объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-88-922

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

ФАКТОРИЗАЦИИ КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ОБРАЩЕНИИ В НУЛЬ НЕКОТОРЫХ ИЗ ИХ ВЕДУЩИХ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ БЛОЧНЫХ УГЛОВЫХ МИНОРОВ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

*Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1988

I. Введение

В настоящей работе обобщаются результаты [4÷6] по поиску естественных [6] факторизованных представлений квазитрехдиагональных матриц в случае, если обращаются в нуль одновременно некоторые из верхних и нижних блочных угловых миноров этих матриц. Результаты работы позволяют получить нетрадиционные обобщения компактных схем [6] Гаусса для указанных матриц.

Итак, пусть $\mathbb{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_1 & \tilde{r}_2 & & & & \\ \tilde{p}_2 & E_2 & \tilde{r}_3 & & & \\ & \tilde{p}_3 & E_3 & \tilde{r}_4 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \tilde{p}_{m-1} & E_{m-1} & \tilde{r}_m \\ & & & & \tilde{p}_m & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_1 & & & & & \\ & q_2 & & & & \\ & & q_3 & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & q_{m-1} & \\ & & & & & q_m \end{bmatrix}=\tilde{\mathbb{C}}\cdot\mathbb{C}_{\Phi} \qquad (I.1)$$

где

$$\left\{ \tilde{r}_k = r_k\cdot q_k^{-1}\ ;\ \tilde{p}_k = p_k\cdot q_{k-1}^{-1} \right\}_{k=2}^{m}, \qquad (I.2)$$

$\{E_k, q_k\}_{k=1}^{m}$ – неособенные[x)] (E_k – единичные) квадратные (в общем случае разных размерностей) диагональные элементы-блоки, а $\{r_k, p_k\ ;\ \tilde{r}_k, \tilde{p}_k\}_{k=2}^{m}$ – прямоугольные (соответствующих размерностей) внедиагональные элементы-блоки[xx)] у матриц $\mathbb{C}$ и $\tilde{\mathbb{C}}$ соответственно и $\mathbb{C}_{\Phi}$ – квазидиагональная матрица. Будем также всюду далее обозначать $\{\mathbb{O}_k\}_{k=1}^{m}$ – нулевые матрицы соответствующих размерностей.

Замечание I. Напомним, что под оператором (матрицей) $\mathbb{C}$ (I.I) общего вида имеется в виду [2÷6] случай $\{(q_k \neq q_{k'}) \neq (r_k \neq r_{k'}) \neq (p_k \neq p_{k'})$ при $k\neq k'\}_{k=2}^{m}$. Кроме того, в настоящей серии работ понятия квазитрехдиагональная и блочная трехдиагональная матрица являются эквивалентными. Эквивалентными являются и понятия верхних (нижних) главных угловых квазиминоров и верхних (нижних) главных блочных угловых миноров – $\Delta_1^j\ (\Delta_j^m)$, т.е.

x) Если же окажется, что $det(q_k)=0$ для любого $(1\le k\le m)$, то можно сначала выполнить разбиение $\mathbb{C}$ (I.I) на блоки (в соответствии с Замечанием I[6]) большей размерности таким образом, чтобы $\{det(\tilde{q}_j)\neq 0\}_{j=1}^{\tilde{m}\le m}$ либо воспользоваться рекомендацией Замечания 5 в конце настоящей работы.

xx) Напомним [2÷6], что если $\{q_1;\ q_k, r_k, p_k;\ \tilde{r}_k, \tilde{p}_k\}_{k=2}^{m}$ – линейные операторы, то $\mathbb{C}$ (I.I) будет матрицей линейных операторов.

миноров (определителей) матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), начинающихся соответственно с q_1 (и с q_m). В указанных выше [2÷6] работах принята также (для удобства) единая нумерация лемм, теорем и представлений, отдельная как для матриц $\mathbb{C}$ (I.I), так и для им обратных $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$. В работах [4÷6] и всюду далее мы пользуемся обозначениями $\mathbb{C}(\Lambda)$, $\mathbb{C}(G)$ и $\mathbb{C}(\Lambda,G)$; $\mathbb{B}(\Lambda)$, $\mathbb{B}(G)$ и $\mathbb{B}(\Lambda,G)$ для представлений матриц $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ как функций последовательностей матриц $\{G\}$ (I.II) и $\{\Lambda\}$ (I.I2).

Ниже мы приводим лишь те из основных результатов, полученных нами в [3,5], которые будут явно использованы в настоящей работе.

Итак, если все верхние (нижние) главные угловые квазиминоры матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) отличны от нуля либо $\mathbb{C}$ (I.I) разбита на блоки в соответствии с ж) так, что это условие выполняется, то (как показано в [3,5]) для $\mathbb{C}$ (I.I) либо их усеченных (т.е. уменьшенной размерности) матриц $\mathbb{C}^1_{k-1}$ (I.4), $\mathbb{C}^{k+2}_m$ (I.5) имеют место представления:

<u>Представление 5(5')</u> <u>Представление 7(7')</u>

$$\mathbb{C}(\Lambda)=\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\beta_i)E_i \\ \cdots \\ (-\beta_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \cdots \\ \Lambda_{i+1} \\ \cdots \\ \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-c_2) \\ \cdots \\ E_i(-c_i) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-c_m) \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) \\ \cdots \\ E_i(-\hat\beta_{i+1}) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-\hat\beta_m) \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \cdots \\ G_{i-1} \\ \cdots \\ G_{m-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat c_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\hat c_i)E_i \\ \cdots \\ (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(G) \qquad (I.2)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{k+1}=-(\tilde P_{k+1}\Lambda_{k+1}^{-1}),\ c_{k+1}=-(\Lambda_{k+1}^{-1}\tilde z_{k+1}), \\ \Lambda_{k+1}=E_k-\tilde P_k\Lambda_k^{-1}\tilde z_k,\ \Lambda_2=E_1,\ k=2,3,\ldots,m; \end{cases} \begin{cases} \hat\beta_{k+1}=-(\tilde z_{k+1}G_k^{-1}),\ \hat c_{k+1}=-(G_k^{-1}\tilde P_{k+1}), \\ G_{k-1}=E_k-\tilde z_{k+1}G_k^{-1}\tilde P_{k+1},\ G_{m-1}=E_m,\ k=m-1,\ldots,1 \end{cases} \qquad (I.3)$$

<u>Представление 29(29')</u> $(1\le j\le i\le k-1)$ <u>Представление 32(32')</u> $(1\le i\le j\le k-1)$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\beta_i)E_i \\ \cdots \\ (-\beta_{k-1})E_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde z_2 & & \mathbb{O} \\ & \tilde z_i & \\ \overset{(k-1)}{L} & & \tilde z_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat c_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\hat c_i)E_i \\ \cdots \\ (-\hat c_{k-1})E_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}^1_{k-1}(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) \\ \cdots \\ E_j(-\hat\beta_{j+1}) \\ \cdots \\ E_{k-2}(-\hat\beta_{k-1}) \\ E_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde P_2 & & \overset{(k-1)}{R} \\ & \tilde P_j & \\ \mathbb{O} & & \tilde P_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-c_2) \\ \cdots \\ E_j(-c_{j+1}) \\ \cdots \\ E_{k-2}(-c_{k-1}) \\ E_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_j \\ \cdots \\ q_{k-1} \end{bmatrix}. \qquad (I.4)$$

Либо эквивалентные последним по два представления

<u>Представление 30(30')</u> $(1\le j\le i\le k-1)$ <u>Представление 31(31')</u> $(1\le j\le i\le k-1)$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\beta_i)E_i \\ \cdots \\ (-\beta_{k-2})E_{k-2} \\ (-\beta_{k-1})E_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [\tilde B_{11}^{-1}-\tilde z_2\hat c_2](\tilde z_2) \\ \cdots \\ [\tilde B_{ii}^{-1}-\tilde z_{i+1}\hat c_{i+1}](\tilde z_{i+1}) \\ \cdots \\ [\tilde B_{k-2,k-2}^{-1}-\tilde z_{k-1}\hat c_{k-1}](\tilde z_{k-1}) \\ [\tilde B_{k-1,k-1}^{-1}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_{k-1} \end{bmatrix}=\mathbb{C}^1_{k-1}(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} [\tilde B_{11}^{-1}](\tilde z_2) \\ [\tilde B_{22}^{-1}\beta_2\tilde z_2](\tilde z_3) \\ \cdots \\ [\tilde B_{ii}^{-1}\beta_i\tilde z_i](\tilde z_{i+1}) \\ \cdots \\ [\tilde B_{k-1,k-1}^{-1}\beta_{k-1}\tilde z_{k-1}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat c_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\hat c_i)E_i \\ \cdots \\ (-\hat c_{k-1})E_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_{k-1} \end{bmatrix} \qquad (I.5)$$

<u>Представление 33(33')</u> $(1\le i\le j\le k-1)$ <u>Представление 34(34')</u> $(1\le i\le j\le k-1)$

$$\begin{bmatrix} [\tilde B_{11}^{-1}\hat\beta_2\tilde P_2] \\ (\tilde P_2)[\tilde B_{22}^{-1}\hat\beta_3\tilde P_3] \\ \cdots \\ (\tilde P_j)[\tilde B_{jj}^{-1}\hat\beta_{j+1}\tilde P_{j+1}] \\ \cdots \\ (\tilde P_{k-1})[\tilde B_{k-1,k-1}^{-1}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-c_2) \\ E_2(-c_3) \\ \cdots \\ E_j(-c_{j+1}) \\ \cdots \\ E_{k-2}(-c_{k-1}) \\ E_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_j \\ \cdots \\ q_{k-1} \end{bmatrix}=\mathbb{C}^1_{k-1}(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) \\ \cdots \\ E_j(-\hat\beta_{j+1}) \\ \cdots \\ E_{k-2}(-\hat\beta_{k-1}) \\ E_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [\tilde B_{11}^{-1}] \\ (\tilde P_2)[\tilde B_{22}^{-1}\tilde P_2 c_2] \\ \cdots \\ (\tilde P_j)[\tilde B_{jj}^{-1}\tilde P_j c_j] \\ \cdots \\ (\tilde P_{k-1})[\tilde B_{k-1,k-1}^{-1}\tilde P_{k-1}c_{k-1}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_j \\ \cdots \\ q_{k-1} \end{bmatrix} \qquad (I.6)$$

<u>А также</u>

<u>Представление 29(29')</u> $(k+2\le j\le i\le m)$ <u>Представление 32(32')</u> $(k+2\le i\le j\le m)$

$$\begin{bmatrix} E_{k+2} \\ (-\beta_{k+2})E_{k+3} \\ \cdots \\ (-\beta_j)E_j \\ \cdots \\ (-\beta_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde z_{k+3} & & \mathbb{O} \\ & \tilde z_j & \\ \overset{(m)}{L} & & \tilde z_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{k+2} \\ (-\hat c_{k+3})E_{k+3} \\ \cdots \\ (-\hat c_j)E_j \\ \cdots \\ (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{k+2} \\ q_{k+3} \\ \cdots \\ q_j \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}^{k+2}_m(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} E_{k+2}(-\hat\beta_{k+3}) \\ \cdots \\ E_i(-\hat\beta_{i+1}) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-\hat\beta_m) \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde P_{k+3} & & \overset{(m)}{R} \\ & \tilde P_i & \\ \mathbb{O} & & \tilde P_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{k+2}(-c_{k+2}) \\ \cdots \\ E_i(-c_{i+1}) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-c_m) \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{k+2} \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix}, \qquad (I.7)$$

либо эквивалентные последним по два представления

<u>Представление 30(30')</u> $(k+2\le j\le i\le m)$ <u>Представление 31(31')</u> $(k+2\le j\le i\le m)$

$$\begin{bmatrix} E_{k+2} \\ (-\beta_{k+3})E_{k+3} \\ \cdots \\ (-\beta_j)E_j \\ \cdots \\ (-\beta_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [\tilde B_{k+2,k+2}^{-1}-\tilde z_{k+3}\hat c_{k+3}](\tilde z_{k+3}) \\ \cdots \\ [\tilde B_{jj}^{-1}-\tilde z_{j+1}\hat c_{j+1}](\tilde z_{j+1}) \\ \cdots \\ [\tilde B_{m-1,m-1}^{-1}-\tilde z_m\hat c_m](\tilde z_m) \\ [\tilde B_{mm}^{-1}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{k+2} \\ \cdots \\ q_j \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}^{k+2}_m(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} [\tilde B_{k+2,k+2}^{-1}](\tilde z_{k+3}) \\ [\tilde B_{k+3,k+3}^{-1}\beta_{k+3}\tilde z_{k+3}](\tilde z_{k+4}) \\ \cdots \\ [\tilde B_{jj}^{-1}\beta_j\tilde z_j](\tilde z_{j+1}) \\ \cdots \\ [\tilde B_{mm}^{-1}\beta_m\tilde z_m] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{k+2} \\ (-\hat c_{k+3})E_{k+3} \\ \cdots \\ (-\hat c_j)E_j \\ \cdots \\ (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{k+2} \\ \cdots \\ q_j \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix} \qquad (I.8)$$

<u>Представление 33(33')</u> $(k+2\le i\le j\le m)$ <u>Представление 34(34')</u> $(k+2\le i\le j\le m)$

$$\begin{bmatrix} [\tilde B_{k+2,k+2}^{-1}\hat\beta_{k+3}\tilde P_{k+3}] \\ (\tilde P_{k+3})[\tilde B_{k+3,k+3}^{-1}\hat\beta_{k+4}\tilde P_{k+4}] \\ \cdots \\ (\tilde P_i)[\tilde B_{ii}^{-1}\hat\beta_{i+1}\tilde P_{i+1}] \\ \cdots \\ (\tilde P_m)[\tilde B_{mm}^{-1}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{k+2}(-c_{k+3}) \\ \cdots \\ E_i(-c_{i+1}) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-c_m) \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{k+2} \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}^{k+2}_m(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} E_{k+2}(-\hat\beta_{k+3}) \\ \cdots \\ E_i(-\hat\beta_{i+1}) \\ \cdots \\ E_{m-1}(-\hat\beta_m) \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [\tilde B_{k+2,k+2}^{-1}] \\ (\tilde P_{k+3})[\tilde B_{k+3,k+3}^{-1}\tilde P_{k+3}c_{k+3}] \\ \cdots \\ (\tilde P_i)[\tilde B_{ii}^{-1}\tilde P_i c_i] \\ \cdots \\ (\tilde P_m)[\tilde B_{mm}^{-1}\tilde P_m c_m] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{k+2} \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix}, \qquad (I.9)$$

где элементы-блоков $\overset{(k-1)}{L}_{ij}$ (при $1\le j\le i\le k-1$), $\overset{(m)}{L}_{ij}$ (при $k+2\le j\le i\le m$), $\overset{(k-1)}{R}_{ij}$ (при $1\le i\le j\le k-1$), $\overset{(m)}{R}_{ij}$ (при $k+2\le i\le j\le m$), соответствующих матриц $\overset{(k-1)}{L}$, $\overset{(m)}{L}$; $\overset{(k-1)}{R}$, $\overset{(m)}{R}$ - определены в виде $\overset{(k-1)}{L}_{ij}=(\tilde B_{ii}^{-1}\prod_{z=j+1}^{i}\hat c_z=\prod_{z=j+1}^{i}\beta_z\tilde B_{jj}^{-1})$ (при $1\le j\le i\le k-1$), $\overset{(m)}{L}_{ij}=(\tilde B_{ii}^{-1}\prod_{z=j+1}^{i}\hat c_z=\prod_{z=j+1}^{i}\beta_z\tilde B_{jj}^{-1})$ (при $k+2\le j\le i\le m$); $\overset{(k-1)}{R}_{ij}=(\prod_{z=i+1}^{j}\hat\beta_z\tilde B_{jj}^{-1}=\tilde B_{ii}^{-1}\prod_{z=i+1}^{j}c_z)$ (при $1\le i\le j\le k-1$), $\overset{(m)}{R}_{ij}=(\prod_{z=i+1}^{j}\hat\beta_z\tilde B_{jj}^{-1}=\tilde B_{ii}^{-1}\prod_{z=i+1}^{j}c_z)$ (при $k+2\le i\le j\le m$), а последовательности матриц $\{c,\hat c;\beta,\hat\beta\}$ - определены в виде (I.3), где $\{\Lambda_z, det(\Lambda_z)\ne0\}_{z=2}^{m+1}$, $\{G_z, det(G_z)\ne0\}_{z=0}^{m-1}$ и

$$\tilde B_{zz}^{-1}=(\Lambda_{z+1}+G_{z-1}-E_z),\ \tilde B_{11}^{-1}=G_0,\ \tilde B_{mm}^{-1}=\Lambda_{m+1},\ z=2,3,\ldots,m-1. \qquad (I.10)$$

<u>При этом</u> (с учетом Теоремы 6(6')[3]) $\{det(\tilde B_{zz})\ne0\}_{z=1}^m$, а также для структурных последовательностей матриц Πc_z, $\Pi\beta_z$; $\Pi\hat c_z$, $\Pi\hat\beta_z$ имели место порядки умножения (I.I0) и (I.II) [4].

В работе [4], <u>если</u> $det(G_k)=0$ для любого $(2\le k\le m-2)$ <u>либо</u> $det(\Lambda_k)=0$ для любого $(3\le k\le m-1)$ были обобщены определения последовательностей $\{G\}$ (I.3) и $\{\Lambda\}$ (I.3) в виде

$$\begin{cases} \text{Если } det(G_k)\ne 0 \text{ то } G_{k-1}=E_k-\tilde{z}_{k+1}\cdot G_k^{-1}\cdot\tilde{P}_{k+1}, \; G_{m-1}=E_m, \; k=m-1,\dots,2,1. \\ \text{Если } det(G_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2), \text{ то } G_{k-1}=?, \text{ но } G_{k-2}=E_{k-1}. \end{cases} \quad (I.11)$$

$$\begin{cases} \text{Если } det(\Lambda_k)\ne 0 \text{ то } \Lambda_{k+1}=E_k-\tilde{P}_k\cdot\Lambda_k^{-1}\cdot\tilde{z}_k, \; \Lambda_2=E_1, \; k=2,3,\dots m. \\ \text{Если } det(\Lambda_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1), \text{ то } \Lambda_{k+1}=?, \text{ но } \Lambda_{k+2}=E_{k+1}. \end{cases} \quad (I.12)$$

Далее на основе (I.11) и (I.12) были получены представления 27(27$'$), 28(28$'$)[4] и 63(63$'$)÷70(70$'$)[6] при следующих основных [6] условиях

I. $[det(G_k)=0$ для любого k из $(2\le k\le m-2)]$ <u>либо</u> $[det(\Lambda_k)=0$ для любого k из $(3\le k\le m-1)]$.

II. $\begin{cases} [det(G_k)=0 \text{ \underline{и} } det(G_{k-3})=0 \text{ для любого } k \text{ из } (5\le k\le m-2)] \text{ \underline{либо}} \\ [det(\Lambda_k)=0 \text{ \underline{и} } det(\Lambda_{k+3})=0 \text{ для любого } k \text{ из } (8\le k\le m-4)]. \end{cases}$

III. $\begin{cases} [det(G_k)=0 \text{ \underline{и} } det(G_\ell)=0 \text{ для любого } k \text{ - фиксированного и \underline{любого} } \ell \text{ из} \\ (2\le\ell<k-3)] \text{ \underline{либо} } [det(\Lambda_k)=0 \text{ \underline{и} } det(\Lambda_\ell)=0 \text{ для любого } k \text{ - фиксированного и лю-} \\ \text{бого } \ell \text{ из } (k+3<\ell\le m-1)]. \end{cases}$

IУ. $\begin{cases} [det(G_k)=0 \text{ \underline{и} } det(G_{\ell_j})=0 \text{ \underline{для любых} целых } \ell_n,\ell_{n-1},\dots,\ell_1 \text{ таких, что} \\ (k>\ell_n>\ell_j) \text{ \underline{и} } (\ell_{j+1}-3>\ell_j), \text{ где } j=n-1,n-2,\dots,1] \text{ \underline{либо}} \\ [det(\Lambda_k)=0 \text{ \underline{и} } det(\Lambda_{\ell_i})=0 \text{ \underline{для любых} целых } \ell_1,\ell_2,\dots,\ell_{n-1},\ell_n \text{ таких,} \\ \text{что } (k<\ell_1<\ell_i) \text{ \underline{и} } (\ell_{i-1}+3<\ell_i), \text{ где } i=1,2,\dots,n-1]. \end{cases}$

У. $\begin{cases} [det(G_k)=0 \text{ \underline{и} } det(G_{\ell_j})=0 \text{ \underline{для всех} целых } \ell_n,\ell_{n-1},\dots\ell_1 \text{ таких, что} \\ (k>\ell_n>\ell_j) \text{ \underline{и} } (\ell_{j+1}-3=\ell_j), \text{ где } j=n-1,n-2,\dots,2,1] \text{ \underline{либо}} \\ [det(\Lambda_k)=0 \text{ \underline{и} } det(\Lambda_{\ell_i})=0 \text{ \underline{для всех} целых } \ell_1,\ell_2,\dots,\ell_{n-1},\ell_n \text{ таких, что} \\ (k<\ell_1<\ell_i) \text{ \underline{и} } (\ell_{i-1}+3=\ell_i), \text{ где } i=1,2,\dots,n-1]. \end{cases}$

Возможные же другие случаи (без одновременных) вырождений матриц в последовательностях $\{G\}$ и $\{\Lambda\}$ являются следствием I÷У.

Следующий параграф настоящей работы посвящен построению представлений для $\mathbb{C}$ (I.I) в виде функций одновременно от матриц $\{G\}$ и $\{\Lambda\}$, если происходят одновременные вырождения в этих последовательностях. Другими словами, будут получены представления, подобные представлениям 29(29$'$)÷34(34$'$) в случае, когда некоторые <u>встречные</u> главные угловые квазиминоры $\mathbb{C}$ (I.I) обращаются в нуль одновременно. Ясно, что такие представления в общем случае не являются следствием I÷У (см., например, Замечание 4[6]).

2. <u>Представления неособенных квазитрехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) в случае одновременного обращения в нуль некоторых из их верхних и нижних ведущих блочных угловых миноров</u>.

С учетом результатов Леммы 9 [6] и Теоремы I8 [5] дополним возможные случаи вырождений вида I÷У в последовательностях матриц

$\{G\}$(I.11) и $\{\Lambda\}$(I.12) <u>одновременными</u> вырождениями вида

УI. $\begin{cases} [det(G_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2) \text{ \underline{но} } \{det(G_z)\ne 0\}_{z=k+1}^{m-2}, \{det(G_z)\ne 0\}_{z=0}^{k-3}] \text{ \underline{и}} \\ [det(\Lambda_{k+1})=0 \text{ для того же } k \text{ \underline{но} } \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=3}^{k}, \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=k+4}^{m+1}]. \end{cases}$

УII. $\begin{cases} [det(G_k)=0 \text{ и } det(G_{k-3})=0 \text{ для любого } k \text{ из } (5\le k\le m-2) \text{ \underline{но} } \{det(G_z)\ne 0\}_{z=k+1}^{m-2}, \\ \{det(G_z)\ne 0\}_{z=0}^{k-6}] \text{ \underline{и} } [det(\Lambda_{k+1})=0 \text{ и } det(\Lambda_{k-2})=0 \text{ для того же } k \text{ \underline{но} } \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=k+4}^{m+1}, \\ \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=3}^{k-1}]. \end{cases}$

УIII. $\begin{cases} [det(G_k)=0 \text{ и } det(G_\ell)=0 \text{ для любого } k \text{ - фиксированного и \underline{любого} } \ell \text{ из} \\ (2\le\ell<k-3) \text{ \underline{но} } \{det(G_z)\ne 0\}_{z=k+1}^{m-2}, \{det(G_z)\ne 0\}_{z=\ell+1}^{k-3}, \{det(G_z)\ne 0\}_{z=0}^{\ell-3}] \text{ \underline{и}} \\ [det(\Lambda_{k+1})=0 \text{ и } det(\Lambda_{\ell+1})=0 \text{ для тех же } k \text{ и } \ell \text{ \underline{но} } \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=3}^{k}, \\ \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=k+4}^{\ell}, \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=\ell+4}^{m+1}]. \end{cases}$

IX. $\begin{cases} \text{условия IУ}_{1)} \text{ \underline{но} } \{det(G_z)\ne 0\}_{z=k+1}^{m-2}, \{det(G_z)\ne 0\}_{z=k''+1}^{k-3}, \{det(G_z)\ne 0\}_{z=k'+1}^{k''-3}, \{det(G_z)\ne 0\}_{z=0}^{k'-3}] \\ \text{\underline{и} условия IУ}_{2)} \text{ \underline{но} } \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=3}^{k'}, \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=k'+4}^{k''}, \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=k''+4}^{k}, \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=k+4}^{m+1}], \\ \text{где } k'=\ell_j, \; k''=\ell_{j+1}, \; (k''-3>k'). \end{cases}$

X. $\begin{cases} \text{условия У}_{1)} \text{ \underline{но} } \{det(G_z)\ne 0\}_{z=k+1}^{m-2}, \{det(G_z)\ne 0\}_{z=0}^{k'-3}] \text{ \underline{и} условия У}_{2)}, \text{ \underline{но}} \\ \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=3}^{k'}, \{det(\Lambda_\mu)\ne 0\}_{\mu=k+4}^{m+1}], \text{ где } k'=\ell_j, \; k''=\ell_{j+1}, \; (k''-3=k'). \end{cases}$

Итак, справедлив следующий результат.

<u>Теорема 22</u>. Пусть $\mathbb{C}$ – <u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.I)÷(I.2) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_k, P_k; \tilde{z}_k, \tilde{P}_k\}_{k=2}^{m}$, минимальные размерности которых совпадают с размерностями соответствующих неособенных квадратных матриц $\{q_k\}_{k=1}^{m}$. Пусть также для последовательностей матриц $\{G\}$ (I.11) и $\{\Lambda\}$ (I.12) имеют место условия УI. Тогда для $\mathbb{C}$ (I.I) справедливы следующие факторизованные представления

<u>Представление 71(71$'$)</u> (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ & \ddots \\ & (-\beta_k)E_k \\ & & \Theta_{k+1}E_{k+1} \\ & & & \Theta_{k+2}E_{k+2} \\ & & & & (-\beta_{k+3})E_{k+3} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ & E_2 \\ & & \ddots \\ & & & E_k \\ & & & & E_{k+1} & B_{k+2} & \dots & B_m \\ & & & & & E_{k+2} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & E_{m-1} \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(k-1)}{L}(\tilde{z}_2 \dots \tilde{z}_{k+1}) & & \Theta \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & (\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} & \\ \Theta & & \overset{(m)}{L}(\tilde{z}_{k+3} \dots \tilde{z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & \hat{B}_1 \\ & E_2 & \hat{B}_2 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & E_{k-1} & \hat{B}_{k-1} \\ & & & & E_k \\ & & & & & E_{k+1} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & E_{m-1} \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{C}_2)E_2 \\ & \ddots \\ & (-\hat{C}_{k-1})E_{k-1} \\ & & \Theta_k E_k \\ & & & \Theta_{k+1}E_{k+1} \\ & & & & (-\hat{C}_{k+2})E_{k+2} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & (-\hat{C}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G) \quad (2.1),$$

либо эквивалентное ему представление

<u>Представление 72(72$'$)</u> (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ & E_2 \\ & & \ddots \\ & & & E_{k-1} \\ (-Z_1) & \dots & (-Z_{k-1}) & E_k \\ & & & & E_{k+1} & F_{k+2} & \dots & F_m \\ & & & & & E_{k+2} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(k-1)}{(B\cdot S)} & & \Theta \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & (\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} & \\ \Theta & & \overset{(m)}{(B\cdot S)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & \hat{F}_1 \\ & E_2 & & \hat{F}_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & E_{k-1} & \hat{F}_{k-1} \\ & & & E_k \\ & & & & E_{k+1} \\ & & & & (-\hat{Z}_{k+2}) & E_{k+2} \\ & & & & \vdots & & \ddots \\ & & & & (-\hat{Z}_m) & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G) \quad (2.2),$$

либо эквивалентные последнему <u>четыре</u> представления

Представления 73(73′)÷76(76′) (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 &&&&&&& \\ & E_2 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& E_{k-1} &&&& \\ (-Z_1) & \dots & & (-Z_{k-1}) & E_k &&& \\ &&&&& E_{k+1} & F_{k+2} \cdots & F_m \\ &&&&&& E_{k+2} & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\overset{(k-1)}{(B\cdot S)}_z\}_{z=1}^{2} && \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & (\tilde{\zeta}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} && \{\overset{(m)}{(B\cdot S)}_z\}_{z=1}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&& \hat{F}_1 &&& \\ & E_2 &&& \hat{F}_2 &&& \\ && \ddots && \vdots &&& \\ &&& E_{k-1} & \hat{F}_{k-1} &&& \\ &&&& E_k &&& \\ &&&&& E_{k+1} && \\ &&&&& (-\hat{Z}_{k+2}) & E_{k+2} & \\ &&&&& \vdots && \ddots \\ &&&&& (-\hat{Z}_m) && E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \tag{2.3}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ B_j = \tilde{\zeta}_{k+2} \cdot \prod_{z=k+3}^{j} c_z \cdot \Lambda_{j+1}^{-1},\ F_j = \tilde{\zeta}_{k+2} \cdot \prod_{z=k+2}^{j} c_z \cdot \tilde{B}_{jj}(\Lambda, G) \right\}_{j=k+2}^{m}, \left\{ \hat{B}_i = G_{i-1}^{-1} \cdot \prod_{z=i+1}^{k-1} \hat{\beta}_z \cdot \tilde{\zeta}_k,\ \hat{F}_i = \tilde{B}_{ii}(\Lambda, G) \cdot \prod_{z=i+1}^{k-1} \beta_z \cdot \tilde{\zeta}_k \right\}_{i=1}^{k-1}, \quad (2.4) \\ \left\{ Z_j = \prod_{z=j+1}^{k} \beta_z \right\}_{j=1}^{k-1}, \left\{ \hat{Z}_i = \prod_{z=k+2}^{i} \hat{c}_z \right\}_{i=k+2}^{m}; \text{ элементы-блоков } \overset{(k-1)}{L}_{ij} \ (\text{при } 1 \le j \le i \le k-1)\ \overset{(m)}{L}_{ij} \ (\text{при} \\ k+2 \le j \le i \le m) \text{ соответствующих матриц } \overset{(k-1)}{L}, \overset{(m)}{L} \text{ определены в (I.10)}, \quad (2.5) \\ \overset{(k-1)}{(B\cdot S)} \text{-есть представление 29(29′)}, \{\overset{(k-1)}{(B\cdot S)}_z\}_{z=1}^{2} \text{ - есть представления 30(30′)} \\ \underline{\text{либо}} \text{ 31(31′) для матриц } \mathbb{C}_{k-1}^{1} \ (\underline{\text{при}}\ 1 \le j \le i \le k-1);\ \overset{(m)}{(B\cdot S)} \text{ есть представле-} \\ \text{ние 29(29′)}, \{\overset{(m)}{(B\cdot S)}_z\}_{z=1}^{2} \text{ есть представления 30(30′) } \underline{\text{либо}} \text{ 31(31′) для} \\ \text{матриц } \mathbb{C}_m^{k+2} \ (\underline{\text{при}}\ k+2 \le j \le i \le m) \text{ соответственно.} \end{array} \right.$$

А также

Представление 77(77′) (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) \\ \ddots \\ E_{k-2}(-\hat{\beta}_{k-1}) \\ E_{k-1}\ \mathbb{O}_k \\ E_k\ \mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-\hat{\beta}_{k+2}) \\ \ddots \\ E_{m-1}(-\hat{\beta}_m) \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&&&& \\ & E_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& E_{k-1} &&& \\ \hat{A}_1 & \dots & & \hat{A}_{k-1} & E_k && \\ &&&&& E_{k+1} & \\ &&&&&& \ddots \\ &&&&&& E_{m-1} \\ &&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_2 \ \ \overset{(k-1)}{R} && \mathbb{O} \\ \ddots\ \tilde{P}_{k-1} && \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & (\tilde{\rho}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} && \tilde{P}_{k+3} \ \ \overset{(m)}{R} \\ && \ddots\ \tilde{P}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&&&& \\ & E_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& E_{k-1} &&& \\ &&&& E_k && \\ &&&&& E_{k+1} & \\ &&&&& A_{k+2} & E_{k+2} \\ &&&&& A_{k+3} & E_{k+3} \\ &&&&& \vdots & \ddots \\ &&&&& A_m & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) \\ \ddots \\ E_{k-1}(-c_k) \\ E_k\ \mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}\ \mathbb{O}_{k+2} \\ E_{k+2}(-c_{k+3}) \\ \ddots \\ E_{m-1}(-c_m) \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \tag{2.6}$$

либо эквивалентное ему представление

Представление 78(78′) (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 &&&&&&& \\ & E_2 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& E_{k-2} &&&& \\ &&&& E_{k-1} &&& \\ \hat{\xi}_1 & \dots & & & \hat{\xi}_{k-1} & E_k && \\ &&&&&& E_{k+1} & (-\hat{\tau}_{k+2}) \dots (-\tau_m) \\ &&&&&&& E_{k+2} \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(k-1)}{(B\cdot T)} && \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & (\tilde{\rho}_{k+1}) \\ \tilde{P}_{k+1} & G_k \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} && \overset{(m)}{(B\cdot T)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&& (-\tau_1) &&& \\ & E_2 && (-\tau_2) &&& \\ && \ddots & \vdots &&& \\ &&& E_{k-1}(-\tau_{k-1}) &&& \\ &&&& E_k && \\ &&&&& E_{k+1} & \\ &&&&& \xi_{k+2} & E_{k+2} \\ &&&&& \vdots & \ddots \\ &&&&& \xi_m & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \tag{2.7}$$

либо эквивалентные последнему четыре представления

Представления 79(79′)÷82(82′) (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 &&&&&&& \\ & E_2 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& E_{k-2} &&&& \\ &&&& E_{k-1} &&& \\ \hat{\xi}_1 & \dots & & & \hat{\xi}_{k-1} & E_k && \\ &&&&&& E_{k+1} & (-\hat{\tau}_{k+2}) \dots (-\hat{\tau}_m) \\ &&&&&&& E_{k+2} \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\overset{(k-1)}{(B\cdot T)}_z\}_{z=1}^{2} && \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & (\tilde{\rho}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} && \{\overset{(m)}{(B\cdot T)}_z\}_{z=1}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&& (-\tau_1) &&& \\ & E_2 && (-\tau_2) &&& \\ && \ddots & \vdots &&& \\ &&& E_{k-1}(-\tau_{k-1}) &&& \\ &&&& E_k && \\ &&&&& E_{k+1} & \\ &&&&& \xi_{k+2} & E_{k+2} \\ &&&&& \vdots & \ddots \\ &&&&& \xi_m & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \tag{2.8}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \hat{A}_j = \tilde{P}_k \cdot \prod_{z=j+1}^{k-1} \hat{c}_z \cdot G_{j-1}^{-1},\ \hat{\xi}_j = \tilde{P}_k \cdot \prod_{z=j+1}^{k-1} \hat{c}_z \cdot \tilde{B}_{jj}(\Lambda, G) \right\}_{j=1}^{k-1}, \left\{ A_i = \Lambda_{i+1}^{-1} \cdot \prod_{z=k+3}^{i} \beta_z \cdot \tilde{P}_{k+3},\ \xi_i = \tilde{B}_{ii}(\Lambda, G) \cdot \prod_{z=k+3}^{i} \beta_z \cdot \tilde{P}_{k+3} \right\}_{i=k+3}^{m}, \\ \left\{ \hat{\tau}_i = \prod_{z=k+2}^{j} \hat{\beta}_z \right\}_{j=k+2}^{m}, \left\{ \tau_i = \prod_{z=i+1}^{k} c_z \right\}_{i=1}^{k-1};\ \text{элементы-блоков } \overset{(k-1)}{R}_{ij} \ (\text{при } 1 \le i \le j \le k-1) \\ \overset{(m)}{R}_{ij} \ (\text{при } k+2 \le i \le j \le m) \text{ соответствующих матриц } \overset{(k-1)}{R}, \overset{(m)}{R} \text{ определены в (I.10)} \quad (2.9) \\ \overset{(k-1)}{(B\cdot T)} \text{ есть представление 32(32′)}, \{\overset{(k-1)}{(B\cdot T)}_z\}_{z=1}^{2} \text{ есть представления} \\ \text{33(33′) } \underline{\text{либо}} \text{ 34(34′) для матриц } \mathbb{C}_{k-1}^{1} \ (\underline{\text{при}}\ 1 \le i \le j \le k-1);\ \overset{(m)}{(B\cdot T)} \text{ есть} \\ \text{представление 32(32′)}, \{\overset{(m)}{(B\cdot T)}_z\}_{z=1}^{2} \text{ - есть представления 33(33′) } \underline{\text{либо}} \\ \text{34(34′) для матриц } \mathbb{C}_m^{k+2} \ (\underline{\text{при}}\ k+2 \le i \le j \le m). \end{array} \right.$$

При этом[x)] (при условии УI)

$$\left\{ \tilde{B}_{11} = G_0^{-1}, \tilde{B}_{\mu\mu} = (\Lambda_{\mu+1} + G_{\mu-1} - E_\mu)^{-1}, \tilde{B}_{k-1k-1} = \Lambda_k^{-1} \right\}_{\mu=2}^{k-2}; \tilde{B}_{kk} - ?, \tilde{B}_{k+1k+1} - ?; \left\{ \tilde{B}_{k+2k+2} = G_{k+1}^{-1}, \tilde{B}_{\mu\mu} = (\Lambda_{\mu+1} + G_{\mu-1} - E_\mu)^{-1}, \tilde{B}_{mm} = \Lambda_{m+1} \right\}_{\mu=k+3}^{m-1} \tag{2.10}$$

Доказательство. Комбинируя представление 27(27′)[4] с представлением 28(28′)[4] при условии УI, для $\mathbb{C}(\Lambda, G)$ имеем следующее представление

$$2 \cdot \mathbb{C}(\Lambda, G) = [(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 \cdot \hat{S}_3 \cdot \hat{S}_4 \cdot \hat{S}_5) + (S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_5)] \cdot diag(q_k), \text{ где} \tag{2.11}$$

$\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4, \hat{S}_5; S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ – матрицы-множители, входящие в представления 27(27′) и 28(28′) в соответствующих условиях УI. Далее, учитывая неособенность матриц $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_4, \hat{S}_5; S_1, S_2, S_4, S_5$ в (2.11), получаем следующие аддитивно-мультипликативные представления

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \mathbb{C}(\Lambda, G) = \{ (\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2) [(\hat{S}_3 \cdot \hat{S}_4 \cdot \hat{S}_5)(S_5^{-1} \cdot S_4^{-1}) + (\hat{S}_2^{-1} \cdot \hat{S}_1^{-1})(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3)] (S_4 \cdot S_5) \} \cdot diag(q_k), \\ 2 \cdot \mathbb{C}(\Lambda, G) = \{ (S_1 \cdot S_2) [(\hat{S}_2^{-1} \cdot \hat{S}_1^{-1})(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 \cdot \hat{S}_3) + (S_3 \cdot S_4 \cdot S_5)(\hat{S}_5^{-1} \cdot \hat{S}_4^{-1})] (\hat{S}_4 \cdot \hat{S}_5) \} \cdot diag(q_k), \end{array} \right. \tag{2.12}$$

где S^{-1} и $\hat{S}^{-1}$ – соответствующие обратные матрицы к неособенным матрицам S и $\hat{S}$. Теперь, выполнив все блочные операции в квадратных скобках $(2.12)_{1)}$ и $(2.12)_{2)}$ и при этом учитывая результаты Леммы 9 [6], а также определения последовательностей матриц $\{G\}$ (I.11) и $\{\Lambda\}$ (I.12), получаем мультипликативные представления 77(77′) и 71(71′). А представления вида 78(78′)÷82(82′) и 72(72′)÷76(76′) получаются из представлений 77(77′) и 71(71′) соответственно, если учесть результаты Леммы 9[6] при условии УI. Отметим лишь, что каждые из полученных выше представлений 71(71′)÷82(82′) являются единственными представлениями для матриц $\mathbb{C}$ (I.1) в виде $\mathbb{C}(\Lambda, G)$, а их справедливость проверяется путем перемножения блочных матриц. При этом следует иметь в виду определения последовательностей матриц $\{G\}$ (I.11) и $\{\Lambda\}$ (I.12), а также определения матриц $\tilde{B}_{\mu\mu}(\Lambda, G)$ (2.10) (при условии УI). Теорема доказана. Далее покажем справедливость следующей теоремы.

---

x) Здесь и всюду далее формальная неопределенность функций $\tilde{B}_{zz} - ?$ не влечет за собой, как видно, неопределенность элементов факторизующих множителей.

Теорема 23. Пусть $\mathbb{C}$ -неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.I)÷(I.2), элементы-блоки которой удовлетворяют требованиям теоремы 2 2. Пусть также для последовательностей матриц $\{G\}$ (I.II) и $\{\Lambda\}$ (I.I2) имеют место условия УП или УШ. Тогда для $\mathbb{C}$ (I.I) справедливы следующие факторизованные представления

Представление 83(83′) (при условии УП)

$$\begin{bmatrix} E_1 &&&&&&&&&&& \\ (-\rho_2) & E_2 &&&&&&&&&& \\ & \ddots & \ddots &&&&&&&&& \\ && (-\rho_{k-3}) & E_{k-3} &&&&&&&& \\ &&& \mathbb{O}_{k-2} & E_{k-2} &&&&&&& \\ &&&& \mathbb{O}_{k-1} & E_{k-1} &&&&&& \\ &&&&& (-\rho_k) & E_k &&&&& \\ &&&&&& \mathbb{O}_{k+1} & E_{k+1} &&&& \\ &&&&&&& \mathbb{O}_{k+2} & E_{k+2} &&& \\ &&&&&&&& (-\rho_{k+3}) & E_{k+3} && \\ &&&&&&&&& \ddots & \ddots & \\ &&&&&&&&&& (-\rho_m) & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&&&&& \\ & E_2 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& E_{k-3} &&&& \\ &&&& E_{k-2} & B_{k-1} & B_k && \\ &&&&& E_{k-1} &&& \\ &&&&&& E_k && \\ &&&&&&& E_{k+1} & B_{k+2} \cdots B_m \\ &&&&&&&& E_{k+2} \\ &&&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(k-4)}{L} \; (\tilde{z}_2 \ldots \tilde{z}_{k-4}) & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{k-2} & (\tilde{z}_{k-2}) \\ \tilde{P}_{k-2} & \hat{\tilde{\omega}}_{k-2} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \delta_{k-3k} & \mathbb{O} \\ \delta_{k-2k} & \delta_{k-2k+1} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad E_{k-1} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{O} & a_{kk-2} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_k & (\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \overset{(m)}{L} \; (\tilde{z}_{k+3} \ldots \tilde{z}_m) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 & & \hat{B}_1 &&&&& \\ & E_2 & \hat{B}_2 &&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ && E_{k-4} & \hat{B}_{k-4} &&&& \\ &&& E_{k-3} &&&& \\ &&&& E_{k-2} & \hat{B}_{k-2} && \\ &&&&& E_{k-1} \; \hat{B}_{k-1} && \\ &&&&&& E_k & \\ &&&&&&& E_{k+1} \\ &&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&&&&&&&& \\ (-\hat{c}_2) & E_2 &&&&&&&&& \\ & \ddots & \ddots &&&&&&&& \\ && (-\hat{c}_{k-4}) & E_{k-4} &&&&&&& \\ &&& \mathbb{O}_{k-3} & E_{k-3} &&&&&& \\ &&&& \mathbb{O}_{k-2} & E_{k-2} &&&&& \\ &&&&& (-\hat{c}_{k-1}) & E_{k-1} &&&& \\ &&&&&& \mathbb{O}_k & E_k &&& \\ &&&&&&& \mathbb{O}_{k+1} & E_{k+1} && \\ &&&&&&&& (-\hat{c}_{k+2}) & E_{k+2} & \\ &&&&&&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&&&&&& (-\hat{c}_m) \; E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.13)$$

либо эквивалентное ему представление

Представление 84(84′)(при условии УП)

$$\left\{ \overset{VII}{\mathbb{C}}_L = \begin{bmatrix} E_1 &&&&&& \mathbb{O} \\ & E_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& E_{k-4} &&& \\ (-\hat{z}_1) \ldots (-\hat{z}_{k-4}) &&& & E_{k-3} && \\ &&&& \begin{bmatrix} E_{k-2} & B_{k-1} & B_k \\ \mathbb{O} & E_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (-\rho_k) & E_k \end{bmatrix} && \\ &&&&& E_{k+1} & F_{k+2} \cdots F_m \\ &&&&&& E_{k+2} \\ \mathbb{O} &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(k-4)}{(B \cdot S)} && \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{k-2} & (\tilde{z}_{k-2}) \\ (\tilde{P}_{k-2}) & \hat{\tilde{\omega}}_{k-2} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \delta_{k-3k} & \mathbb{O} \\ \delta_{k-2k} & \delta_{k-2k+1} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad E_{k-1} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{O} & a_{kk-2} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_k & (\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} && \overset{(m)}{(B \cdot S)} \end{bmatrix} \right] \times$$

$$\times \left\{ \overset{VII}{\mathbb{C}}_L = \begin{bmatrix} E_1 &&& \hat{F}_1 &&& \mathbb{O} \\ & E_2 && \hat{F}_2 &&& \\ && \ddots & \vdots &&& \\ &&& E_{k-4} \; \hat{F}_{k-4} &&& \\ &&&& E_{k-3} && \\ &&&& \begin{bmatrix} E_{k-2} & \mathbb{O} & \hat{B}_{k-2} \\ (-\hat{c}_{k-1}) & E_{k-1} & \hat{B}_{k-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & E_k \end{bmatrix} && \\ &&&&& E_{k+1} & \\ \mathbb{O} &&&&& (-\hat{z}_{k+2}) & E_{k+2} \\ &&&&&& \ddots \quad \ddots \\ &&&&&& (-\hat{z}_m) \quad E_m \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.14)$$

либо эквивалентные последнему четыре представления

Представления 85(85′)÷88(88′) (при условии УП)

$$\left\{ \overset{VII}{\widetilde{\mathbb{C}}}_L \right\} \cdot \begin{bmatrix} \left[\{ \overset{(k-4)}{(B \cdot S)}_\zeta \}_{\zeta=1}^{2} \right] && \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{k-2} & (\tilde{z}_{k-2}) \\ (\tilde{P}_{k-2}) & \hat{\tilde{\omega}}_{k-2} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \delta_{k-3k} & \mathbb{O} \\ \delta_{k-2k} & \delta_{k-2k} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad E_{k-1} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{O} & a_{kk-2} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_k & (\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} && \left[\{ \overset{(m)}{(B \cdot S)}_\zeta \}_{\zeta=1}^{2} \right] \end{bmatrix} \cdot \left\{ \overset{VII}{\mathbb{C}}_L \right\} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.15)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\tilde{\omega}}_{k-2} = [G_{k-3} - (\hat{B}_{k-2} = B_k) \cdot (A_k = A_{k-2})] = E_{k-2} - \tilde{z}_{k-1}(E_{k-1} + \tilde{z}_k \tilde{P}_k)\tilde{P}_{k-1}, \quad \tilde{\omega}_k = [\Lambda_{k+1} - (\hat{A}_{k-2} = A_k)(\hat{B}_{k-2} = B_k)] = E_k - \tilde{P}_k(E_{k-1} + \tilde{P}_{k-1}\tilde{z}_{k-1})\tilde{z}_k, \\ \delta_{k-2k} = \left\{ \begin{array}{l} [(E_{k-2} - G_{k-3})(\hat{B}_{k-2} = B_k) - (B_k = \hat{B}_{k-2})\tilde{\omega}_k] \ \text{либо} \\ [(\hat{B}_{k-2} - B_k)(E_{k+1} - \Lambda_{k+1}) - \hat{\tilde{\omega}}_{k-2} \cdot (\hat{B}_{k-2} = B_k)] \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{k-3k} = -\tilde{z}_{k-2} \cdot (\hat{B}_{k-2} = B_k) = \tilde{z}_{k-2} \cdot \tilde{z}_{k-1} \cdot \tilde{z}_k, \\ \delta_{k-2k+1} = -(\hat{B}_{k-2} = B_k) \cdot \tilde{z}_{k+1} = \tilde{z}_{k-1} \cdot \tilde{z}_k \cdot \tilde{z}_{k+1}, \end{array} \right. \\ a_{kk-2} = (A_k = \hat{A}_{k-2}) = -\tilde{P}_k \cdot \tilde{P}_{k-1}; \ (\hat{B}_{k-2} = B_k) = -\tilde{z}_{k+1} \cdot \tilde{z}_k; \ \hat{A}_{k-1} = \tilde{P}_k, \ \hat{B}_{k-1} = \tilde{z}_k, \ B_{k-1} = \tilde{z}_{k-1}, \ A_{k-1} = \tilde{P}_{k-1}, \qquad (2.16) \end{array} \right.$$

а соответствующие матрицы $\{\hat{z}_{j^\circ}\}_{j^\circ=1}^{k-4}$, $\{B_{j^\circ}, F_{j^\circ}\}_{j^\circ=k+2}^{m}$; $\{\hat{z}_{i^\circ}\}_{i^\circ=k+2}^{m}$, $\{\hat{B}_{i^\circ}, \hat{F}_{i^\circ}\}_{i^\circ=1}^{k-4}$ и элементы-блоков $\overset{(k-4)}{L}_{i^\circ j^\circ}$ (при $1 \le j^\circ \le i^\circ \le k-4$), $\overset{(m)}{L}_{i^\circ j^\circ}$ (при $k+2 \le j^\circ \le i^\circ \le m$) матриц $\overset{(k-4)}{L}, \overset{(m)}{L}$, а также соответствующие представления $\overset{(k-4)}{(B \cdot S)}(\{\overset{(k-4)}{(B \cdot S)}_\zeta\}_{\zeta=1}^{2})$ и $\overset{(m)}{(B \cdot S)}(\{\overset{(m)}{(B \cdot S)}_\zeta\}_{\zeta=1}^{2})$ - определены в (2.5).

А также

Представление 89(89′) (при условии УП)

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat{\rho}_2) &&&&&& \\ & \ddots & \ddots &&&&& \\ && E_{k-5} & (-\hat{\rho}_{k-4}) &&&& \\ &&& E_{k-4} & \mathbb{O}_{k-3} &&& \\ &&&& E_{k-3} & \mathbb{O}_{k-2} && \\ &&&&& E_{k-2} & (-\hat{\rho}_{k-1}) & \\ &&&&&& E_{k-1} \; \mathbb{O}_k & \\ &&&&&&& E_k \; \mathbb{O}_{k+1} \\ &&&&&&& E_{k+1} \; (-\hat{\rho}_{k+2}) \\ &&&&&&& \ddots \quad \ddots \\ &&&&&&& E_{m-1} \; (-\hat{\rho}_m) \\ &&&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&&&& \\ & E_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& E_{k-4} &&& \\ \hat{A}_1 \ldots \hat{A}_{k-4} &&&& E_{k-3} && \\ &&&& E_{k-2} && \\ &&&& \mathbb{O} \; E_{k-1} && \\ &&&& \hat{A}_{k-2} \; \hat{A}_{k-1} \; E_k && \\ &&&&& E_{k+1} & \\ &&&&&& \ddots \\ &&&&&& E_{m-1} \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(k-4)}{R} \; (\tilde{P}_2 \ldots \tilde{P}_{k-4}) && \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{k-2} & (\tilde{z}_{k-2}) \\ (\tilde{P}_{k-2}) & \hat{\tilde{\omega}}_{k-2} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \hat{\tilde{\delta}}_{k-2k} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad E_{k-1} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} \tilde{a}_{kk-3} & \tilde{a}_{kk-2} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k+1k-2} \end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_k & (\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} && \overset{(m)}{R} \; (\tilde{P}_{k+3} \ldots \tilde{P}_m) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 &&&&&&&& \\ & E_2 &&&&&&& \\ && \ddots &&&&&& \\ &&& E_{k-3} &&&&& \\ &&&& E_{k-2} &&&& \\ &&&& A_{k-1} & E_{k-1} &&& \\ &&&& A_k && E_k && \\ &&&&&&& E_{k+1} & \\ &&&&&&& A_{k+2} \; E_{k+2} & \\ &&&&&&& \vdots \quad \ddots & \\ &&&&&&& A_m \quad E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) &&&&&& \\ & \ddots & \ddots &&&&& \\ && E_{k-4} & (-c_{k-3}) &&&& \\ &&& E_{k-3} & \mathbb{O}_{k-2} &&& \\ &&&& E_{k-2} & \mathbb{O}_{k-1} && \\ &&&&& E_{k-1} & (-c_k) & \\ &&&&&& E_k \; \mathbb{O}_{k+1} & \\ &&&&&& E_{k+1} \; \mathbb{O}_{k+2} & \\ &&&&&& E_{k+2} \; (-c_{k+3}) & \\ &&&&&& \ddots \quad \ddots & \\ &&&&&& E_{m-1} \; (-c_m) & \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.17)$$

либо эквивалентное ему представление

<u>Представление 90(90')</u> (при условии УП)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}_R^{\underline{VII}}=\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & E_{k-4} & & & & \\ \hat{\xi}_1 & \cdots & & \hat{\xi}_{k-4} & E_{k-3} & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} E_{k-2} & (-\hat{\beta}_{k-1}) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & E_{k-1} & \mathbb{O} \\ \hat{A}_{k-2} & \hat{A}_{k-1} & E_k \end{bmatrix} & & \\ & & & & & & E_{k+1} & (-\tau_{k+2})\ldots(-\tau_m) \\ & & & & & & & E_{k+2} \\ & & & & & & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & & & & & E_m \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\overset{(k-4)}{(B{:}T)}\end{bmatrix} & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{k-2} & (\tilde{\tau}_{k-2}) \\ (\tilde{P}_{k-2}) & \hat{\omega}_{k-2} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \tilde{\gamma}_{k-2k} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \quad E_{k-1} \quad \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} \tilde{a}_{kk-3} & \tilde{a}_{kk-2} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k+1k-2} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_k & (\tilde{\tau}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \begin{bmatrix}\overset{(m)}{(BT)}\end{bmatrix} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\left\{\mathbb{C}_R^{\underline{VII}}=\begin{bmatrix} E_1 & & & (-\tau_1) & & & \\ & E_2 & & (-\tau_2) & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & E_{k-4}\,(-\tau_{k-4}) & & & \\ & & & & E_{k-3} & & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_{k-2} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ A_{k-1} & E_{k-1} & (-\tau_k) \\ A_k & \mathbb{O} & E_k \end{bmatrix} & & \\ & & & & & E_{k+1} & \\ & & & & & \xi_{k+2} \quad E_{k+2} & \\ \mathbb{O} & & & & & \xi_m \qquad \ddots & E_m \end{bmatrix}\right\}\cdot\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.18)$$

либо эквивалентные последнему <u>четыре</u> представления,

<u>Представления 9I(9I')÷94(94')</u> (при условии УП)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}_R^{\underline{VII}}\right\}\cdot\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\{\overset{(k-4)}{(BT)}_\zeta\}_{\zeta=1}^2\end{bmatrix} & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{k-2} & (\tilde{\tau}_{k-2}) \\ (\tilde{P}_{k-2}) & \hat{\omega}_{k-2} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \tilde{\gamma}_{k-2k} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \quad E_{k-1} \quad \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} \tilde{a}_{kk-3} & \tilde{a}_{kk-2} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k+1k-2} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_k & (\tilde{\tau}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \begin{bmatrix}\{\overset{(m)}{(BT)}_\zeta\}_{\zeta=1}^2\end{bmatrix} \end{bmatrix}\left\{\mathbb{C}_R^{\underline{VII}}\right\}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.19)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{k-2}=[G_{k-3}-(\hat{B}_{k-2}-B_k)(A_k-\hat{A}_{k-2})]=E_{k-2}-\tilde{\xi}_{k-1}(E_{k-1}+\tilde{\xi}_k\tilde{P}_k)\tilde{P}_{k-1},\ \tilde{\omega}_k=[\Lambda_{k+1}-(\hat{A}_{k-2}-A_k)(\hat{B}_{k-2}-B_k)]=E_k-\tilde{P}_k(E_{k-1}+\tilde{P}_{k-1}\tilde{\xi}_{k-1})\tilde{\xi}_k, \\ \tilde{a}_{k+1k-2}=\begin{Bmatrix} [(\hat{A}_{k-2}-A_k)(E_{k-2}-G_{k-3})-\tilde{\omega}_k(\hat{A}_{k-2}-A_k)]\ \text{либо} \\ [(E_k-\Lambda_{k+1})(\hat{A}_{k-2}-A_k)-(\hat{A}_{k-2}-A_k)\hat{\omega}_{k-2}] \end{Bmatrix},\quad \begin{cases} \tilde{a}_{kk-3}=\cdot(\hat{A}_{k-2}-A_k)\tilde{P}_{k-2}=\tilde{P}_k\cdot\tilde{P}_{k-1}\cdot\tilde{P}_{k-2}, \\ \tilde{a}_{kk-2}=-\tilde{P}_{k+1}\cdot(A_k-\hat{A}_{k-2})=\tilde{P}_{k+1}\cdot\tilde{P}_k\cdot\tilde{P}_{k-1} \end{cases} \quad (2.20) \\ \tilde{\gamma}_{k-2k}=(\hat{B}_{k-2}-B_k)=-\tilde{\xi}_{k-1}\cdot\tilde{\xi}_k;\ (\hat{A}_{k-2}-A_k)=-\tilde{P}_k\cdot\tilde{P}_{k-1},\ \hat{A}_{k-1}=\tilde{P}_k,\ \hat{B}_{k-1}=\tilde{\xi}_k,\ B_{k-1}=\tilde{\xi}_{k-1},\ A_{k-1}=\tilde{P}_{k-1}, \end{cases}$$

а соответствующие матрицы $\{\hat{A}_j,\hat{\xi}_j\}_{j=1}^{k-4}$, $\{\hat{\tau}_j\}_{j=k+2}^{m}$; $\{\tau_i\}_{i=1}^{k-4}$, $\{A_i,\xi_i\}_{i=k+2}^{m}$ и элементы-блоков $\overset{(k-4)}{R}_{ij}$ (при $1\le i\le j\le k-4$), $\overset{(m)}{R}_{ij}$ (при $k+2\le i\le j\le m$) матриц $\overset{(k-4)}{R}$, $\overset{(m)}{R}$ а также соответствующие представления $(\overset{(k-4)}{BT})(\{(\overset{(k-4)}{BT})_\zeta\}_{\zeta=1}^2)$ и $(\overset{(m)}{BT})(\{(\overset{(m)}{BT})_\zeta\}_{\zeta=1}^2)$ – определены в (2.9). <u>При этом</u> (при условии УП)

$$\begin{cases} \{\tilde{B}_{11}=G_0^{-1},\ \tilde{B}_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1},\ \tilde{B}_{k-4k-4}=\Lambda_{k-3}^{-1}\}_{\mu=2}^{k-5},\ \tilde{B}_{k-3k-3}=?,\ \tilde{B}_{k-2k-2}=?,\ \tilde{B}_{k-1k-1}=E_{k-1}, \\ \tilde{B}_{kk}=?,\ \tilde{B}_{k+1k+1}=?,\ \{\tilde{B}_{k+2k+2}=G_{k+1}^{-1},\ \tilde{B}_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1},\ \tilde{B}_{mm}=\Lambda_{m+1}^{-1}\}_{\mu=k+3}^{m-1}. \end{cases} \qquad (2.2I)$$

<u>Представление 95(95')</u> (при условии УШ)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & (-\beta_l) & E_l & & & & & & & & \\ & & \mathbb{O}_{l+1} & E_{l+1} & & & & & & & \\ & & & \mathbb{O}_{l+2} & E_{l+2} & & & & & & \\ & & & & (-\beta_{l+3}) & E_{l+3} & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & (-\beta_k) & E_k & & & & \\ & & & & & & \mathbb{O}_{k+1} & E_{k+1} & & & \\ & & & & & & & \mathbb{O}_{k+2} & E_{k+2} & & \\ & & & & & & & & (-\beta_{k+3}) & E_{k+3} & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_l & & & & & \\ & & & & E_{l+1} & B_{l+2} \cdots B_k & & & \\ & & & & & E_{l+2} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & E_{k-1} & & \\ & & & & & & & E_k & \\ & & & & & & & E_{k+1} & B_{k+2} \cdots B_m \\ & & & & & & & & E_{k+2} \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{(l-1)}{L}\ (\tilde{\tau}_2 \cdots \tilde{\tau}_{l-1}) & & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{l+1} & (\tilde{\tau}_{l+1}) \\ (\tilde{P}_{l+1}) & \hat{\omega}_{l+1} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \gamma_{lk} & \mathbb{O} \\ \gamma_{l+1k} & \gamma_{l+1k+1} \end{bmatrix} \\ & \mathbb{O} & \overset{(k-1)}{L}\ (\tilde{\tau}_{l+3} \cdots \tilde{\tau}_{k-1}) & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & a_{kl+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \omega_k & (\tilde{\tau}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} & & & \overset{(m)}{L}\ (\tilde{\tau}_{k+3} \cdots \tilde{\tau}_m) \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} E_1 & & & & \hat{B}_1 & & & & \\ & E_2 & & & \hat{B}_2 & & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & & E_{l-1} & \hat{B}_{l-1} & & & & \\ & & & & E_l & & & & \\ & & & & & E_{l+1} & B_{l+1} & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & E_{k-1} & \hat{B}_{k-1} & \\ & & & & & & & E_k & \\ & & & & & & & & E_{k+1} \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & & \\ (-\hat{c}_2) & E_2 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & (-\hat{c}_{l-1}) & E_{l-1} & & & & & & & \\ & & \mathbb{O}_l & E_l & & & & & & \\ & & & \mathbb{O}_{l+1} & E_{l+1} & & & & & \\ & & & & (-\hat{c}_{l+2}) & E_{l+2} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & (-\hat{c}_{k-1}) & E_{k-1} & & & \\ & & & & & & \mathbb{O}_k & E_k & & \\ & & & & & & & \mathbb{O}_{k+1} & E_{k+1} & \\ & & & & & & & & (-\hat{c}_{k+2}) & E_{k+2} \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & (-\hat{c}_m) & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_l \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.22)$$

либо эквивалентное ему представление

<u>Представление 96(96')</u> (при условии УШ)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}_L^{\underline{VIII}}=\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & E_{l-1} & & & & \\ (-\xi_1) & \ldots & (-\xi_{l-1}) & E_l & & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_{l+1} & F_{l+2} \cdots F_{k-1} & \tilde{F}_k \\ & E_{l+2} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ddots & \\ & E_{k-1} & \\ (-\xi_{l+2}) & \ldots(-\xi_{k-1}) & E_k \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & E_{k+1} & F_{k+2} \cdots F_m & \\ & & & & & & E_{k+2} & \\ & & & & & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & & & & & E_m \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\overset{(l-1)}{(BS)}\end{bmatrix} & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{l+1} & (\tilde{\tau}_{l+1}) \\ \tilde{P}_{l+1} & \hat{\omega}_{l+1} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \gamma_{lk} & \mathbb{O} \\ \gamma_{l+1k} & \gamma_{l+1k+1} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\overset{(k-1)}{(BS)}\end{bmatrix} & \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{O} & a_{kl+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \omega_k & (\tilde{\tau}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \begin{bmatrix}\overset{(m)}{(BS)}\end{bmatrix} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\left\{\mathbb{C}_L^{\underline{VIII}}=\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & E_{l-1} & & & & \\ & & & & E_l & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_{l+1} & \mathbb{O} & \hat{F}_{l+1} \\ (-\hat{\xi}_{l+2}) & E_{l+2} & \hat{F}_{l+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\hat{\xi}_{k-1}) & \mathbb{O}\ \ E_{k-1} & \hat{F}_{k-1} \\ & & E_k \end{bmatrix} & & \\ & & & & & E_{k+1} & & \\ & & & & & (-\hat{\xi}_{k+2}) & E_{k+2} & \\ & & & & & \vdots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & & & (-\hat{\xi}_m) & & E_m \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_l \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.23)$$

либо эквивалентные последнему <u>шесть</u> представлений

Представления 97(97′)÷I00(I00′) (при условии УШ)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}_L^{VIII}\right\}\cdot\begin{bmatrix} [\{(\overset{(l-1)}{B}\cdot S)_z\}_{z=1}^2] & & \mathbb{O}\\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\Lambda_{l+1}(\tilde z_{l+1})\\(\tilde P_{l+1})\hat\omega_{l+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\delta_{lk} & \mathbb{O}\\ \delta_{l+1k} & \delta_{l+1k+1}\end{bmatrix}\\ \mathbb{O} & [\{(\overset{(k-1)}{B}\cdot S)_z\}_{z=1}^2] & \mathbb{O}\\ \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{kl+1}\\ \mathbb{O}&\mathbb{O}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_k(\tilde z_{k+1})\\(\tilde P_{k+1})G_k\end{bmatrix}\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & [\{(\overset{(m)}{B}\cdot S)_z\}_{z=1}^2]\end{bmatrix}\left\{\mathbb{C}_L^{VIII}\right\}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\ --\\ q_l\\ --\\ q_k\\ --\\ q_m\end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.24)$$

где

$\hat\omega_{l+1}=[G_l-(\hat B_{l+1}=B_k)(A_k=\hat A_{l+1})]$, $\omega_k=[\Lambda_{l+1}-(A_k=\hat A_{l+1})\cdot(\hat B_{l+1}=B_k)]$,

$\delta_{lk}=-\tilde z_{l+1}\cdot(\hat B_{l+1}=B_k)$, $\delta_{l+1k}=\left\{\begin{matrix}[(B_k=\hat B_{l+1})(E_k-\Lambda_{l+1})-\hat\omega_{l+1}(\hat B_{l+1}=B_k)]\ \underline{\text{либо}}\\ [(E_{l+1}-G_l)\cdot(\hat B_{l+1}=B_k)-(B_k=\hat B_{l+1})\omega_k]\end{matrix}\right\}$, $a_{kl+1}=(\hat A_{l+1}=A_k)$, (2.25)

$\delta_{l+1k+1}=-(B_k=\hat B_{l+1})\tilde z_{k+1}$,

$B_k=\tilde z_{l+2}\cdot\prod_{z=l+3}^{k} c_z$, $A_k=\prod_{z=l+3}^{k}\beta_z\cdot\tilde P_{l+2}$, $\hat A_{l+1}=\tilde P_k\cdot\prod_{z=l+2}^{k-1}\hat c_z$, $\hat B_{l+1}=\prod_{z=l+2}^{k-1}\hat\beta_z\cdot\tilde z_k$, а соответствующие матрицы $\{B_j,F_j,\tilde F_k=B_k\}_{k=l+2}^{k-1}$, $\{B_j,F_j\}_{j=k+2}^{m}$, $\{z_j\}_{j=1}^{l-1}$, $\{z_j\}_{j=l+2}^{m}$; $\{\hat B_i,\hat F_i,\check F_{l+1}=\hat B_{l+1}\}_{i=l+2}^{k-1}$, $\{\hat B_i,\hat F_i\}_{i=1}^{l-1}$, $\{\hat z_i\}_{i=l+2}^{k-1}$, $\{\hat z_i\}_{i=k+2}^{m}$ и элементы-блоков $\overset{(l-1)}{L}_{ij}$ (при $1\le j\le i\le l-1$), $\overset{(k-1)}{L}_{ij}$ (при $l+2\le j\le i\le k-1$), $\overset{(m)}{L}_{ij}$ (при $k+2\le j\le i\le m$) соответствующих матриц $\overset{(l-1)}{L},\overset{(k-1)}{L},\overset{(m)}{L}$, а также соответствующие представления для $(\overset{(l-1)}{B}\cdot S)(\{(\overset{(l-1)}{B}\cdot S)_z\}_{z=1}^2)$, $(\overset{(k-1)}{B}\cdot S)\{(\overset{(k-1)}{B}\cdot S)_z\}_{z=1}^2)$, $(\overset{(m)}{B}\cdot S)(\{(\overset{(m)}{B}\cdot S)_z\}_{z=1}^2)$ – определены в (2.5), (2.16).

<u>А также</u>

<u>Представление I0I(I0I′)</u> (при условии УШ)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) & & \\ E_{l-2}(-\hat\beta_{l-1}) & & \\ E_{l-1}\,\mathbb{O}_l & & \\ E_l\,\mathbb{O}_{l+1} & & \\ E_{l+1}(-\hat\beta_{l+2}) & & \\ E_{k-2}(-\hat\beta_{k-1}) & & \\ E_{k-1}\,\mathbb{O}_k & & \\ E_k\,\mathbb{O}_{k+1} & & \\ E_{k+1}(-\hat\beta_{k+2}) & & \\ E_{m-1}(-\hat\beta_m) & & \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & \\ E_2 & & \\ E_{l-1} & & \\ \hat A_1\dots\hat A_{l-1}\ E_l & & \\ E_{l+1} & & \\ E_{k-2} & & \\ E_{k-1} & & \\ \hat A_{l+1}\dots\hat A_{k-1}\ E_k & & \\ E_{k+1} & & \\ E_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde P_2\ \overset{(l-1)}{R}\ \tilde P_{l-1} & & \mathbb{O}\\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{l+1}(\tilde z_{l+1})\\(\tilde P_{l+1})\hat\omega_{l+1}\end{bmatrix}\ \mathbb{O}\ \begin{bmatrix}\mathbb{O}&\mathbb{O}\\ \tilde\delta_{l+1k}&\mathbb{O}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \tilde P_{l+3}\ \overset{(k-1)}{R}\ \tilde P_{k-1}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\tilde a_{kl} & \tilde a_{kl+1}\\ \mathbb{O} & \tilde a_{k+1l+1}\end{bmatrix}\ \mathbb{O}\ \begin{bmatrix}\omega_k(\tilde z_{k+1})\\(\tilde P_{k+1})G_k\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \tilde P_{k+3}\ \overset{(m)}{R}\ \tilde P_m\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} E_1 & & \\ E_2 & & \\ E_l & & \\ E_{l+1} & & \\ A_{l+2}\,E_{l+2} & & \\ A_k\quad E_k & & \\ E_{k+1} & & \\ A_{k+2}\,E_{k+2} & & \\ A_{k+3}\quad E_{k+3} & & \\ A_m\quad E_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & \\ E_{l-1}(-c_l) & & \\ E_l\,\mathbb{O}_l & & \\ E_{l+1}\mathbb{O}_{l+} & & \\ E_{l+2}(-c_{l+3}) & & \\ E_{k-1}(-c_k) & & \\ E_k\,\mathbb{O}_{k+1} & & \\ E_{k+1}\mathbb{O}_{k+2} & & \\ E_{k+2}(-c_{k+3}) & & \\ E_{m-1}(-c_m) & & \\ E_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\ --\\ q_l\\ --\\ q_k\\ --\\ q_{m-1}\\ q_m\end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.26)$$

либо эквивалентное ему представление

<u>Представление I02(I02′)</u> (при условии УШ)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}_R^{VIII}=\begin{bmatrix} E_1 & & & \mathbb{O}\\ E_2 & & & \\ E_{l-1} & & & \\ \hat\xi_1\dots\hat\xi_{l-1}\ E_l & & & \\ & \begin{bmatrix}E_{l+1}(-\hat\tau_{l+2})\dots(-\hat\tau_{k-1})\\ \mathbb{O}\quad E_{l+2}\quad \mathbb{O}\\ E_{k-1}\\ \check\xi_{l+1}\hat\xi_{l+2}\dots\hat\xi_{k-1}\ E_k\end{bmatrix} & & \\ \mathbb{O} & & E_{k+1}(-\hat\tau_{k+2})\dots(-\hat\tau_m) & \\ & & E_{k+2} & \\ & & E_m & \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}(\overset{(l-1)}{B}\cdot T) & & \mathbb{O}\\ & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_{l+1}(\tilde z_{l+1})\\(\tilde P_{l+1})\hat\omega_{l+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O}&\mathbb{O}\\ \tilde\delta_{l+1k}&\mathbb{O}\end{bmatrix}\\ \mathbb{O} & [(\overset{(k-1)}{B}\cdot T)] & \mathbb{O}\\ \begin{bmatrix}\tilde a_{kl}&\tilde a_{kl+1}\\ \mathbb{O}&\tilde a_{k+1l+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_k(\tilde z_{k+1})\\(\tilde P_{k+1})G_k\end{bmatrix}\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & [(\overset{(m)}{B}\cdot T)]\end{bmatrix}\times$$

$$\times\left\{\mathbb{C}_R^{VIII}=\begin{bmatrix} E_1 & (-\tau_1) & & \mathbb{O}\\ E_2 & (-\tau_2) & & \\ E_{l-1}(-\tau_{l-1}) & & & \\ E_l & & & \\ & \begin{bmatrix}E_{l+1} & & \mathbb{O}\\ \xi_{l+2} & E_{l+2} & (-\tau_{l+2})\\ \xi_{k-1} & & E_{k-1}(-\tau_{k-1})\\ \xi_k & \mathbb{O} & E_k\end{bmatrix} & & \\ \mathbb{O} & & E_{k+1} & \\ & & \xi_{k+2}\ E_{k+2} & \\ & & \xi_m\quad E_m & \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\ --\\ q_l\\ --\\ q_k\\ --\\ q_{m-1}\\ q_m\end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.27)$$

либо эквивалентные последнему <u>шесть</u> представлений

<u>Представления I03(I03′)÷I06(I06′)</u> (при условии УШ)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}_R^{VIII}\right\}\cdot\begin{bmatrix} [\{(\overset{(l-1)}{B}\cdot T)_z\}_{z=1}^2] & & \mathbb{O}\\ & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\Lambda_{l+1}(\tilde z_{l+1})\\(\tilde P_{l+1})\hat\omega_{l+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \tilde\delta_{l+1k} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\\ \mathbb{O} & [\{(\overset{(k-1)}{B}\cdot T)_z\}_{z=1}^2] & \mathbb{O}\\ \begin{bmatrix}\tilde a_{kl} & \tilde a_{kl+1}\\ \mathbb{O}&\tilde a_{k+1l+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_k(\tilde z_{k+1})\\(\tilde P_{k+1})G_k\end{bmatrix}\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & [\{(\overset{(m)}{B}\cdot T)_z\}_{z=1}^2]\end{bmatrix}\left\{\mathbb{C}_R^{VIII}\right\}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\ --\\ q_l\\ --\\ q_k\\ --\\ q_m\end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.28)$$

где

$\hat\omega_{l+1}=[G_l-(\hat B_{l+1}=B_k)\cdot(A_k=\hat A_{l+1})]$, $\omega_k=[\Lambda_{l+1}-(A_k=\hat A_{l+1})\cdot(\hat B_{l+1}=B_k)]$,

$\tilde a_{kl+1}=\left\{\begin{matrix}[(E_k-\Lambda_{k+1})\cdot(\hat A_{l+1}=A_k)-(\hat A_{l+1}=A_k)\hat\omega_{l+1}]\ \underline{\text{либо}}\\ [(\hat A_{l+1}=A_k)(E_{l+1}-G_l)-\omega_k(\hat A_{l+1}=A_k)]\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}\tilde a_{kl}=-(\hat A_{l+1}=A_k)\tilde P_{l+1},\\ \tilde a_{k+1l+1}=-\tilde P_{k+1}\cdot(\hat A_{l+1}=A_k),\end{matrix}\right.$ (2.29)

$\tilde\delta_{l+1k}=(\hat B_{l+1}=B_k)$ матрицы $\{\hat A_{l+1},A_k\}$, $\{B_k,\hat B_{l+1}\}$, $\{\hat\omega_{l+1},\omega_k\}$ и соответствующие матрицы $\{\hat A_j,\hat\xi_j\}_{j=1}^{l-1}$, $\{\hat A_j,\hat\xi_j,\check\xi_{l+1}=\hat A_{l+1}\}_{j=l+2}^{k-1}$, $\{A_i,\xi_i\}_{i=k+2}^{m}$, $\{A_i,\xi_i,\tilde\xi_k=A_k\}_{i=l+2}^{k-1}$, $\{\hat\tau_j\}_{j=l+2}^{k-1}$, $\{\hat\tau_j\}_{j=k+2}^{m}$, $\{\tau_i\}_{i=1}^{l-1}$, $\{\tau_i\}_{i=l_2}^{k-1}$ и элементы-блоков $\overset{(l-1)}{R}_{ij}$ (при $1\le i\le j\le l-1$), $\overset{(k-1)}{R}_{ij}$ (при $l+2\le i\le j\le k-1$), $\overset{(m)}{R}_{ij}$ (при $k+1\le i\le j\le m$) соответствующих матриц $\overset{(l-1)}{R},\overset{(k-1)}{R},\overset{(m)}{R}$, а также представления для $(\overset{(l-1)}{B}T)(\{(\overset{(l-1)}{B}T)_z\}_{z=1}^2)$, $(\overset{(k-1)}{B}T)(\{(\overset{(k-1)}{B}T)_z\}_{z=1}^2)$, $(\overset{(m)}{B}\cdot T)(\{(\overset{(m)}{B}T)_z\}_{z=1}^2)$ – определены в (2.25), (2.9). <u>При этом</u> (при условии УШ)

$$\left\{\begin{matrix}\{\tilde B_{11}=G_0^{-1},\ \tilde B_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1},\ \tilde B_{l-1l-1}=\Lambda_l^{-1}\}_{\mu=2}^{l-2},\ \tilde B_{ll}-?,\ \tilde B_{l+1l+1}-?,\ \{\tilde B_{l+2l+2}=G_{l+1}^{-1},\\ \tilde B_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1},\ \tilde B_{k-1k-1}=\Lambda_k^{-1}\}_{\mu=l+3}^{k-2},\ \tilde B_{kk}-?,\ \tilde B_{k+1k+1}-?,\ \{\tilde B_{k+2k+2}=G_{k+1}^{-1},\ \tilde B_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1},\ \tilde B_{mm}=\Lambda_{m+1}^{-1}\}_{\mu=k+3}^{m-1}.\end{matrix}\right. \qquad (2.30)$$

<u>Доказательство</u>. Аналогично тому как поступили при доказательстве теоремы 22, комбинируя представление 64(64′)[6] с представлением 66(66′)

[6](при условии УШ) получаем множество представлений 83(83')÷106(106'). Проверка справедливости каждого из этих представлений проводится с использованием перемножения блочных матриц. При этом следует иметь в виду определения последовательностей $\{G\}$(1.11) и $\{\Lambda\}$ (1.12) и определения (2.30) для $\widetilde{B}_{\mu\mu}$. Последние, т.е. $\widetilde{B}_{\mu\mu}$ (2.30), являются прямым следствием $\{G\}$ (1.11) и $\{\Lambda\}$ (1.12) (при условии УШ). Поэтому на проверке представлений 83(83')÷106(106') не будем останавливаться, а только лишь покажем справедливость равенств $\hat{A}_{\ell+1}=A_k$, $\hat{B}_{\ell+1}=B_k$.

Итак, с учетом (2.30), имеем

$$\hat{A}_{\ell+1}=\widetilde{P}_k\cdot\prod_{z=\ell+2}^{k-1}\hat{c}_z=-\widetilde{P}_k\cdot\Big(\prod_{z=\ell+3}^{k-1}\hat{c}_z\cdot G_{\ell+1}^{-1}\Big)\cdot\widetilde{P}_{\ell+2}=-\widetilde{P}_k\Big(\prod_{z=\ell+3}^{k-1}\hat{c}_z\cdot\widetilde{B}_{\ell+2\,\ell+2}\Big)\widetilde{P}_{\ell+2}=\widetilde{P}_k\cdot\Big(\widetilde{B}_{k-1\,k-1}\cdot\prod_{z=\ell+3}^{k-1}\beta_z\Big)\widetilde{P}_{\ell+2}=$$
$$=(-\widetilde{P}_k\Lambda_k^{-1})\cdot\prod_{z=\ell+3}^{k-1}\beta_z\cdot\widetilde{P}_{\ell+2}=\prod_{z=\ell+3}^{k}\beta_z\cdot\widetilde{P}_{\ell+2}=A_k,$$

$$\hat{B}_{\ell+1}=\prod_{z=\ell+2}^{k-1}\hat{\beta}_z\cdot\widetilde{z}_k=-\widetilde{z}_{\ell+2}\cdot\Big(G_{\ell+1}^{-1}\cdot\prod_{z=\ell+2}^{k-1}\hat{\beta}_z\Big)\cdot\widetilde{z}_k=-\widetilde{z}_{\ell+2}\cdot\Big(\widetilde{B}_{\ell+2\,\ell+2}\cdot\prod_{z=\ell+3}^{k-1}\hat{\beta}_z\Big)\cdot\widetilde{z}_k=-\widetilde{z}_{\ell+2}\cdot\Big(\prod_{z=\ell+3}^{k-1}c_z\cdot\widetilde{B}_{k-1\,k-1}\Big)\cdot\widetilde{z}_k=$$
$$=\widetilde{z}_{\ell+2}\Big(\prod_{z=\ell+3}^{k-1}c_z\Big)(-\Lambda_k^{-1}\widetilde{z}_k)=\widetilde{z}_{\ell+2}\cdot\prod_{z=\ell+3}^{k}c_z=B_k.$$ Теорема доказана.

Далее покажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 24. Пусть $\mathbb{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида (1.1)÷(1.2), элементы-блоки которой удовлетворяют требованиям теоремы 22. Пусть также для последовательностей матриц $\{G\}$ (1.11) и $\{\Lambda\}$ (1.12) имеют место условия IX или условия X. Тогда для $\mathbb{C}$ (1.1) справедливы следующие факторизованные представления

Представление 107(107') (при условии IX)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\beta_{k'})E_{k'} \\ \mathbb{O}_{k'+1}E_{k'+1} \\ \mathbb{O}_{k'+2}E_{k'+2} \\ (-\beta_{k'+3})E_{k'+3} \\ \ddots \\ (-\beta_{k''})E_{k''} \\ \mathbb{O}_{k''+1}E_{k''+1} \\ \mathbb{O}_{k''+2}E_{k''+2} \\ (-\beta_{k''+3})E_{k''+3} \\ \ddots \\ (-\beta_k)E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ \mathbb{O}_{k+2}E_{k+2} \\ (-\beta_{k+3})E_{k+3} \\ \ddots \\ (-\beta_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \ddots \\ E_{k'} \\ E_{k'+1}B_{k'+2}\cdots B_{k''} \\ E_{k'+2} \\ \ddots \\ E_{k''} \\ E_{k''+1}B_{k''+2}\cdots B_k \\ E_{k''+2} \\ \ddots \\ E_k \\ E_{k+1}B_{k+2}\cdots B_m \\ E_{k+2} \\ E_{k+3} \\ \ddots \\ E_{m-1} \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{k'-1}{L}(\widetilde{z}_2\ldots\widetilde{z}_{k'-1}) & & & & & & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{k'+1}(\widetilde{z}_{k'+1}) \\ (\widetilde{P}_{k'+1})\hat{\omega}_{k'+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\delta_{k'k''} & \mathbb{O} \\ \delta_{k'+1\,k''} & \delta_{k'+1\,k''+1}\end{bmatrix} \\ & \mathbb{O} & \overset{k''-1}{L}(\widetilde{z}_{k'+3}\ldots\widetilde{z}_{k''-1}) & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{k''k'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_{k''}(\widetilde{z}_{k''+1}) \\ (\widetilde{P}_{k''+1})\hat{\omega}_{k''+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\delta_{k''k} & \mathbb{O} \\ \delta_{k''+1\,k} & \delta_{k''+1\,k+1}\end{bmatrix} \\ & & & \mathbb{O} & \overset{k-1}{L}(\widetilde{z}_{k''+3}\ldots\widetilde{z}_{k-1}) & \mathbb{O} \\ & & & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{kk''+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}\omega_k(\widetilde{z}_{k+1}) \\ (\widetilde{P}_{k+1})G_k\end{bmatrix} \\ \mathbb{O} & & & & & & \overset{m}{L}(\widetilde{z}_{k+3}\ldots\widetilde{z}_m) \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} E_1 & \hat{B}_1 \\ E_2 & \hat{B}_2 \\ \ddots & \ddots \\ E_{k'-1} & \hat{B}_{k'-1} \\ E_{k'} \\ E_{k'+1} & \hat{B}_{k'+1} \\ E_{k'+2} & \hat{B}_{k'+2} \\ \ddots & \ddots \\ E_{k''-1} & \hat{B}_{k''-1} \\ E_{k''} \\ E_{k''+1} & \hat{B}_{k''+1} \\ E_{k''+2} & \hat{B}_{k''+2} \\ \ddots & \ddots \\ E_{k-1} & \hat{B}_{k-1} \\ E_k \\ E_{k+1} \\ E_{k+2} \\ \ddots \\ E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{c}_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\hat{c}_{k'-1})E_{k'-1} \\ \mathbb{O}_{k'}E_{k'} \\ \mathbb{O}_{k'+1}E_{k'+1} \\ (-\hat{c}_{k'+2})E_{k'+2} \\ \ddots \\ (-\hat{c}_{k''-1})E_{k''-1} \\ \mathbb{O}_{k''}E_{k''} \\ \mathbb{O}_{k''+1}E_{k''} \\ (-\hat{c}_{k''+2})E_{k''+2} \\ \ddots \\ (-\hat{c}_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_kE_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (-\hat{c}_{k+2})E_{k+2} \\ \ddots \\ (-\hat{c}_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k'} \\ \vdots \\ q_{k''} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.31)$$

либо эквивалентное ему представление

Представление 108(108') (при условии IX)

$$\left\{\widetilde{\mathbb{C}}_{L}^{\overline{IX}}=\begin{bmatrix} E_1 & & & & \mathbb{O} \\ E_2 \\ \ddots \\ E_{k'-1} \\ (-z_1)\ldots(-z_{k'-1})E_{k'} \\ E_{k'+1}F_{k'+2}\cdots F_{k''-1}\widetilde{F}_{k''} \\ E_{k'+2} \\ \ddots \\ E_{k''-1} \\ (-z_{k'+2})\ldots(-z_{k''-1})E_{k''} \\ E_{k''+1}F_{k''+2}\cdots F_{k-1}\widetilde{F}_k \\ E_{k''+2} \\ \ddots \\ E_{k-1} \\ (-z_{k''+2})\ldots(-z_{k-1})E_k \\ E_{k+1}F_{k+2}\cdots F_m \\ E_{k+2} \\ \ddots \\ \mathbb{O} & & & & E_m \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \Big[\overset{k'-1}{(BS)}\Big] & & & & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{k'+1}(\widetilde{z}_{k'+1}) \\ (\widetilde{P}_{k'+1})\hat{\omega}_{k'+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\delta_{k'k''} & \mathbb{O} \\ \delta_{k'+1\,k''} & \delta_{k'+1\,k''+1}\end{bmatrix} \\ & \mathbb{O} & \Big[\overset{k''-1}{(B\cdot S)}\Big] & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{k''k'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_{k''}(\widetilde{z}_{k''+1}) \\ (\widetilde{P}_{k''+1})\hat{\omega}_{k''+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\delta_{k''k} & \mathbb{O} \\ \delta_{k''+1\,k} & \delta_{k''+1\,k+1}\end{bmatrix} \\ & & & \mathbb{O} & \Big[\overset{k-1}{(BS)}\Big] & \mathbb{O} \\ & & & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{kk''+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_k(\widetilde{z}_{k+1}) \\ (\widetilde{P}_{k+1})G_k\end{bmatrix} \\ \mathbb{O} & & & & & \Big[\overset{m}{(B\cdot S)}\Big] \end{bmatrix}\times$$

$$\left\{\mathbb{C}_{L}^{\overline{IX}}=\begin{bmatrix} E_1 & \hat{F}_1 & & & \mathbb{O} \\ E_2 & \hat{F}_2 \\ \ddots & \ddots \\ E_{k'-1} & \hat{F}_{k'-1} \\ E_{k'} \\ E_{k'+1} & \check{F}_{k'+1} \\ (-\hat{z}_{k'+2})E_{k'+2} & \hat{F}_{k'+2} \\ \ddots & \ddots \\ (-\hat{z}_{k''-1}) \quad E_{k''-1} & \hat{F}_{k''-1} \\ E_{k''} \\ E_{k''+1} & \check{F} \\ (-\hat{z}_{k''+2})E_{k''+2} & \hat{F}_{k''+2} \\ \ddots & \ddots \\ (-\hat{z}_{k-1}) \quad E_{k-1} & \hat{F}_{k-1} \\ E_k \\ E_{k+1} \\ (-\hat{z}_{k+2})E_{k+2} \\ \ddots \\ \mathbb{O} \quad (-\hat{z}_m) & E_m \end{bmatrix}\right\}\cdot\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k'} \\ \vdots \\ q_{k''} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.32)$$

либо эквивалентные последнему шестнадцать представлений

Представления I09(I09′)÷I24(I24′) (при условии IX)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}^{IX}_{L}\right\}\begin{bmatrix} [\{(\mathrm{B}\cdot S)_{\zeta}\}^{\kappa'-1}_{\zeta=1}] & & & & & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{\kappa'+1}(\tilde{\xi}_{\kappa'+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa'+1})\,\hat{\omega}_{\kappa'+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\delta_{\kappa'\kappa''} & \mathbb{O} \\ \delta_{\kappa'+1\kappa''} & \delta_{\kappa'+1\kappa''+1}\end{bmatrix} & & & \\ & \mathbb{O} & [\{(\mathrm{B}\cdot S)_{\zeta}\}^{\kappa''-1}_{\zeta=1}] & \mathbb{O} & & & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{\kappa''\kappa'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_{\kappa''}(\tilde{\xi}_{\kappa''+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa''+1})\,\hat{\omega}_{\kappa''+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\delta_{\kappa''\kappa} & \mathbb{O} \\ \delta_{\kappa''+1\kappa} & \delta_{\kappa''+1\kappa+1}\end{bmatrix} & \\ & & & \mathbb{O} & [\{(\mathrm{B}\cdot S)_{\zeta}\}^{\kappa-1}_{\zeta=1}] & \mathbb{O} & \\ & & & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{\kappa\kappa''+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_{\kappa}(\tilde{\xi}_{\kappa+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa+1})\,G_{\kappa}\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & & & & & [\{(\mathrm{B}\cdot S)_{\zeta}\}^{m}_{\zeta=1}] \end{bmatrix}\left[\mathbb{C}^{IX}_{L}\right]\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_{\kappa'}\\ \vdots\\ q_{\kappa''}\\ \vdots\\ q_{\kappa}\\ \vdots\\ q_m\end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.33)$$

, где

$\left\{\begin{array}{l}\text{соответствующие матрицы } [\mathrm{B}, A, L, \hat{\omega}, \omega], [\bar{z}, \hat{z}; \hat{F}, \check{F}; F, \tilde{F}], [\delta, a], \text{ а также} \\ \text{представления } (\mathrm{B}\cdot S)(\{(\mathrm{B}\cdot S)_{\zeta}\}^{2}_{\zeta=1}) \text{ - определены в (2.25).}\end{array}\right.$ (2.34)

А также

Представление I25(I25′) (при условии IX)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa'-2}(-\hat{\beta}_{\kappa'-1}) & & & \\ E_{\kappa'-1}\ \mathbb{O}_{\kappa'} & & & \\ E_{\kappa'}\ \mathbb{O}_{\kappa'+1} & & & \\ E_{\kappa'+1}(-\hat{\beta}_{\kappa'+2}) & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa''-2}(-\hat{\beta}_{\kappa''-1}) & & & \\ E_{\kappa''-1}\ \mathbb{O}_{\kappa''} & & & \\ E_{\kappa''}\ \mathbb{O}_{\kappa''+1} & & & \\ E_{\kappa''+1}(-\hat{\beta}_{\kappa''+2}) & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa-2}(-\hat{\beta}_{\kappa-1}) & & & \\ E_{\kappa-1}\ \mathbb{O}_{\kappa} & & & \\ E_{\kappa}\ \mathbb{O}_{\kappa+1} & & & \\ E_{\kappa+1}(-\hat{\beta}_{\kappa+2}) & & & \\ \ddots & & & \\ E_{m-1}(-\hat{\beta}_m) & & & \\ E_m & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ E_2 & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa'-1} & & & \\ \hat{A}_1\ldots\hat{A}_{\kappa'-1}\,E_{\kappa'} & & & \\ E_{\kappa'+1} & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa''-2} & & & \\ E_{\kappa''-1} & & & \\ \hat{A}_{\kappa'+1}\ldots\hat{A}_{\kappa''-1}\,E_{\kappa''} & & & \\ E_{\kappa''+1} & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa-2} & & & \\ E_{\kappa-1} & & & \\ \hat{A}_{\kappa''+1}\ldots\hat{A}_{\kappa-1}\,E_{\kappa} & & & \\ E_{\kappa+1} & & & \\ \ddots & & & \\ E_m & & & \mathbb{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_2 \diagdown {}^{\kappa'-1}R & & & \\ \tilde{P}_{\kappa'-1} & & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{\kappa'+1}(\tilde{\xi}_{\kappa'+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa'+1})\,\hat{\omega}_{\kappa'+1}\end{bmatrix} \ \mathbb{O}\ \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \delta_{\kappa'+1\kappa''} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & & \\ & \mathbb{O} \quad \tilde{P}_{\kappa'+3} \diagdown {}^{\kappa''-1}R,\ \tilde{P}_{\kappa''-1} \quad \mathbb{O} & & \\ & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{\kappa''\kappa'}\,\tilde{a}_{\kappa''\kappa'+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{\kappa''+1\kappa'+1}\end{bmatrix} \ \mathbb{O}\ \begin{bmatrix}\omega_{\kappa''}(\tilde{\xi}_{\kappa''+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa''+1})\,\hat{\omega}_{\kappa''+1}\end{bmatrix} \ \mathbb{O}\ \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \delta_{\kappa''+1\kappa} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & & \\ & \mathbb{O} \quad \tilde{P}_{\kappa''+3} \diagdown {}^{\kappa-1}R,\ \tilde{P}_{\kappa-1} \quad \mathbb{O} & & \\ & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{\kappa\kappa''}\,\tilde{a}_{\kappa\kappa''+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{\kappa+1\kappa''+1}\end{bmatrix} \ \mathbb{O}\ \begin{bmatrix}\omega_{\kappa}(\tilde{\xi}_{\kappa+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa+1})\,G_{\kappa}\end{bmatrix} & & \\ \mathbb{O} & & & \tilde{P}_{\kappa+3} \diagdown {}^{m}R,\ \tilde{P}_m \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} E_1 & & \\ E_2 & & \\ \ddots & & \\ E_{\kappa'} & & \\ E_{\kappa'+1} & & \\ A_{\kappa'+2}\,E_{\kappa'+2} & & \\ \ddots & & \\ A_{\kappa''}\quad E_{\kappa''} & & \\ E_{\kappa''+1} & & \\ A_{\kappa''+2}\,E_{\kappa''+2} & & \\ \ddots & & \\ A_{\kappa-1}\quad E_{\kappa-1} & & \\ A_{\kappa}\quad E_{\kappa} & & \\ E_{\kappa+1} & & \\ A_{\kappa+2}\,E_{\kappa+2} & & \\ \ddots & & \\ A_{m-1}\quad E_{m-1} & & \\ A_m\quad E_m & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-c_2) & \\ \ddots & \\ E_{\kappa'-1}(-c_{\kappa'}) & \\ E_{\kappa'}\ \mathbb{O}_{\kappa'+1} & \\ E_{\kappa'+1}\ \mathbb{O}_{\kappa'+2} & \\ E_{\kappa'+2}(-c_{\kappa'+3}) & \\ \ddots & \\ E_{\kappa''-1}(-c_{\kappa''}) & \\ E_{\kappa''}\ \mathbb{O}_{\kappa''+1} & \\ E_{\kappa''+1}\ \mathbb{O}_{\kappa''+2} & \\ E_{\kappa''+2}(-c_{\kappa''+3}) & \\ \ddots & \\ E_{\kappa-1}(-c_{\kappa}) & \\ E_{\kappa}\ \mathbb{O}_{\kappa+1} & \\ E_{\kappa+1}\ \mathbb{O}_{\kappa+2} & \\ E_{\kappa+2}(-c_{\kappa+3}) & \\ \ddots & \\ E_m & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_{\kappa'}\\ \vdots\\ q_{\kappa''}\\ \vdots\\ q_{\kappa}\\ \vdots\\ q_m\end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.35)$$

,

либо эквивалентное ему представление

Представление I26(I26′) (при условии IX)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}^{IX}_{R}=\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ E_2 & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa'-1} & & & \\ \hat{\check{z}}_1\ldots\hat{\check{z}}_{\kappa'-1}\,E_{\kappa'} & & & \mathbb{O} \\ E_{\kappa'+1}(\hat{\tau}_{\kappa'+2})\ldots(-\hat{\tau}_{\kappa''-1}) & & & \\ E_{\kappa'+2} & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa''-1} & & & \\ \check{z}_{\kappa'+1}\hat{z}_{\kappa'+2}\ldots\hat{z}_{\kappa''-1}\,E_{\kappa''} & & & \\ E_{\kappa''+1}(\hat{\tau}_{\kappa''+2})\ldots(-\hat{\tau}_{\kappa-1}) & & & \\ E_{\kappa''+2} & & & \\ \ddots & & & \\ E_{\kappa-1} & & & \\ \check{z}_{\kappa''+1}\hat{z}_{\kappa''+2}\ldots\hat{z}_{\kappa-1}\,E_{\kappa} & & & \\ E_{\kappa+1}(-\hat{\tau}_{\kappa+2})\ldots(-\hat{\tau}_m) & & & \\ \mathbb{O} \qquad E_{\kappa+2} & & & \\ \ddots & & & \\ E_m & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [(\mathrm{BT})^{\kappa'-1}] & & & & \mathbb{O} \\ \begin{bmatrix}\Lambda_{\kappa'+1}(\tilde{\xi}_{\kappa'+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa'+1})\,\hat{\omega}_{\kappa'+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \delta_{\kappa'+1\kappa''} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & & \\ \mathbb{O} & [(\mathrm{BT})^{\kappa''-1}] & \mathbb{O} & & \\ \begin{bmatrix}\tilde{a}_{\kappa''\kappa'}\,\tilde{a}_{\kappa''\kappa'+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{\kappa''+1\kappa'+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_{\kappa''}(\tilde{\xi}_{\kappa''+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa''+1})\,\hat{\omega}_{\kappa''+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \delta_{\kappa''+1\kappa} & \mathbb{O}\end{bmatrix} \\ & & \mathbb{O} & [(\mathrm{BT})^{\kappa-1}] & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{\kappa\kappa''}\,\tilde{a}_{\kappa\kappa''+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{\kappa+1\kappa''+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_{\kappa}(\tilde{\xi}_{\kappa+1}) \\ \tilde{P}_{\kappa+1}\ G_{\kappa}\end{bmatrix} \\ & & & & [(\mathrm{BT})^{m}] \end{bmatrix}\right\}\times$$

$$\left\{\mathbb{C}^{IX}_{R}=\begin{bmatrix} E_1 & (-\tau_1) & & \\ E_2 & (-\tau_2) & & \\ \ddots & & & \mathbb{O} \\ E_{\kappa'-1} & (-\tau_{\kappa'-1}) & & \\ E_{\kappa'} & & & \\ E_{\kappa'+1} & & & \\ \check{z}_{\kappa'+2}\,E_{\kappa'+2} & (-\tau_{\kappa'+2}) & & \\ \check{z}_{\kappa''-1} & E_{\kappa''-1}(-\tau_{\kappa''-1}) & & \\ \check{z}_{\kappa''} & E_{\kappa''} & & \\ & E_{\kappa''+1} & & \\ & \check{z}_{\kappa''+2}\,E_{\kappa''+2} & (-\tau_{\kappa''+2}) & \\ & \check{z}_{\kappa-1} & E_{\kappa-1}(-\tau_{\kappa-1}) & \\ \mathbb{O} & \check{z}_{\kappa} & E_{\kappa} & \\ & & E_{\kappa+1} & \\ & & \check{z}_{\kappa+2}\,E_{\kappa+2} & \\ & & \check{z}_m \quad E_m & \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_{\kappa'}\\ \vdots\\ q_{\kappa''}\\ \vdots\\ q_{\kappa}\\ \vdots\\ q_m\end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.36)$$

,

либо эквивалентные последнему шестнадцать представлений

Представления I27(I27′)÷I42(I42′) (при условии IX)

$$\left\{\tilde{\mathbb{C}}^{IX}_{R}\right\}\cdot\begin{bmatrix} [\{(\mathrm{B}\cdot T)_{\zeta}\}^{\kappa'-1}_{\zeta=1}] & & & & & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{\kappa'+1}(\tilde{\xi}_{\kappa'+1}) \\ \tilde{P}_{\kappa'+1}\ \hat{\omega}_{\kappa'+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \delta_{\kappa'+1\kappa''} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & & & \\ & \mathbb{O} & [\{(\mathrm{BT})_{\zeta}\}^{\kappa''-1}_{\zeta=1}] & \mathbb{O} & & & \\ & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{\kappa''\kappa'}\,\tilde{a}_{\kappa''\kappa'+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{\kappa''+1\kappa'+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_{\kappa''}(\tilde{\xi}_{\kappa''+1}) \\ (\tilde{P}_{\kappa''+1})\,\hat{\omega}_{\kappa''+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \delta_{\kappa''+1\kappa} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \\ & & & \mathbb{O} & [\{(\mathrm{BT})_{\zeta}\}^{\kappa-1}_{\zeta=1}] & \mathbb{O} & \\ & & & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{\kappa\kappa''}\,\tilde{a}_{\kappa\kappa''+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{\kappa+1\kappa''+1}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\omega_{\kappa}(\tilde{\xi}_{\kappa+1}) \\ \tilde{P}_{\kappa+1}\ G_{\kappa}\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & & & & & [\{(\mathrm{BT})_{\zeta}\}^{m}_{\zeta=1}] \end{bmatrix}\left\{\mathbb{C}^{IX}_{R}\right\}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_{\kappa'}\\ \vdots\\ q_{\kappa''}\\ \vdots\\ q_{\kappa}\\ \vdots\\ q_m\end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.37)$$

, где

$\left\{\begin{array}{l}\text{соответствующие матрицы } [\hat{A}, A, R, \hat{\omega}, \omega], [\hat{z}, \check{z}, z, \tilde{z}; \hat{\tau}, \tau; \delta, \tilde{a}], \text{ а также} \\ \text{представления } (\mathrm{B}\cdot T)(\{(\mathrm{BT})_{\zeta}\}^{2}_{\zeta=1}) \text{ - определены в (2.29).}\end{array}\right.$ (2.38)

При этом (при условии IX). $\{\tilde{B}_{11}=G_0^{-1}, \tilde{B}_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1}, \tilde{B}_{k'-1k'-1}=\Lambda_{k'}^{-1}, \tilde{B}_{k'k'}=?, \tilde{B}_{k'+1k'+1}=?\}_{\mu=2}^{k'-2},$

$$\left\{\begin{array}{l}\{\tilde{B}_{k'+2k'+2}=G_{k'+1}^{-1}, \tilde{B}_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1}, \tilde{B}_{k''-1k''-1}=\Lambda_{k''}^{-1}, \tilde{B}_{k''k''}=?, \tilde{B}_{k''+1k''+1}=?\}_{\mu=k'+3}^{k''-2}, \{\tilde{B}_{k''+2k''+2}=G_{k''+1}^{-1}, \\ \tilde{B}_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1}, \tilde{B}_{k-1k-1}=\Lambda_k^{-1}, \tilde{B}_{kk}=?, \tilde{B}_{k+1k+1}=?\}_{\mu=k''+3}^{k-2}, \{\tilde{B}_{k+2k+2}=G_{k+1}^{-1}, \tilde{B}_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1}, \tilde{B}_{mm}=\Lambda_{m+1}^{-1}\}_{\mu=k+3}^{m-1}.\end{array}\right. \quad (2.39)$$

Представление I43(I43') (при условии X)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\beta_{k'})E_{k'} \\ \mathbb{O}_{k'+1}E_{k'+1} \\ \mathbb{O}_{k'+2}E_{k'+2} \\ (-\beta_{k''})E_{k''} \\ \mathbb{O}_{k''+1}E_{k''+1} \\ \mathbb{O}_{k''+2}E_{k''+2} \\ (-\beta_{k''+3})E_{k''+3} \\ \cdots \\ (-\beta_k)E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ \mathbb{O}_{k+2}E_{k+2} \\ (-\beta_{k+3})E_{k+3} \\ (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdots \\ E_{k'} \\ E_{k'+1}\,B_{k'+2}\,B_{k''} \\ E_{k'+2} \\ E_{k''} \\ E_{k''+1}\,B_{k''+2}\,B_{k''+3} \\ E_{k''+2} \\ E_{k''+3} \\ \cdots \\ E_k \\ E_{k+1}\,B_{k+2}\cdots B_m \\ E_{k+2} \\ \cdots \\ E_{m-1} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_2 \cdots \tilde{z}_{k'}\ \ \overset{k'-1}{L} & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{k'+1}(\tilde{z}_{k'+1}) \\ (\tilde{P}_{k'+1})\tilde{\omega}_{k'+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\delta_{k'k''} & \mathbb{O} \\ \delta_{k'+1k''} & \delta_{k'+1k''+1}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\quad E_{k'+2}\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{k''k'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_{k''}(\tilde{z}_{k''+1}) \\ (\tilde{P}_{k''+1})\tilde{\omega}_{k''+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\delta_{k''k} & \mathbb{O} \\ \delta_{k''+1k} & \delta_{k''+1k+1}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\quad E_{k''+2}\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{kk'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_k(\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1})G_k\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \tilde{z}_{k+3}\cdots\tilde{z}_m\ \ \overset{m}{L} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 & \hat{B}_1 \\ E_2 & \hat{B}_2 \\ E_{k'-1} & \hat{B}_{k'-1} \\ E_{k'} \\ E_{k'+1} & \hat{B}_{k'+1} \\ E_{k''-1} & \hat{B}_{k''-1} \\ E_{k''} \\ E_{k''+1} & \hat{B}_{k''+1} \\ E_{k-1} & \hat{B}_{k-1} \\ E_k \\ E_{k+1} \\ E_{m-1} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{c}_2)E_2 \\ (-\hat{c}_{k'-1})E_{k'-1} \\ \mathbb{O}_{k'}\ E_{k'} \\ \mathbb{O}_{k'+1}E_{k'+1} \\ (-\hat{c}_{k''-1})E_{k''-1} \\ \mathbb{O}_{k''}\ E_{k''} \\ \mathbb{O}_{k''+1}E_{k''+1} \\ (-\hat{c}_{k''+2})E_{k''+2} \\ (-\hat{c}_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k\ E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (-\hat{c}_{k+2})E_{k+2} \\ (-\hat{c}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_{k'} \\ q_{k''} \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G), \qquad (2.40)$$

либо эквивалентное ему представление

Представление I44(I44') (при условии X)

$$\left\{ \tilde{\mathbb{C}}_L^{\bar{X}} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_{k'-1} \\ (-\hat{z}_2)\cdots(-\hat{z}_{k'})E_{k'} \\ E_{k'+1}F_{k'+2}F_{k''} \\ E_{k'+2} \\ (-\hat{z}_{k'+2})E_{k''} \\ E_{k''+1}F_{k''+2}F_{k''+3} \\ E_{k''+2} \\ E_{k-1} \\ (-\hat{z}_{k+1})E_k \\ E_{k+1}F_{k+2}\cdots F_m \\ E_{k+2} \\ E_m \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} [(\overset{k'-1}{B}\cdot S)] & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{k'+1}(\tilde{z}_{k'+1}) \\ (\tilde{P}_{k'+1})\tilde{\omega}_{k'+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\delta_{k'k''} & \mathbb{O} \\ \delta_{k'+1k''} & \delta_{k'+1k''+1}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\quad E_{k'+2}\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{k''k'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_{k''}(\tilde{z}_{k''+1}) \\ (\tilde{P}_{k''+1})\tilde{\omega}_{k''+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\delta_{k''k} & \mathbb{O} \\ \delta_{k''+1k} & \delta_{k''+1k+1}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\quad E_{k''+2}\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{kk'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_k(\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1})G_k\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & [(\overset{m}{B}\cdot S)] \end{bmatrix} \times$$

$$\left\{ \mathbb{C}_L^{\bar{X}} = \begin{bmatrix} E_1 & \hat{F}_1 & & \mathbb{O} \\ E_2 & \hat{F}_2 \\ E_{k'-1} & \hat{F}_{k'-1} \\ E_{k'} \\ E_{k'+1} & \hat{F}_{k'+1} \\ (-\hat{z}_{k''-1})E_{k''-1} & \hat{F}_{k''-1} \\ E_{k''} \\ E_{k''+1} & \hat{F}_{k''+1} \\ (-\hat{z}_{k''+2})E_{k''+2} & \hat{F}_{k''+2} \\ E_{k''+3} \\ E_{k-2} & \hat{F}_{k-2} \\ (-\hat{z}_{k-1})E_{k-1} & \hat{F}_{k-1} \\ E_k \\ E_{k+1} \\ \mathbb{O} & & & E_m \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_{k'} \\ q_{k''} \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G), \qquad (2.41)$$

либо эквивалентные последнему четыре представления

Представления I45(I45')÷I48(I48') (при условии X)

$$\left\{ \tilde{\mathbb{C}}_L^{\bar{X}} \right\} \begin{bmatrix} [\{(\overset{k'-1}{B}\cdot S)_\zeta\}_{\zeta=1}^2] & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{k'+1}(\tilde{z}_{k'+1}) \\ (\tilde{P}_{k'+1})\tilde{\omega}_{k'+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\delta_{k'k''} & \mathbb{O} \\ \delta_{k'+1k''} & \delta_{k'+1k''+1}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\quad E_{k'+2}\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{k''k'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_{k''}(\tilde{z}_{k''+1}) \\ (\tilde{P}_{k''+1})\tilde{\omega}_{k''+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\delta_{k''k} & \mathbb{O} \\ \delta_{k''+1k} & \delta_{k''+1k+1}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\quad E_{k''+2}\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & a_{kk'+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_k(\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1})G_k\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & [\{(\overset{m}{B}\cdot S)_\zeta\}_{\zeta=1}^2] \end{bmatrix} \left\{ \mathbb{C}_L^{\bar{X}} \right\} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_{k'} \\ q_{k''} \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G), \qquad (2.42)$$

где

$$\left\{\begin{array}{l}\text{соответствующие матрицы } [B, \hat{B}, L, \hat{\omega}, \tilde{\omega}], [z, \hat{z}, F, \hat{F}], [a, \delta], \text{ а также} \\ \text{представления } (B\cdot S)(\{(B\cdot S)_\zeta\}_{\zeta=1}^2) \text{ - определены в (2.16).}\end{array}\right. \qquad (2.43)$$

А также

Представление I49(I49') (при условии X)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) \\ E_{k'-2}(-\hat{\beta}_{k'-1}) \\ E_{k'-1}\,\mathbb{O}_{k'} \\ E_{k'}\,\mathbb{O}_{k'+1} \\ E_{k'+1}(-\hat{\beta}_{k'+2}) \\ E_{k''-1}\,\mathbb{O}_{k''} \\ E_{k''}\,\mathbb{O}_{k''+1} \\ E_{k''+1}(-\hat{\beta}_{k''+2}) \\ E_{k-2}(-\hat{\beta}_{k-1}) \\ E_{k-1}\,\mathbb{O}_k \\ E_k\,\mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-\hat{\beta}_{k+2}) \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_{k'-1} \\ \hat{A}_1\cdots\hat{A}_{k'-1}E_{k'} \\ E_{k'+1} \\ E_{k''-1} \\ \hat{A}_{k'+1}\hat{A}_{k''-1}E_{k''} \\ E_{k''+1} \\ E_{k-1} \\ \hat{A}_{k''+1}\hat{A}_{k-1}E_k \\ E_{k+1} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_2 \cdots \tilde{P}_{k'-1}\ \ \overset{k'-1}{R} & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix}\Lambda_{k'+1}(\tilde{z}_{k'+1}) \\ (\tilde{P}_{k'+1})\tilde{\omega}_{k'+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \tilde{\delta}_{k'+1k''} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\quad E_{k'+2}\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{k''k'} & \tilde{a}_{k''k'+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k''+1k'+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_{k''}(\tilde{z}_{k''+1}) \\ (\tilde{P}_{k''+1})\tilde{\omega}_{k''+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \tilde{\delta}_{k''+1k} & \mathbb{O}\end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\quad E_{k''+2}\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{kk'} & \tilde{a}_{kk''+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k+1k''+1}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_k(\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1})G_k\end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \tilde{P}_{k+3}\cdots\tilde{P}_m\ \ \overset{m}{R} \end{bmatrix} \times$$

$$
\times\begin{bmatrix}
E_1 \\
 & E_2 \\
 & & \ddots \\
 & & & E_{k'} \\
 & & & & E_{k'+1} \\
 & & & & A_{k'+2} & E_{k'+2} \\
 & & & & A_{k''} & & E_{k''} \\
 & & & & & & & E_{k''+1} \\
 & & & & & & & A_{k''+2} & E_{k''+2} \\
 & & & & & & & A_{k} & & E_{k''+3} \\
 & & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & & E_{k} \\
 & & & & & & & & & & & & E_{k+1} \\
 & & & & & & & & & & & & A_{k+2} & E_{k+2} \\
 & & & & & & & & & & & & A_{k+3} & & E_{k+3} \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & & & A_m & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & (-C_2) \\
 & \ddots & \ddots \\
 & & E_{k'-1} & (-C_{k'}) \\
 & & & E_{k'} & \mathbb{O}_{k'+1} \\
 & & & & E_{k'+1} & \mathbb{O}_{k'+2} \\
 & & & & & E_{k'+2} & (-C_{k'+3}) \\
 & & & & & & E_{k''} & \mathbb{O}_{k''+1} \\
 & & & & & & & E_{k''+1} & \mathbb{O}_{k''+2} \\
 & & & & & & & & E_{k''+2} & (-C_{k''+3}) \\
 & & & & & & & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & & & & & & & E_{k-1} & (-C_k) \\
 & & & & & & & & & & & E_k & \mathbb{O}_{k+1} \\
 & & & & & & & & & & & & E_{k+1} & \mathbb{O}_{k+2} \\
 & & & & & & & & & & & & & E_{k+2} & (-C_{k+3}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 \\
 & q_2 \\
 & & \ddots \\
 & & & q_{k'} \\
 & & & & q_{k''} \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & q_k \\
 & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & q_{m-1} \\
 & & & & & & & & & q_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G), \tag{2.43}
$$

либо эквивалентное ему представление

<u>Представление I50(I50′)</u> (при условии X)

$$
\left\{\tilde{\mathbb{C}}_R^{\bar{X}}=
\begin{bmatrix}
E_1 \\
 & E_2 & & & & & \mathbb{O} \\
 & & \ddots \\
 & & & E_{k'-1} \\
\hat{\xi}_1 \cdots & & & \hat{\xi}_{k'-1} & E_{k'} \\
 & & & & & E_{k'+1}(-\hat{\tau}_{k''-1}) \\
 & & & & & & E_{k''-1} \\
 & & & & & \hat{\xi}_{k'+1} & \hat{\xi}_{k''-1} & E_{k''} \\
 & & & & & & & & E_{k''+1} \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & E_{k-1}(-\hat{\tau}_k) \\
 & & & & & & & & \hat{\xi}_{k''+1} & & \hat{\xi}_{k-1} & E_k \\
 & \mathbb{O} & & & & & & & & & & & E_{k+1}(-\hat{\tau}_{k+2})\ldots(-\hat{\tau}_m) \\
 & & & & & & & & & & & & & E_{k+2} \\
 & & & & & & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\left[(\overset{k'-1}{B}\cdot T)\right] & & & & \mathbb{O} \\
 & \begin{bmatrix}\Lambda_{k'+1} & (\tilde{z}_{k'+1}) \\ (\tilde{P}_{k'+1}) & \hat{\omega}_{k'+1}\end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \tilde{\delta}_{k'+1k''} & \mathbb{O}\end{bmatrix} \\
 & \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad E_{k'+2} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\
 & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{k''k'} & \tilde{a}_{k''k'+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k''+1k'+1}\end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix}\tilde{\omega}_{k''} & (\tilde{z}_{k''+1}) \\ \tilde{P}_{k''+1} & \hat{\omega}_{k''+1}\end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \tilde{\delta}_{k''+1k} & \mathbb{O}\end{bmatrix} \\
 & \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad E_{k''+2} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\
 & \cdots \\
 & & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{kk''} & \tilde{a}_{kk''+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k+1k''+1}\end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix}\tilde{\omega}_k & (\tilde{z}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & G_k\end{bmatrix} \\
 & \mathbb{O} & & & \left[(\overset{m}{B}\cdot T)\right]
\end{bmatrix}\right.\times
$$

$$
\times\left\{\mathbb{C}_R=
\begin{bmatrix}
E_1 & & (-\tau_1) \\
 & E_2 & (-\tau_2) & & & \mathbb{O} \\
 & & \ddots \\
 & & & E_{k'-1}(-\tau_{k'-1}) \\
 & & & & E_{k'} \\
 & & & & & E_{k'+1} \\
 & & & & & \xi_{k'+2} & E_{k'+2}(-\tau_{k'+2}) \\
 & & & & & \xi_{k''} & & E_{k''} \\
 & & & & & & & & E_{k''+1} \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & E_{k-1}(-\tau_{k-1}) \\
 & & & & & & & & & & & E_k \\
 & \mathbb{O} & & & & & & & & & & & E_{k+1} \\
 & & & & & & & & & & & & \xi_{k+2} & E_{k+2} \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & & & \xi_m & & & E_m
\end{bmatrix}\right\}
\begin{bmatrix}
q_1 \\
 & q_2 \\
 & & \ddots \\
 & & & q_{k'} \\
 & & & & q_{k''} \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & q_k \\
 & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & q_{m-1} \\
 & & & & & & & & & q_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G), \tag{2.44}
$$

либо эквивалентные последнему <u>четыре</u> представления

<u>Представления I5I(I5I′)÷I54(I54′)</u> (при условии X)

$$
\left\{\begin{bmatrix}\tilde{\mathbb{C}}_R\end{bmatrix}\right\}
\begin{bmatrix}
\left[\{(\overset{k'-1}{B}\cdot T)_\jmath\}_{\jmath=1}^{2}\right] & & & & \mathbb{O} \\
 & \begin{bmatrix}\Lambda_{k'+1} & (\tilde{z}_{k'+1}) \\ (\tilde{P}_{k'+1}) & \hat{\omega}_{k'+1}\end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \tilde{\delta}_{k'+1k''} & \mathbb{O}\end{bmatrix} \\
 & \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad E_{k'+2} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\
 & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{k''k'} & \tilde{a}_{k''k'+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k''+1k'+1}\end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix}\tilde{\omega}_{k''} & (\tilde{z}_{k''+1}) \\ (\tilde{P}_{k''+1}) & \hat{\omega}_{k''+1}\end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \tilde{\delta}_{k''+1k} & \mathbb{O}\end{bmatrix} \\
 & \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \quad E_{k''+2} \quad \mathbb{O} \quad \mathbb{O} \\
 & \cdots \\
 & & \begin{bmatrix}\tilde{a}_{kk''} & \tilde{a}_{kk''+1} \\ \mathbb{O} & \tilde{a}_{k+1k''+1}\end{bmatrix} \mathbb{O} \begin{bmatrix}\tilde{\omega}_k & (\tilde{z}_{k+1}) \\ \tilde{P}_{k+1} & G_k\end{bmatrix} \\
 & \mathbb{O} & & & \left[\{(\overset{m}{B}\cdot T)_\jmath\}_{\jmath=1}^{2}\right]
\end{bmatrix}
\left\{\mathbb{C}_R^{\bar{X}}\right\}
\begin{bmatrix}
q_1 \\
 & q_2 \\
 & & \ddots \\
 & & & q_{k'} \\
 & & & & q_{k''} \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & q_k \\
 & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & q_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G) \tag{2.45}
$$

где

$$\left\{\begin{array}{l}\text{соответствующие матрицы } [\hat{A},A;\hat{\xi},\xi;\hat{\tau},\tau;\ R,\hat{\omega},\tilde{\omega}],[\tilde{a},\tilde{\delta}], \text{ а также} \\ \text{представления } (BT)(\{(BT)_\jmath\}_{\jmath=1}^{2}) \text{ – определены в (2.20).}\end{array}\right. \tag{2.46}$$

<u>При этом</u> (при условии X)

$$\left\{\begin{array}{l}\{\tilde{B}_{11}=G_0^{-1},\ \tilde{B}_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1},\ \tilde{B}_{k'-1k'-1}=\Lambda_{k'}^{-1}\}_{\mu=2}^{k'-2},\ \{\tilde{B}_{k'k'}-?,\ \tilde{B}_{k'+1k'+1}-?,\ \tilde{B}_{k'+2k'+2}=E_{k'+2};\ \tilde{B}_{k''k''}-?, \\ \tilde{B}_{k''+1k''+1}-?,\ \tilde{B}_{k''+2k''+2}=E_{k''+2};\ldots;\},\ \{\tilde{B}_{k+2k+2}=G_{k+1}^{-1},\ \tilde{B}_{\mu\mu}=(\Lambda_{\mu+1}+G_{\mu-1}-E_\mu)^{-1},\ \tilde{B}_{mm}=\Lambda_{m+1}^{-1}\}_{\mu=k+3}^{m-1}.\end{array}\right. \tag{2.47}$$

<u>Доказательство</u>. Комбинируя представления [6] 67(67′) с 69(69′) (при условии IX), представления [6] 68(68′) с 70(70′) (при условии X) соответственно и воспользовавшись указанной техникой доказательства теоремы 22, получаем множество представлений I07(I07′)÷I54(I54′) в соответствующих условиях. В свою очередь, справедливость каждого из множества этих представлений проверяется путем перемножения блочных матриц. При этом следует иметь в виду определения последовательностей $\{G\}$ (I.II) и $\{\Lambda\}$ (I.I2), а также определения для $\tilde{B}_{\mu\mu}$ (2.39) и $\tilde{B}_{\mu\mu}$ (2.47). <u>Теорема доказана</u>.

Ниже (так же, как и в Теореме I8 [5]) сформулируем результат, суть которого можно определить, в соответствии с [5], как обобщение понятия <u>условного вырождения второго рода</u> любой матрицы вида $\mathbb{C}$ (I.I).

Итак, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 25</u>. Пусть $\mathbb{C}$ -квазитрехдиагональная матрица вида $\mathbb{C}$ (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_k,P_k;\tilde{z}_k,\tilde{P}_k\}_{k=2}^{m}$ и невырожденными квазидиагональными элементами-блоками $\{q_k\}_{k=1}^{m}$, размерности которых в общем случае различные. Пусть также для последовательностей матриц $\{G\}$ (I.II) и $\{\Lambda\}$ (I.I2) выполняются условия IX <u>либо</u> X Теоремы 24. Тогда условия

$$[\det(\tilde{B}_{11}^{-1}=G_0)=0=\det(\tilde{B}_{mm}^{-1}=\Lambda_{m+1})] \text{ и(или) } \left\{\begin{array}{l}[\det(T_1(\Lambda,G))=0,\ \det(T_2(\Lambda,G))=0] \text{ либо} \\ [\det(\hat{T}_1(\Lambda,G))=0,\ \det(\hat{T}_2(\Lambda,G))=0], \text{ где} \\ [T_1,T_2;\hat{T}_1,\hat{T}_2] \text{ – блочно квазитрех-} \\ \quad \text{диагональные матрицы в (2.33),} \\ \quad \text{(2.37) и (2.42), (2.45) соответст-} \\ \quad \text{венно,}\end{array}\right. \tag{2.47}$$

являются <u>необходимыми и достаточными условиями</u> вырожденности матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) в соответствующих случаях.

<u>Доказательство</u> теоремы, на самом деле, является прямым следствием Теоремы 24 (при соответствующих условиях), а также Представлений 29(29′)÷34(34′) для $\mathbb{C}(\Lambda,G)$ (с учетом определений для $\tilde{B}_{kk}$ (2.39) и $\tilde{B}_{kk}$ (2.47)), поэтому на нем не останавливаемся.

<u>Замечание 2</u>. Отметим, что здесь мы не сформулировали теоремы отдельно для каждого из рассмотренных выше случаев, а ограничились лишь формулировкой Теоремы 25 для случаев IX и X, поскольку остальные (УI÷УШ) случаи можно получить из IX и X соответственно.

Замечание 3. Во всех представлениях 72(72')÷154(154') кроме 77(77'), 83(83'), 89(89'), 95(95'), 101(101'), 107(107'), 125(125'), 143(143'), 149(149') определители левой и правой факторизующих матриц равны 1, и эти матрицы легко обращаются в силу своего блочно-двухдиагонального вида. Кроме того, рассмотренные выше возможные основные комбинации 1÷Х вырождений матриц в последовательностях $\{G\}$ (1.11) и $\{\Lambda\}$ (1.12) по сути позволяют получить представления для $\mathbb{C}$ (1.1) при других всевозможных вырождениях в указанных последовательностях.

Замечание 4. С учетом сказанного выше в замечаниях 2 и 3 практическая значимость (для положительных ответов на вопросы, поставленные в § 2 [6])полученных представлений в значительной мере определяется свойствами средних (в общем случае квазитрехдиагональных) индуцированных матриц - сомножителей в этих представлениях. То же самое отмечалось нами и в [6] при изучении аналогичных представлений с учетом информации только об однотипных последовательностях матриц $\{G\}$ (1.11) либо $\{\Lambda\}$ (1.12). Свойства индуцированных матриц будут рассмотрены нами в следующей работе.

Замечание 5. В работах этой серии [2÷6] мы требовали, чтобы для диагональных блоков $\{det(q_i)\neq 0\}_{i=1}^{m}$. Однако эти ограничения легко снимаются, если во всех полученных в работах результатах перейти от $\{G_{m-1}=E_m, G_{k-1}\}_{k=1}^{m-1}$ и $\{\Lambda_2=E_1, \Lambda_{k+1}\}_{k=3}^{m}$ к последовательностям $\{\bar{G}_{m-1}=q_m, \bar{G}_{k-1}=G_{k-1}\cdot q_k\}_{k=1}^{m-1}$ и $\{\bar{\Lambda}_2=q_1, \bar{\Lambda}_{k+1}=\Lambda_{k+1}\cdot q_k\}_{k=3}^{m}$ с учетом определений $\{G\}$ и $\{\Lambda\}$ (1.11) и (1.12).

Если теперь выполнить рассуждения, аналогичные тем, которые были нами проведены ранее в[6], то приходим к следующему выводу.

Заключение

Найдены множества (Теоремы 22÷24) факторизованных представлений квазитрехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (1.1), которые позволяют получить нетрадиционные обобщения компактных схем Гаусса, в случае, когда некоторые из верхних и нижних блочных угловых миноров этих матриц обращаются в нуль одновременно. Доказана Теорема 25 об условном вырождении второго рода таких матриц.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за поддержку настоящего цикла работ.

Литература

1. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, Р11-86-531, Дубна 1986.
2. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-86-504; Р11-87-524; Р11-87-623, Дубна 1986, 1987.
3. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-87-533, Дубна 1987.
4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-88-598, Дубна 1988.
5. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-88-599, Дубна 1988.
6. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ Р11-88-786, Дубна 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1988 года.

Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Р11-88-922
Факторизации квазитрехдиагональных матриц при одновременном обращении в нуль некоторых из их ведущих верхних и нижних блочных угловых миноров

Найдены множества факторизованных представлений квазитрехдиагональных матриц общего вида, позволяющие получить нетрадиционные обобщения компактных схем Гаусса для случая, когда некоторые из ведущих верхних и нижних блочных угловых миноров этих матриц обращаются в нуль одновременно.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Rakhmonov T.T. P11-88-922
Factorizations of Quasidiagonal Matrices in the Case of Zero Certain Main Block Upper and Lower Angular Minor Simultaneity

The multiplicities of factorization representations of general quasitridiagonal metrices allowing one to obtain a nontraditional compact scheme of Gauss method generalization in the case of zero certain main block upper and lower angular minors of these matrice simultaneity are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988