_i)| \, |\chi_i| = Q(\psi) < \infty,$$

выполнено неравенство

$$\| P^{(n)} \psi \|^2 \le Q^2(\psi) (c_h h^2 + c_R R^{-4}) ,$$

где c_h, c_R определены в лемме 4.3.

Дальнейшие оценки аппроксимаций по методу Галеркина относятся к случаю однократного собственного числа.

Можно показать, что $\| P^{(n)} T_1 \| \to 0$ при $n \to \infty$. Так как

$$\| P^{(n)} T \| \le \| P^{(n)} T_1 \| \cdot \| G \|, \ \| G \| < \infty ,$$

то $\|P^{(n)}T\| \to 0$ при $n \to \infty$ для $\alpha < \alpha_0$ при условии $\|P^{(n)}T_1\| \to 0$. Поэтому, согласно теореме 18.5 [19], $|\mu_{k,n} - \mu_k| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 4.1. Пусть функции $\psi_k(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4.4, тогда справедливы оценки:

1) $\|\psi_{k,n} - \psi_k\| \le (1 + \epsilon_{k,n})(a_1(\psi)h + a_2(\psi)R^{-2})$,
где $\epsilon_{k,n} \to 0$ при $n \to \infty$;

2) $|\mu_{k,n} - \mu_k| \le (1 + \sigma_{k,n})(f_1(\psi_k)h^2 + f_2(\psi_k)R^{-4})$,
где $\sigma_{k,n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Коэффициенты $a_1(\psi_k)$, $a_2(\psi_k)$, $f_1(\psi_k)$, $f_2(\psi_k)$ определяются при помощи любого из двух утверждений леммы 4.4.

Доказательство первого утверждения теоремы 4.1 следует из леммы 4.4 и неравенства $\|\psi_{k,n} - \psi_k\| \le (1 + \epsilon_{k,n})\|P^{(n)}\psi_k\|$

$$(\|\psi_k\| = \|\psi_{k,n}\| = 1, \quad \epsilon_{k,n} = \frac{\|P^{(n)}T\psi_{k,n}\| - \|P^{(n)}T\psi_k\|}{\|P^{(n)}T\psi_k\|} \to 0,\ n \to \infty),$$

которое следует из теоремы 18.6 [19].

Второе утверждение следует из леммы 4.4 и неравенства

$$|\mu_{k,n} - \mu_k| \le |\mu_{k,n}|(1 + \sigma_{k,n})\|P^{(n)}\psi_k\|^2 \quad (\|\psi_k\| = 1,$$

$$\sigma_{k,n} = \frac{(P^{(n)}T\psi_{k,n}; P^{(n)}T\psi_k) - \|P^{(n)}T\psi_k\|^2}{\|P^{(n)}T\psi_k\|^2} \to 0,\ n \to \infty),$$

которое следует из теоремы 18.7 [19].

§ 5. АППРОКСИМАЦИИ ПО МЕТОДУ ГАЛЕРКИНА ПРИ ПОМОЩИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $\{z_i\}_1^\infty$

Определим предельно плотную в $L_{2,\infty}$ последовательность замкнутых подпространств $\{y_n\}$, базисом в каждом из которых являются первые n функций из $\{z_i\}_1^\infty$. Определим ортопроектор S_n:

$$S_n\,\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} (\psi, z_i)\, z_i(x).$$

Так как проекторы S_n ограничены в $L_{2,\infty}$ и для любой функции $\psi(x) \in L_{2,\infty}$ $\|S_n\psi - \psi\| \to 0$ при $n \to \infty$, то согласно лемме 15.4 [19], $\|S^{(n)}T\| \to 0$ при $n \to \infty$ ($S^{(n)} = I - S_n$). Поэтому $|\mu_{k,n} - \mu_k| \to 0$ при $n \to \infty$.

Т е о р е м а 5.1. Пусть $Q_n = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |(\psi_k, z_i)|^2 \right)^{1/2}$,

тогда справедливы оценки:

1) $\| \psi_{k,n} - \psi_k \| \le (1 + \epsilon_{k,n}) Q_n$, $\epsilon_{k,n} \to 0$ при $n \to \infty$;

2) $|\mu_{k,n} - \mu_k| \le |\mu_{k,n}| (1 + \sigma_{k,n}) Q_n^2$, $\sigma_{k,n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Построим аппроксимацию методом Галеркина уравнения (1.1) по базису $\{z_i\}_1^\infty$. Ищем решение в виде

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j z_j(x) , \tag{5.1}$$

где $u_h = (u_1, \ldots, u_n)^T$ - вектор неизвестных.

С учетом представления (5.1) запишем схему Галеркина:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_i \delta_{ij} + \alpha \ell_{ij} - \lambda m_i \delta_{ij}) u_j = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где δ_{ij} - символ Кронекера,

$$a_i = \chi_i \int_0^\infty z_i^2(x)\, dx ;$$

$$\ell_{ij} = \pi^{-1} \int_0^\infty z_i(x) \int^\infty \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| z_j(y)\, dy\, dx ;$$

$$m_i = \int_0^\infty z_i^2(x)\, dx .$$

Таким образом, получим алгебраическую обобщенную задачу на собственные значения

$$(D + \alpha L) u_h = \lambda M u_h ,$$

где

$$D = \mathrm{diag}\{\chi_1 m_1; \ldots; \chi_n m_n\}, \quad L = \{\ell_{ij}\}, \quad M = \mathrm{diag}\{m_1, \ldots, m_n\}.$$

§ 6. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Аппроксимацию методом Галеркина уравнения (1.1) строим по базису $\{\phi_i\}_1^n$, определенному в (4.2). Ищем решение $\psi(x)$ задачи (1.1) в виде

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} u_i \phi_j(x) , \tag{6.1}$$

где $u_h = (u_1, \ldots, u_n)^T$ - вектор неизвестных. С учетом представления $\psi(x)$ из (6.1) запишем схему Галеркина

$$\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} + \ell_{ij} + r_{ij} - \lambda m_{ij}) u_j = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6.2}$$

где

$$v_{ij} = \int_0^\infty \phi_i(x) v(x) \phi_j(x) dx ;$$

$$\ell_{ij} = a \pi^{-1} \int_0^\infty \phi_i(y) \int_0^\infty \ln \left| \frac{y-x}{y+x} \right| \phi_j(x) dx dy ;$$

$$r_{ij} = \beta^3 \pi^{-1} \int_0^\infty \phi_i(y) \frac{d^2}{dy^2} \int_0^\infty \ln \left| \frac{y-x}{y+x} \right| \phi_j(x) dx dy ;$$

$$m_{ij} = \int \phi_i(x) \phi_j(x) dx ; \quad j = \overline{1, n}.$$

Априорная информация о гладкости решения $\psi(x)$ позволяет нам вычислить интегралы для v_{ij} и m_{ij} в системе уравнений (6.2) по формулам прямоугольников, что несколько упрощает вид матричных элементов. Формально они соответствуют методу коллокаций, рассматриваемому в рамках схемы Петрова-Галеркина.

После упомянутых упрощений получим алгебраическую систему вида

$$A u_h = \lambda u_h , \tag{6.3}$$

где $A = D + h^{-1}(T_L + H_L) + h^{-1}(T_R + H_R)$.

Здесь

$$D = \mathrm{diag}(v(x_1), \ldots, v(x_n)), \quad T_L + H_L = \{\ell_{ij}\};$$

$$T_R + H_R = \{r_{ij}\}; \quad T_{ij} = \{t_{|i-j|}\}; \quad H_{ij} = \{h_{i+j}\};$$

T_L, T_R - матрицы типа теплицевых, H_L, H_R - матрицы типа ганкелевых.

Проблему определения p максимальных собственных чисел матрицы A решаем методом итерирования подпространства /20,21,23/, используя быстрый алгоритм сложности $O(n \ln n)$ умножения теплицевых T и ганкелевых H матриц на вектор /22/. Если $\Lambda = \{\lambda_1; \ldots \lambda_p\}$ - искомое множество собственных чисел (СЧ), а $\bar{\Lambda} = \{\lambda_{p+1}; \ldots; \lambda_n\}$, $\lambda_i \geq 0$ - остальные СЧ, упорядоченные по убыванию, то сложность проблемы оценивается величиной $O(kpn \ln n)$, где $k = \ln\epsilon / \ln q$, $q = \lambda_{p+1}/\lambda_p$, ϵ - требуемая точность вычисления собственных функций (СФ).

В ряде задач значительное уменьшение вычислительной работы может быть достигнуто за счет использования последовательности спектральных задач /23/:

$$\begin{cases} A_m u_m = \lambda u_m; \\ (u_m, u_m) - 1 = 0; \quad m = \overline{1, M}, \end{cases} \tag{6.4}$$

каждая из которых соответствует одной и той же дискретизации исходного оператора, но при различном числе неизвестных $n_1 < n_2 < \ldots < n_M$. При реализации многосеточного (MG) алгоритма решения серии задач (6.4) используем разложение сеточного решения u_m по степеням шага дискретизации h_m, что позволяет ускорить сходимость процесса итерирования подпространства, а также уменьшить погрешность приближенного решения u_M /23/.

Алгоритм реализован в виде модульного программного комплекса. Задача (6.4) на одной сетке решается методом итерирования подпространства в реализации Рутисхаузера /21/ с использованием алгоритмов быстрого умножения T и H - матриц порядка $n = 2^{M_1}$ на вектор /24/. MG-итерационный процесс основан на интерполяции "вперед", предложенной в /25/ и использующей разложение погрешности СФ по степеням шага дискретизации. Для уточнения приближенных решений используется экстраполяция Ричардсона относительно шага h /26/. Для решения задачи требуется суммарный массив размерности $2(p+1)n + 16n + O(p^2)$.

При $m = 1$ в качестве начального значения берется p случайных n_1-векторов. Для $m = 2$ начальное значение формируется из компонент решения x_1 линейной интерполяцией. При $m > 2$ исполь-

Таблица 1

R	Δ^1_6	Δ^1_7	$\Delta^1_{6,7}$
8	$4{,}1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$2{,}5\cdot10^{-5}$
16	$1{,}6\cdot10^{-2}$	$4{,}1\cdot10^{-3}$	$7{,}7\cdot10^{-6}$

Таблица 2

R	Δ^2_6	Δ^2_6	$\Delta^2_{6,7}$
8	$2{,}1\cdot10^{-2}$	$5{,}2\cdot10^{-3}$	$3{,}8\cdot10^{-5}$
16	$8{,}2\cdot10^{-2}$	$2{,}1\cdot10^{-2}$	$1{,}5\cdot10^{-4}$

зуем экстраполяцию по двум предыдущим решениям:

$$x_m(\ell,\ k) = \omega P_{m-1}\, x_{m-1}(\ell, k) + (1-\omega)\, P_{m-2}\, x_{m-2}(\ell\ , k)\ ,$$

где операторы P_{m-1}, P_{m-2} интерполируют векторы из $R^{n_{m-1}}$ и $R^{n_{m-2}}$ в R^{n_m} с точностью, согласованной с порядком аппроксимации континуальной задачи.

Одна итерация алгоритма выполняется за $Q = p\,O(n\ln n) + O(p^2)$ арифметических действий.

Проиллюстрируем основные характеристики алгоритма на примере точно решаемой модели, которая получается при $\alpha = 0$, $\beta = 1$ в (1.1). Здесь СЧ равны $\chi_i = \xi_i$, где ξ_i - нули функции Эйри ($i = \overline{1, \infty}$). Решалась задача для $p = 4$, $n_5 = 2^7$ (= 128) с использованием четырех вспомогательных сеток размерности $n_i = 2^{3+i}$; $i = \overline{1, 4}$. Используем обозначение: ϵ - точность ортонормированных СФ, МЕ - число СФ, точность которых контролируется. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\epsilon = 10^{-4}$, МЕ = 1, p = 4. В табл. 1 и 2 приведены достигнутые абсолютные точности Δ^1 и Δ^2 соответственно для СЧ χ_1 и χ_2, где Δ^i_6, Δ^i_7 - погрешности вычислений по предпоследней и последней сетке, а $\Delta^i_{6,7}$ - погрешность экстраполированных по шагу h приближенных СЧ.

Приведенные результаты свидетельствуют об эффективности экстраполяции Ричардсона по шагу h . В практических задачах удается также использовать экстраполяцию на основе разложения погрешности по степеням R^{-1} /27,23/.

При помощи описанного выше комплекса программ были проведены расчеты спектра масс J/ψ-частицы для состояний с равным нулю орбитальным квантовым числом [4]. При этом использовалось релятивистское квазипотенциальное уравнение

$$(1+p^2)^{1/2}\,((1+p^2)^{1/2}-E)\,\psi(p)=\alpha\,\pi^{-1}\int_0^\infty \ln\left|\frac{p-k}{p+k}\right|\psi(k)\,dk\;+$$

$$+\beta\,\pi^{-1}\,\frac{d^2}{dp^2}\int_0^\infty \ln\left|\frac{p-k}{p-k}\right|\psi(k)\,dk \qquad (6.5)$$

со следующими значениями констант: $\alpha = 0{,}561 \pm 6\cdot 10^{-6}$; $\beta = 0{,}016 \pm 9\cdot 10^{-5}$. Для вычисления массы J/ψ-частицы использовалась формула $M = 2Em$, где m = 1692,8 МэВ - масса кварка.

В табл.3 представлены результаты расчетов масс основного и первых трех возбужденных состояний J/ψ-мезона. Константы α и β фиксировались по массам основного и первого возбужденного состояний.

Таблица 3

$M_{эксп.}$ /МэВ/	$M_{теор.}$ /МэВ/
3096,9 ± 0,1	3096,9
3686,0 ± 0,1	3686,0
4028 ± 10	3972,3
4159 ± 20	4169,9

Разработанный комплекс программ предназначен также для решения систем уравнений, аналогичных (6.5), которые используются при описании спектра масс и других характеристик векторных мезонов для состояний с неравным нулю орбитальным квантовым числом.

В заключение авторы выражают балагодарность Н.Б.Скачкову и А.В.Сидорову за полезные обсуждения при постановке физической задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. - J.Nuovo Cimento, 1963, vol.29, p.380.
2. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov P.M., Skachkov N.B. - J.Nuovo Cimento, 1968, vol.55A, No.2, p.232.
3. Широков Ю.М. - ЖЭТФ, т.35, № 4, с.1005.
4. Zhydkov E.P. et al. - Preprint JINR E11-88-494,Dubna,1988.
5. Сидоров А.В., Скачков Б.Н. - Препринт ОИЯИ Р2-80-45, Дубна, 1980.

6. Wendland W.L. Strongly Elliptic Boundary Integral Equations, in the State of the Art in Numerical Analysis, Iserles A.and Powell M.,eds.Clarendon Press(Oxford),p.511.
7. Стрэнг Г., Фикс Дж. - Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
8. Сьярле Ф. - Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
9. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. - Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
10. Капшай В.Н., Кулешов С.П., Скачков Н.Б. - ЯФ, 1983, т.37, с.1292.
11. Флюгге З. - Задачи по квантовой механике.Т.1.М.:Мир,1974.
12. Левитан Б.М., Саргсян И.С. - Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
13. Хатсон В., Пим Дж. - Приложение функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.
14. Гахов Ф.Д. - Краевые задачи. М.: Гос.изд-во физ.-мат. лит-ры, 1969.
15. Зигмунд А. - Тригонометрические ряды. Т.2. М.: Мир, 1965.
16. Справочник по специальным функциям. Под ред.Абрамовиц М. и Стиган И. М.: Наука, 1979.
17. Люстерник Л.А., Соболев В.И.- Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
18. Канторович А.В., Акилов Г.П. - Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
19. Красносельский М.А. и др. - Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
20. Парлетт Б. - Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983.
21. Уилкинсон Дж., Райнш С. - Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. М.: Машиностроение, 1976.
22. Бадева В., Морозов В.А. - В кн.: Численный анализ на ФОРТРАНе. Вып.20. М.: изд-во МГУ, 1977, с.80.
23. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. - В кн.: Вычислительные процессы и системы. Вып.6. М.: Наука, 1988, с.134.
24. Воеводин В.В., Тартышников Е.Е. - Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.
25. Ayrjan E.A., Zhydkov E.P., Khoromsky B.N. - Comp.Phys. Comm., 1983, vol.29, p.125.
26. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. - Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
27. Жидков Е.П., Никонов Э.Г., Хоромский Б.Н. - ОИЯИ, Р11-85-970, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 марта 1989 года.