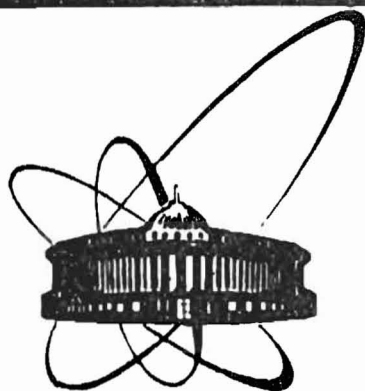


88-921



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

E 601

P11-88-921

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек\*

О СИСТЕМЕ ПРОГРАММ  
НА ФОРТРАНЕ ЭВМ ЕС-1061 (60)  
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
И КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ  
ВЕЩЕСТВЕННЫХ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ  
ОБЩЕГО ВИДА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Направлено в "Журнал вычислительной математики  
и математической физики"

\*Университет, Пхеньян, КНДР

1988



вида. В случае алгебраически замкнутого<sup>x)</sup> поля  $\bar{R}$  существуют (согласно, например, основной теореме 73.I §73[2] или её алгебраическому эквиваленту – основной теореме Дополнения в [6]) невырожденные матрицы ( $F = \|f_{ij}\|, f_{ij} \in \bar{R}$ ), и, следовательно, базисы в  $\bar{R}^m$  такие, что имеет место прямая сумма матриц  $\{\hat{J}_{k_i}(\lambda_i)\}_{i=1}^s$

$$\bar{F}^{-1} A \bar{F} = [\hat{J}_{k_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \hat{J}_{k_s}(\lambda_s)] = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & \\ 0 & & \dots \\ & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{bmatrix} = (J(A) \equiv J), \quad (I.2)$$

где  $\{|\lambda_i| \neq |\lambda_j|, \text{ если } i \neq j\}_{i,j=1}^s$  –  $S$  попарно различных собственных значений матрицы  $A$ , алгебраические кратности  $K_i$  и  $K_j$  которых, т.е. число одинаковых корней каждого из многочленов

$$\begin{cases} \chi(\lambda) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \lambda + \dots + \bar{a}_{k_i} \lambda^{k_i} = (\lambda - \lambda_i)^{k_i}; \\ \varphi(\lambda) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \lambda + \dots + \bar{b}_{k_j} \lambda^{k_j} = (\lambda - \lambda_j)^{k_j} \end{cases}, \quad (I.3)$$

удовлетворяют равенству  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = m$ . При этом характеристический многочлен –  $\det(A - \lambda E)$  матрицы  $A$  записывается в виде

$$\det(A - \lambda E) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_m \lambda^m = [(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}]^{n^{(1)}} \dots [(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}]^{n^{(s)}} \quad (I.4)$$

$$= (\lambda - \lambda_1)^{k_1 n^{(1)}} (\lambda - \lambda_2)^{k_2 n^{(2)}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s n^{(s)}}, \text{ где } n^{(1)} + n^{(2)} + \dots + n^{(s)} = K_m, \text{ для всех } 1 \leq \mu \leq s.$$

Квадратные  $[k_i, k_i]$  матрицы  $\hat{J}_{k_i}(\lambda_i)$ , у которых равны нулю все элементы кроме, возможно, элементов двух диагоналей, имеют вид

$$\hat{J}_{k_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ где } J_{k_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} J_{k_i}^{n^{(1)}}(\lambda_i) & & & \\ & J_{k_i}^{n^{(2)}}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_i}^{n^{(s)}}(\lambda_i) \end{bmatrix}, J_{k_i}^{n^{(j)}}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i \cdot 1 & & & \\ & \lambda_i \cdot 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \cdot 1 \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

Квадратные же  $[n_i^{(j)}, n_i^{(j)}]$  двухдиагональные матрицы  $J_{k_i}^{n^{(j)}}(\lambda_i)$  при любых  $j$  из  $(1 \leq j \leq s)$  для каждого  $i$  из интервала  $(1 \leq i \leq s)$  называют

<sup>x)</sup> Согласно, например, § 2.II[7] или § 66+68 [2] поле  $\bar{R}$  называется алгебраически замкнутым, если корни  $\lambda_m$  любого многочлена  $\psi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_m \lambda^m$  степени  $m \geq 1$  с коэффициентными  $\{a_i \in \bar{R}\}_{i=0}^m$  также принадлежат этому полю, т.е.  $\{\lambda_m \in \bar{R}\}_{m=1}^m$ . Итак, в алгебраически замкнутом поле  $\bar{R}$  каждый многочлен  $\psi(\lambda)$  имеет хотя бы один корень и он принадлежит  $\bar{R}$ . В смысле этого определения  $R$  – поле вещественных чисел алгебраически незамкнуто, а  $\bar{R}$  – поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, и при этом  $R \subset \bar{R}$ .

обычно верхней<sup>x)</sup> канонической клеткой [61] (либо каноническим ящиком [2]) Жордана, соответствующей собственному значению  $\lambda_i$ . Это и обусловило в общем случае название  $J$  (I.2) как матрицы Жордана, а преобразование вида (I.2), (I.5) как жордановоподобного. Если же в результате указанного преобразования окажется, что  $\{K_i(\lambda_i)\}_{i=1}^s = \{\text{diag}(\lambda_i)\}_i$ , т.е. все клетки Жордана  $J_{k_i}^{n^{(j)}}(\lambda_i)$  (I.5)<sub>3</sub> являются диагональными матрицами, то матрицу  $A$  называют диагональзуемой, и  $J$  (I.2) записывают в виде  $J = U^{-1} A U = \text{diag}(\lambda)$ . Очевидно имеет место вложение множеств

$$m_{\{\lambda_i \neq \lambda_j\}_{i,j=1}^s}^A \subset m_{\{\lambda\}}^A \subset m_J^A,$$

где  $m_J^A$ ,  $m_{\{\lambda\}}^A$  и  $m_{\{\lambda_i \neq \lambda_j\}_{i,j=1}^s}^A$  – множества квадратных матриц  $A$  общего вида соответственно жордановоподобных, диагональзуемых (но имеющих кратные собственные значения) и диагональзуемых (но со всеми различными собственными значениями). Матрицы, принадлежащие множеству  $m_{\{\lambda\}}^A$ , относятся к так называемым матрицам простой структуры, а  $m_J^A$  – непростой структуры (или дефектным, см., например, § 7.4I [3]).

Замечание I.C точною до перестановки клеток  $J_{k_i}^{n^{(j)}}(\lambda_i)$  (I.5)<sub>3</sub> в (I.5)<sub>1</sub>,<sub>3</sub> жорданова нормальная форма  $J(A)$  (I.2) матрицы  $A$  единственна, однако невырожденная матрица  $F$ , осуществляющая преобразование подобия (I.2) даже при нормировке  $\det(F) = 1$ , определяется (см., например, главу Дополнение в [61]) не единственным образом. Последнее обусловлено тем обстоятельством, что при фиксированных матрицах  $A$  и  $J(A)$  равенство (I.2) представляет собой однородную матричную систему линейных уравнений относительно  $F$ , т.е.

$$F J(A) - A F = 0 \text{ – матрица,} \quad (I.6)$$

решение которой записывается в общем виде как

$$F = \zeta_1 F_1 + \zeta_2 F_2 + \dots + \zeta_r F_r, \det(F) \neq 0. \quad (I.7)$$

Здесь  $\{F_1, \dots, F_r\}$  – фундаментальная система матриц-решений системы (I.6), некоторые из которых, вообще говоря, могут быть и вырожденными, но числа  $(\zeta_k \in \bar{R})_{k=1}^r$  в общем случае произвольные и одновременно не обращаются в нуль. Таким образом, существование различных методов сведения  $A$  к  $J(A)$  является, очевидно, следствием неединственности  $F$ .

В дальнейшем, не нарушая общности, будем предполагать, что ящики Жордана упорядочены в виде (I.2), (I.5), и преобразование подобия (I.2) выполнено каким-либо из методов, т.е.  $F$  – фиксирована. Тогда, очевидно, имеет место разложение  $A$  в прямую сумму индуцированных матриц  $\{F \hat{J}_{k_i}(\lambda_i) F^{-1}\}_{i=1}^s$ , порождаемых матрицей (оператором)  $A$ , т.е.

<sup>x)</sup> Существуют также представления  $J$  (I.2) в форме нижних канонических ящиков Жордана, т.е. когда у матриц  $J_{k_i}^{n^{(j)}}(\lambda_i)$  единицы стоят под главной диагональю.

$$A = [F \hat{J}_{k_1}(\lambda_1) F^{-1}] \circ \dots \circ [F \hat{J}_{k_s}(\lambda_s) F^{-1}]. \quad (I.8)$$

В свою очередь, каждая из  $\{F \hat{J}_{k_i}(\lambda_i) F^{-1}\}_{i=1}^s$  индуцированных матриц с учетом (I.5) представляет собой опять-таки прямую сумму матриц, заданных над  $\tilde{R}$  и действующих в  $\tilde{R}_m$ , т.е.

$$[F \hat{J}_{k_i}(\lambda_i) F^{-1}] = [F J_{k_i}^{n_i^{(1)}}(\lambda_i) F^{-1}] \circ \dots \circ [F J_{k_i}^{n_i^{(s)}}(\lambda_i) F^{-1}]. \quad (I.9)$$

Разложения (I.2), (I.8) и (I.9) единственны при фиксированной матрице  $F$ .

Замечание 2. Представляется уместным ввести название слагаемых в прямой сумме (I.8) как корневых индуцированных матриц, а в прямой сумме (I.9) — как элементарных или циклических индуцированных матриц, составляющих свою корневую матрицу. Такие названия по сути не противоречат общепринятой терминологии формальной теории индуцированных операторов (см., например, § 70+74 из [2]).

Если для любого  $i \lambda_i \neq 0$ , то нетрудно убедиться с учетом (I.5), что ранги корневых и циклических индуцированных матриц равны соответственно

$$\text{rang}[F \hat{J}_{k_i}(\lambda_i) F^{-1}] = k_i \quad \text{и} \quad \text{rang}[F J_{k_i}^{n_i^{(s)}}(\lambda_i) F^{-1}] = n_i^{(s)}. \quad (I.10)$$

Следовательно, базисные миноры и определяемые ими базисные (т.е. линейно независимые) строки (столбцы) любых матриц  $F \hat{J}_{k_i}(\lambda_i) F^{-1}$  и  $F J_{k_i}^{n_i^{(s)}}(\lambda_i) F^{-1}$  в (I.8), (I.9) в соответствии с § 4. 32+§ 4. 35 [8] определяют место расположения и размерами соответствующих клеток Жордана в (I.2), (I.5). При этом следует иметь в виду, что столбцы как исходной матрицы  $A$ , так и индуцированных матриц  $F \hat{J}_{k_i}(\lambda_i) F^{-1}$  и  $F J_{k_i}^{n_i^{(s)}}(\lambda_i) F^{-1}$  являются прямыми суммами своих соответствующих образов  $\{A \tilde{e}_i, [F \hat{J}_{k_i}(\lambda_i) F^{-1}] \tilde{e}_i$  и  $[F J_{k_i}^{n_i^{(s)}}(\lambda_i) F^{-1}] \tilde{e}_i\}_{i=1}^m$  базисных векторов  $\tilde{e}_i$  универсального базиса  $\{\tilde{e}_i, \tilde{e}_i^T = 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}_{i=1}^m$  в пространстве  $\tilde{R}_m$ . Из сказанного выше следует, что разложениям (I.8) и (I.9) отвечают соответствующие разбиения базиса в пространстве образов ( $X \in \tilde{R}_m \rightarrow (AX) \in \tilde{R}_m$ ) на подмножества линейно независимых векторов. Итак, переход от представления произвольной матрицы (оператора)  $A$  в стандартном в  $\tilde{R}_m$  базисе  $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^m$ ,  $m$ -мерные векторы  $\{\tilde{e}_i^T = 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}_{i=1}^m$  которого являются собственными векторами диагональных операторов (матриц)  $\text{diag}(\lambda_i)$ , т.е.  $\{\text{diag}(\lambda_i) \tilde{e}_i = \lambda_i \tilde{e}_i\}_{i=1}^m$ , к виду  $J(A) = J_m$  (I.2), (I.5) равносильна замене базиса  $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^m$  базисом  $\{F_i\}_{i=1}^m$  в  $\tilde{R}_m$ , составленным из  $F_i$  —  $m$ -мерных вектор-столбцов матрицы  $F$  (I.2). Линейная независимость этих вектор-столбцов обусловлена требованием  $\det(F) \neq 0$ . При этом в соответствии с выполненным выше анализом базиса  $\{F_i\}_{i=1}^m$  в  $\tilde{R}_m$  оказывается в общем случае разбитым на следующие непересекающиеся линейно независимые базисные подмножества  $m$ -мерных вектор-столбцов

$$\left. \begin{aligned} \{F_i\}_{i=1}^m &= \left\{ \{F_i\}_{i=1}^{k_1}, \{F_i\}_{i=k_1+1}^{k_2}, \dots, \{F_i\}_{i=k_{s-1}+1}^{k_s} \right\}, \text{ где} \\ \{F_i\}_{i=k_{z-1}+1}^{k_z} &= \left\{ \{F_i\}_{i=k_{z-1}+1}^{k_{z-1}+n_i^{(1)}}, \{F_i\}_{i=k_{z-1}+n_i^{(1)}+1}^{k_{z-1}+n_i^{(1)}+n_i^{(2)}}, \dots, \{F_i\}_{i=k_{z-1}+n_i^{(1)}+n_i^{(2)}+1}^{k_z} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (I.11)$$

для любых  $1 \leq z \leq s$ .

Следовательно, столбцы корневых индуцированных матриц в прямой сумме (I.8) являются линейными комбинациями соответствующих базисных векторов (I.11)<sub>2</sub>. Таким образом, в соответствии с (I.8) и (I.9), а также § 70+74 [2] пространство  $\tilde{R}_m$ , в котором задан(а)  $A$ , расслаивается в прямую сумму корневых и далее циклических подпространств соответствующих размерностей  $\{k_i\}_{i=1}^s$ ,  $\{n_i^{(t)}\}_{i=1}^s$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_m &= R_{\lambda_1}^{(k_1)} \oplus R_{\lambda_2}^{(k_2)} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_s}^{(k_s)}, \text{ где} \\ R_{\lambda_z}^{(k_z)} &= R_{\lambda_z}^{n_z^{(1)}} \oplus R_{\lambda_z}^{n_z^{(2)}} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_z}^{n_z^{(s)}}, \quad 1 \leq z \leq s, \end{aligned} \quad (I.12)$$

т.е. для любого вектора  $X \in \tilde{R}_m$  имеет место разложение

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n=1}^s \beta_n X_n, \text{ где } X_n = \sum_{z=1}^k \gamma_{nz} \gamma_{nz}, \text{ а также} \\ X_n &\in R_{\lambda_n}^{(k_n)}, \quad \gamma_{nz} \in R_{\lambda_n}^{n_z^{(z)}} \text{ и } \beta_n, \gamma_{nz} \in \tilde{R}. \end{aligned} \quad (I.13)$$

Нетрудно также убедиться с учетом  $\det(F) \neq 0$ , что корневые  $R_{\lambda_z}^{(k_z)}$  подпространства инвариантны относительно действия на их векторы соответствующих корневых индуцированных операторов (матриц) (I.8), т.е. если  $X_n \in R_{\lambda_n}^{(k_n)}$ , то  $[[F \hat{J}_{k_i}(\lambda_i) F^{-1}] X_n] \in R_{\lambda_n}^{(k_n)}$ , что также формально согласуется с теорией инвариантных подпространств (см., например, § 70-74 [2]).

Замечание 3. Не всякий вектор любого базисного подмножества в (I.11)<sub>1</sub> является собственным вектором соответствующего корневого индуцированного оператора (матрицы), и, следовательно, в соответствии с § 70 [2] порождающего оператора  $A$ .

На самом деле. Лишь диагональзующие (простой структуры) матрицы  $A$ , т.е.  $\{U^{-1} A U = \text{diag}(\lambda_i)\} \leftrightarrow \{A U = U \text{diag}(\lambda_i)\}$  имеют (см., например, § 7.4I [8])  $m$  линейно независимых  $\{U \tilde{e}_i\}_{i=1}^m$  — собственных векторов (столбцов матрицы  $U$ ). Только в этом случае базисы корневых пространств состоят из соответствующих собственных векторов  $A$  (т.е. столбцов  $U$ ) с учетом  $k_i$  — алгебраической кратности  $\lambda_i$ . Если же оператор (матрица)  $A$  не простой структуры, то лишь часть базисных векторов любого корневого подпространства, например,  $R_{\lambda_i}^{(k_i)}$ , будут собственными, а также их число равно  $(l_i \leq k_i)$  — числу ящиков Жордана (I.5)<sub>3</sub> всех размерностей  $n_i^{(1)}, \dots, n_i^{(s)}$ , отвечающих данному  $\lambda_i$  — алгебраической кратности  $k_i$ . Число  $l_i$  принято (см., например, § 7.20 [8]) называть геометрической кратностью данного  $\lambda_i$ . Действительно, любая клетка Жордана  $J_{k_i}(\lambda_i)$  (I.5) имеет лишь один нетривиальный собственный вектор, поскольку

$$\{ [J_{\kappa_i}^{n_i}(\lambda_i)X = \lambda_i X] \rightarrow [(J_{\kappa_i}^{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i E)X = 0] \} \rightarrow$$

$$\{ 0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 = 0, 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 = 0, \dots, 0 \cdot X_1 + \dots + 1 \cdot X_{n_i-1} = 0, \quad (I.14)$$

$$0 \cdot X_1 + \dots + 0 \cdot X_{n_i-1} + 1 \cdot X_{n_i} = 0 \} \rightarrow X = [1, 0, \dots, 0]$$

Следовательно, каждое из индуцированных циклических подпространств  $(I.II)_2, (I.I2)_2$  имеет не более одного собственного вектора, а каждое из индуцированных корневых подпространств  $(I.II)_1, (I.I2)_1$  - не более чем его геометрическая кратность.

Итак, если отмеченные собственные векторы заданы, т.е. фиксированы соответствующие столбцы матрицы  $F$  (I.2) и полагается, что  $(J(A) \equiv J)$  имеет вид (I.2), (I.5), то:

Во - первых, при известной матрице  $F$  ( т.е. при выполненном уже преобразовании (I.2)) следом за каждым из таким образом фиксированных её столбцов - собственных векторов будут стоять недостающие базисные векторы порождаемых ими циклических пространств  $(I.II)_2, (I.I2)_2$ , объединения которых со своими собственными векторами образуют базисы соответствующих корневых подпространств  $(I.II)_1, (I.I2)_1$ .

Во - вторых, если же каким-либо способом найдены лишь собственные векторы  $A$ , т.е. фиксированы лишь соответствующие столбцы  $F$ , то для вычисления следующих за ними столбцов  $F$  ( т.е. недостающих базисных векторов, соответствующих циклических подпространств ), объединение которых с собственными векторами, также образуют базисы корневых подпространств, применяют следующий ( см., например, § 74 [2] либо теорему 5.32 [9] ) метод<sup>х)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} A \cdot \varphi_{\kappa}^{(0)} &= \lambda_{\kappa} \varphi_{\kappa}^{(0)}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, l \\ (A - \lambda_{\kappa} E) \varphi_{\kappa}^{(0)} &= \varphi_{\kappa}^{(n-1)}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, l; \quad n = 2, 3, \dots, n_{\kappa} \end{aligned} \right\}, \quad (I.15)$$

где  $l$  - общее число всех ящиков Жордана всевозможных порядков  $n_{\kappa}$ , таких, что  $n_1 + n_2 + \dots + n_l = m$  для всех  $(s \geq l)$  попарно различных собственных значений  $\{\lambda_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{s \geq l}$ . При этом  $m$  линейно независимых  $m$ -мерных векторов  $\{\varphi_{\kappa}^{(0)}\}$  образуют базис в  $\bar{R}_m$  и  $l$  из этих векторов, а именно  $\{\varphi_{\kappa}^{(0)}\}_{\kappa=1}^l$  - являются собственными ( в соответствии с (I.15)<sub>1</sub>) векторами матрицы  $A$ .

Замечание 4. Корневые векторы  $\{\varphi_{\kappa}^{(0)}\}_{\kappa=2}^{n_{\kappa}}$  (I.15)<sub>2</sub>, нормы которых отличны от нуля, уместно для любого  $\kappa$  из  $1 \leq \kappa \leq l$  называть циклическими векторами в соответствии с терминологией, принятой, например, в [2] ( см., § 74 ). Их называют также присоединенными векторами оператора  $A$  в соответствии с терминологией, принятой, например, в [9] ( см., § 8

<sup>х)</sup> Мы воспользовались здесь  $m$ -мерными векторами  $\{\varphi_{\kappa}^{(0)}\}$  вместо введенных ранее векторов  $\{F_i\}$ , чтобы не заботиться формально о естественной нумерации векторов  $\{F_i\}$  в соответствии с данными выше пояснениями.

гл. 5 ). Как видим из  $(\bar{I}.I5)_2$ , они не являются собственными векторами матрицы  $A$ , отвечающими собственному значению  $\lambda_{\kappa}$ . Однако в совокупности  $\{\varphi_{\kappa}^{(0)}, \varphi_{\kappa}^{(1)}, \dots, \varphi_{\kappa}^{(n_{\kappa}-1)}\}_{\kappa=2}^{n_{\kappa}}$  с собственными вектором  $\varphi_{\kappa}^{(0)}$  образуют базис циклического подпространства

$$\Phi(\lambda_{\kappa}) = \{ \varphi \in \bar{R}_m, (A - \lambda_{\kappa} E)^{n_{\kappa}} \varphi = 0 \}, \quad \Phi(\lambda_{\kappa}) \subset \bar{R}_m.$$

Целые неотрицательные числа  $\{n_{\kappa}\}_{\kappa=1}^l$  называют при этом высотой ( см., например, § 74 [2] ) корневого, а  $\{n_{\kappa-1}\}_{\kappa=1}^l$  порядком присоединенного векторов ( см., например, § 8 гл. 5 [9] ). На самом деле, если воспользоваться определением (I.15), то получим

$$\begin{aligned} [(A - \lambda_{\kappa} E) \varphi_{\kappa}^{(0)} = \varphi_{\kappa}^{(1)}] &\rightarrow [(A - \lambda_{\kappa} E) [(A - \lambda_{\kappa} E) \varphi_{\kappa}^{(1)} = \varphi_{\kappa}^{(2)}] = \varphi_{\kappa}^{(0)}] \rightarrow \dots \\ &\rightarrow [(A - \lambda_{\kappa} E) \varphi_{\kappa}^{(n-1)} = \varphi_{\kappa}^{(0)}] \rightarrow \{(A - \lambda_{\kappa} E) \varphi_{\kappa}^{(n)}\}_{n=2}^{n_{\kappa}} = \varphi_{\kappa}^{(1)}, \end{aligned} \quad (I.16)$$

т.е. векторы  $\{(A - \lambda_{\kappa} E) \varphi_{\kappa}^{(n)}\}$  для всех  $1 \leq n \leq n_{\kappa}$  совпадают с собственными вектором  $\varphi_{\kappa}^{(0)}$ . Очевидно, что  $\varphi_{\kappa}^{(0)}$  - собственный вектор есть корневой вектор высоты единица, и все корневые векторы, соответствующие собственному значению  $\lambda_{\kappa}$ , имеют высоты, не превосходящие его алгебраической кратности. Из (I.16) следует, что  $(A - \lambda_{\kappa} E)^m \varphi_{\kappa}^{(m)} = 0$ , если  $m \geq n_{\kappa}$ , и в частности для  $m = n_{\kappa}$ .

Отметим, наконец, в заключение этого параграфа, что всё сказанное выше об операторе ( матрице )  $A$  общего вида справедливо и для матриц  $C$  (I.1).

## 2. Описание подпрограмм на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60)

для вычисления собственных значений и корневых векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида.

В настоящем параграфе приводится описание модифицированного ( в сравнении с [1] ) варианта системы программ для вычисления собственных значений и корневых векторов в случае  $C$  (I.1) произвольной структуры. При этом все собственные значения вещественных трехдиагональных матриц общего вида  $C$  (I.1) независимо от их структуры находятся подпрограммами  $DGI1, DGI2, DGI3, DGI4, DGI5, DIG1, DIG2, DIG3, DIG4, DIG5, DGBG$  и  $DLBL$  с использованием алгоритмов [3]. Отметим предварительно, что все описываемые ниже подпрограммы реализованы в арифметике с двойной точностью.

Подпрограмма  $DGI1$  вычисляет все собственные значения по алгоритму  $(2.2)+(2.3)$ ,  $DGI2 - (2.4)+(2.5)$ ,  $DGI3 - (2.9)+(2.10)$ ,  $DGI4 - (2.11)+(2.12)$ ,  $DGI5 - (2.6)+(2.8)$ ,  $DIG1 - (2.13)+(2.14)$ ,  $DIG2 - (2.15)+(2.16)$ ,  $DIG3 - (2.20)+(2.21)$ ,  $DIG4 - (2.22)+(2.23)$ ,  $DIG5 - (2.17)+(2.19)$ ,  $DGBG - (2.24)+(2.25)$  и  $DLBL - (2.26)+(2.27)$ , где использованы ссылки на формулы из [3].

Эти подпрограммы вычисляют все собственные значения, включая кратные (до 5 кратности в случае вещественных и до 2 кратности в случае комплексных собственных значений).

Замечание I. Такое ограничение на кратности не является следствием общей теории [3], а характерно лишь для описываемого варианта подпрограмм и будет снято нами позднее в более общих вариантах подпрограмм.

Подпрограммы DIM1 и DGAE1 вычисляют все собственные значения и все корневые векторы. Подпрограмма DIM1 используется только для вещественных трехдиагональных матриц с ненулевыми внедиагональными элементами, а DGAE1 - для любых вещественных трехдиагональных матриц.

В подпрограмме DIM1 реализован алгоритм (2.II)+(2.I2) [3] для вычисления всех собственных значений и использована подпрограмма DVEKTO [I] для вычисления корневых векторов. В подпрограмме DGAE1 использованы подпрограммы DGI4 и SVEKTO [I].

#### Обращение к подпрограммам

```
CALL DGI1(M, R, P, Q, IERR, NP)
CALL DGI2(M, R, P, Q, IERR, NP)
CALL DGI3(M, R, P, Q, IERR, NP)
CALL DGI4(M, R, P, Q, IERR, NP)
CALL DGI5(M, R, P, Q, IERR, A, B, NP)
CALL DIG1(M, R, P, Q, IERR, NP)
CALL DIG2(M, R, P, Q, IERR, NP)
CALL DIG3(M, R, P, Q, IERR, NP)
CALL DIG4(M, R, P, Q, IERR, NP)
CALL DIG5(M, R, P, Q, IERR, A, B, NP)
CALL DGBG(M, R, P, Q, IERR, A, NP)
CALL DLBL(M, R, P, Q, IERR, A, NP)
```

Здесь:

- $M$  - порядок заданной матрицы  $C(I, I)$ .  
 $P, R, Q$  - одномерные вещественные массивы размерности  $M$ , содержащие поддиагональные, наддиагональные и диагональные элементы заданной матрицы  $C(I, I)$  (при этом  $p(i) = 0 = R(i)$ ) соответственно на входе, а на выходе  $Q$  содержит вещественные части собственных значений и  $P$  - мнимые части, а  $R$  сохраняется.  
 $A, B, NP$  - одномерные соответственно вещественные и целый рабочие массивы размерности  $M$ .

**IERR** - целая переменная, служащая для сообщения об ошибках. Если на выходе  $IERR \neq 0$ , то вычисления неудовлетворительные (см. [I]).

```
CALL DIM1(M, P, R, Q, AL, BL, U, INDEX, V, C, MI, NI)
CALL DGAE1(M, P, R, Q, AL, BL, U, INDEX, V, NS, NP)
```

Здесь формальные переменные  $M, P, R, Q, AL, BL, U, INDEX, V, C, MI, NI, NS$  и  $NP$  имеют смысл такой же, как и в подпрограммах DVEKTO и SVEKTO [I].

Ниже приводится также описание двух подпрограмм<sup>xx)</sup> DIM2 и DGAE2, которые позволяют вычислять корневые векторы лишь для некоторых из собственных значений.

```
CALL DNIN(M, N1, N2, AL, BL, N)
CALL DIM2(M, N, N1, N2, P, R, Q, AL, BL, U, INDEX, V, C, MI, NI)
CALL DGAE2(M, N, N1, N2, P, R, Q, AL, BL, U, INDEX, V, NS, NP)
```

Здесь:

$N1, N2$  - целые числа, указывающие естественные порядковые номера соответственно первого и последнего из собственных значений в спектре  $\lambda = (\lambda_{N1}, \dots, \lambda_N)$ , для вычисления корневых векторов, соответствующих всем собственным значениям, номера которых принадлежат интервалу  $[N1, N2]$ .  $N1$  и  $N2$  задаются на входе.

Целая переменная<sup>xx)</sup>  $N$  задается на входе и имеет следующий смысл:

- A). Если  $[\lambda_{N1}$  - действительное или  $(\lambda_{N1} = \bar{\lambda}_{N1+1})$  - комплексные] и  $[\lambda_{N2}$  - действительное или  $(\lambda_{N2} = \bar{\lambda}_{N2})$  - комплексные], то  
 $N = N2 - N1 + 1$ .  
 B). Если  $\{[\lambda_{N1}$  - комплексное и  $\lambda_{N1+1}$  - действительное или  $(\lambda_{N1} \neq \bar{\lambda}_{N1+1})$  - комплексные] и  $[\lambda_{N2}$  - действительное или  $(\lambda_{N2} = \bar{\lambda}_{N2-1})$  - комплексные] или наоборот  $\{[\lambda_{N1}$  - действительное или  $(\lambda_{N1} = \bar{\lambda}_{N1+1})$  - комплексные] и  $[\lambda_{N2-1}$  - действительное и  $\lambda_{N2}$  - комплексное или  $(\lambda_{N2-1} \neq \bar{\lambda}_{N2})$  - комплексные]}, то  
 $N = N2 - N1 + 2$

- C). Если  $[\lambda_{N1}$  - комплексное и  $\lambda_{N1+1}$  - действительное или  $(\lambda_{N1} \neq \bar{\lambda}_{N1+1})$  - комплексные] и  $[\lambda_{N2}$  - действительное или  $(\lambda_{N2} = \bar{\lambda}_{N2-1})$  - комплексные] или наоборот  $\{[\lambda_{N1}$  - действительное и  $\lambda_{N1+1}$  - комплексное или  $(\lambda_{N1} = \bar{\lambda}_{N1+1})$  - комплексные] и  $[\lambda_{N2-1}$  - комплексное и  $\lambda_{N2}$  - действительное или  $(\lambda_{N2-1} \neq \bar{\lambda}_{N2})$  - комплексные]}, то  
 $N = N2 - N1 + 2$   
 х) При этом предполагается, что спектр матрицы предварительно вычислен без дополнительного упорядочения, т.е. с сохранением естественной нумерации собственных значений в спектре. Этому требованию (как правило) удовлетворяют стандартные программы LR и QR - алгоритмов и естественно новые (наши) подпрограммы.  
 xx) Замечание 2. Если пользователю по какой-либо причине затруднительно самому выполнить анализ A), B), C), D) для получения  $N$ , то перед обращением к подпрограммам DIM2 или DGAE2 он должен предварительно обратиться к подпрограмме DNIN<sup>xx)</sup>, вычисляющей  $N$  и в которой формальные переменные имеют такой же смысл, как и в подпрограммах DIM2 и DGAE2.

комплексные] и  $[\lambda_{m1}$  - действительное и  $\lambda_{m2}$  - комплексное или  $(\lambda_{m1} \neq \bar{\lambda}_{m2})$  - комплексные], то

$$N = N2 - N1 + 3$$

D). Если  $[N1=1$  и  $N2=M]$ , то

$$N = M$$

$U$  - двумерный вещественный массив размерности  $M \times N$ , содержащий в своих столбцах на выходе корневые векторы. Под каждый корневой вектор отведено, как и в **ВЕКТО** и **СВЕКТО** [I], по два подряд идущих столбца матрицы  $U$ , если  $\lambda$  - комплексное. При этом для сопряженного  $\bar{\lambda}$  собственный вектор  $U(\bar{\lambda})$  в массиве  $U$  не хранится, а вычисляется, как было указано в [I], пользователем. Если  $\lambda$  - действительное, то в  $U$  вектор  $U(\lambda)$  хранится в одном столбце. Кроме того, если  $\lambda_{m1}$  - комплексное, т.е.  $U(\lambda_{m1}) = \text{Re}[U(\lambda_{m1})] + i \text{Im}[U(\lambda_{m1})]$ , то  $U(\lambda) = \text{Re}[U(\lambda_{m1})]$  и  $U(\lambda) = \text{Im}[U(\lambda_{m1})]$ , а  $U(\lambda) = U(\lambda_{m1})$ , если  $\lambda_{m1}$  - действительное, где  $U(\lambda)$  и  $U(\lambda)$  - первый и второй столбцы  $U$ . Если  $\lambda_{m1}$  - комплексное, то  $U(\lambda) = \text{Re}[U(\lambda_{m1})]$  и  $U(\lambda) = \text{Im}[U(\lambda_{m1})]$ , если  $\lambda_{m1} \neq \bar{\lambda}_{m1}$ . А если  $\lambda_{m1} = \bar{\lambda}_{m1}$ , то  $U(\lambda_{m1})$  - не хранится. Здесь  $\bar{\lambda}$  - сопряженное собственное значение.

**INDEX** - одномерный целый массив размерности  $N$ , смысл которого одинаков с **INDEX** в **DIM1** или **DGAE1** [I]. Остальные формальные переменные  $M, P, R, Q, AL, BL, B, C, MI, NI, NS$  и  $KP$  имеют такой же смысл, как в подпрограммах **ВЕКТО** и **СВЕКТО** [I] или **DIM1** и **DGAE1**.

Ниже, в приложениях, нами представлены результаты вычислений для некоторых тестовых вещественных трехдиагональных матриц. В представленных таблицах помимо наших программ использованы **DHQR** и **DHQR2** - стандартные подпрограммы [I0]. Из них - **DHQR** вычисляет собственные значения а **DHQR2** - собственные значения и собственные векторы действительных матриц в верхней форме Хессенберга посредством **QR** - алгоритма, поскольку тестовые матрицы  $C(I, I)$  несимметрические.

Подпрограммы **DBSECT** и **DIMVIT** [I0] используют методы бисекций и обратных итераций для вычисления собственных значений и собственных векторов симметрических вещественных трехдиагональных матриц. Подпрограммы **DITQL1**, **DITQL2** [I0] вычисляют собственные значения и соответственно собственные значения и корневые векторы симметрической вещественной трехдиагональной матрицы на основе **QL** - алгоритма.

#### Комментарии к таблицам

Сверху в каждой из таблиц указываются элементы матрицы  $C(I, I)$ , её порядок  $m$  и вектор  $\lambda = (\dots)$  её точных собственных значений. В столбцах каждой из таблиц **I + 6** указываются: в первом - имя соответствующей подпрограммы, далее идут столбцы с реальной (сверху) и мни-

$C_1 = \{q: (4, 4, 4, 4); P: (1, 1, 2); \sigma: (0.5, -0.5, 1)\}; m=4, \lambda = (5, 5, 3, 3)$  Таблица I

	Собственные значения				AS	$t_a$	N
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$			
DG11	5.0	5.0	3.0	3.0	0.5773160 · 10 <sup>-14</sup>	0.00458	I9
DG12	3.0	3.0	3.0	3.0	0.5773160 · 10 <sup>-14</sup>	0.00461	I9
DG15	5.0	5.0	3.0	3.0	0.1021405 · 10 <sup>-13</sup>	0.00428	2I
DG13	5.0	3.0	3.0	3.0	0.5329071 · 10 <sup>-14</sup>	0.00415	20
DG14	5.0	5.0	3.0	3.0	0.5329071 · 10 <sup>-14</sup>	0.00404	20
DIG1	3.0	3.0	3.0	3.0	0.6217249 · 10 <sup>-14</sup>	0.00539	I9
DIG2	3.0	3.0	3.0	3.0	0.6217249 · 10 <sup>-14</sup>	0.00509	I9
DIG5	3.0	3.0	3.0	3.0	0.1199041 · 10 <sup>-15</sup>	0.00447	20
DIG3	3.0	3.0	3.0	3.0	0.6217249 · 10 <sup>-14</sup>	0.00429	I9
DIG4	3.0	3.0	3.0	3.0	0.6217249 · 10 <sup>-14</sup>	0.00412	I9
DGBG	5.0	5.0	3.0	3.0	0.5773160 · 10 <sup>-14</sup>	0.00652	I9
DLBL	3.0	3.0	3.0	3.0	0.2664583 · 10 <sup>-14</sup>	0.00615	I9
DHQR	3.00001184	4.99996814	2.99998616	0.0	0.7838175 · 10 <sup>-13</sup>	0.01765	

$C_2 = \{9: (2, 3, 2); P: (-I, -I); \tau: (I, -I)\}; m = 3, \lambda = (3, 2, 2)$

Таблица 2

	Собственные значения			IASI	$t_1$	$N$
	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$			
DGI1	3: 0:	2: 0:	2: 0:	0.7993606.10 <sup>-14</sup>	0.00360	20
DGI2	-	-	-	-	0.00384	20
DGI5	3: 0:	2: 0.10767.10 <sup>-6</sup>	2: -1.0767.10 <sup>-6</sup>	0.8437695.10 <sup>-14</sup>	0.00365	22
DGI3	3: 0:	2: 0:	2: 0:	0.7105427.10 <sup>-14</sup>	0.00334	21
DGI4	-	-	-	-	0.00336	21
DIG1	2: 0.36704918.10 <sup>-7</sup>	2: -3.6704918.10 <sup>-7</sup>	3: 0:	0.59952043.10 <sup>-14</sup>	0.00476	22
DIG2	-	-	-	-	0.00464	22
DIG5	2: 0.91796354.10 <sup>-8</sup>	2: -9.1796354.10 <sup>-8</sup>	3: 0:	0.66613381.10 <sup>-14</sup>	0.00368	23
DIG3	2: 0.13542141.10 <sup>-7</sup>	2: -1.3542141.10 <sup>-7</sup>	3:	0.59952043.10 <sup>-14</sup>	0.00368	22
DIG4	-	-	-	-	0.00388	22
DGBG	2: 0:	2: 0:	3: 0:	0.71054274.10 <sup>-14</sup>	0.00517	20
DLBL	2: 0.10538920.10 <sup>-6</sup>	2: -1.0538920.10 <sup>-6</sup>	3: 0:	0.68833828.10 <sup>-14</sup>	0.00572	22
DHGR	3: 0:	2: 0.19688.10 <sup>-5</sup>	2: -1.9688.10 <sup>-5</sup>	0.40190074.10 <sup>-13</sup>	0.00718	

$C_3 = \{9: (4, 4, 4, 4); P: (-0.5, -0.5, -I); \tau: (I, -I, 2)\}; m = 4, \lambda = (4+i, 4-i, 4+i, 4-i)$

Таблица 3

	Собственные значения				IASI	$t_1$	$N$
	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$	$\tilde{\lambda}_4$			
DGI1	4: -1:	4: -1:	4: -1:	4: -1:	0.1065814.10 <sup>-13</sup>	0.00592	28
DGI2	-	-	-	-	0.1065814.10 <sup>-13</sup>	0.00595	28
DGI5	-	-	-	-	0.1598721.10 <sup>-13</sup>	0.00571	32
DGI3	-	-	-	-	0.5329071.10 <sup>-14</sup>	0.00534	32
DGI4	-	-	-	-	0.5329071.10 <sup>-14</sup>	0.00525	32
DIG1	-	-	-	-	0.3552714.10 <sup>-14</sup>	0.00510	20
DIG2	-	-	-	-	0.3552714.10 <sup>-14</sup>	0.00506	20
DIG5	-	-	-	-	0.6217249.10 <sup>-14</sup>	0.00441	20
DIG3	-	-	-	-	0.1776357.10 <sup>-14</sup>	0.00458	20
DIG4	-	-	-	-	0.1776357.10 <sup>-14</sup>	0.00452	20
DGBG	-	-	-	-	0.1243449.10 <sup>-14</sup>	0.00859	28
DLBL	-	-	-	-	0.1154632.10 <sup>-14</sup>	0.00757	24
DHGR	4: 0.9999178	4: -1.0000822	4: 1.0000822	4: -1.0000822	0.6972201.10 <sup>-13</sup>	0.01656	



$\mathcal{C}_4 = \{q: (1, 2, 3); P: (1, -1); \mathcal{Z}: (-0.5, 0.5)\}; m=3, \lambda = (2, 2, 2)$

Таблица 4

	Собственные значения			IASI	$t_1$	M
	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$			
DGI1	2: 0:	2: 0:	-	0.7327472.10 <sup>-14</sup>	0.00390	2I
DGI2	-	-	-	-	0.00400	2I
DGI5	-	-	-	0.8659740.10 <sup>-14</sup>	0.00392	24
DGI3	-	-	-	0.7327472.10 <sup>-14</sup>	0.00363	24
DGI4	-	-	-	-	0.00377	24
DIG1	-	-	-	0.4662937.10 <sup>-14</sup>	0.00353	I5
DIG2	-	-	-	-	0.00361	I5
DIG5	-	-	-	0.5995204.10 <sup>-14</sup>	0.00305	I5
DIG3	-	-	-	0.4662937.10 <sup>-14</sup>	0.00321	I5
DIG4	-	-	-	-	0.00310	I5
DGBG	-	-	-	0.7327472.10 <sup>-14</sup>	0.00572	2I
DL8L	-	-	-	0.8659734.10 <sup>-14</sup>	0.00598	24
DHQR	2: 0.54939.10 <sup>-5</sup>	2: -.54939.10 <sup>-5</sup>	0:	0.3552714.10 <sup>-14</sup>	0.01068	

$\mathcal{C}_5 = \{q: (2, 4, 2, 4); P: (1, 2, 1); \mathcal{Z}: (1, -2, 1)\}; m=4, \lambda = (3, 3, 3, 3)$

Таблица 5

	Собственные значения				IASI	$t_1$	M
	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$	$\tilde{\lambda}_4$			
DGI1	3: 0:	3: 0:	3: 0:	3: 0:	0.1776357.10 <sup>-13</sup>	0.00373	28
DGI2	3: 0:	3: 0:	3: 0:	3: 0:	0.1776357.10 <sup>-13</sup>	0.00594	26
DGI5	3: 0:	3: 0:	3: 0:	3: 0:	0.1776357.10 <sup>-13</sup>	0.00565	32
DGI3	3: 0:	3: 0:	3: 0:	3: 0:	0.1865975.10 <sup>-13</sup>	0.00528	32
DGI4	3: 0:	3: 0:	3: 0:	3: 0:	0.1865975.10 <sup>-13</sup>	0.00523	32
DIG1	3: 0.16726512.10 <sup>-6</sup>	3: -.16726512.10 <sup>-6</sup>	3: 0.16726512.10 <sup>-6</sup>	3: -.16726512.10 <sup>-6</sup>	0.9769963.10 <sup>-14</sup>	0.00499	20
DIG2	3: 0.16726512.10 <sup>-6</sup>	3: -.16726512.10 <sup>-6</sup>	3: 0.16726512.10 <sup>-6</sup>	3: -.16726512.10 <sup>-6</sup>	0.9769963.10 <sup>-14</sup>	0.00504	20
DIG5	3: 0.16049042.10 <sup>-6</sup>	3: -.16049042.10 <sup>-6</sup>	3: 0.16049042.10 <sup>-6</sup>	3: -.16049042.10 <sup>-6</sup>	0.1154632.10 <sup>-13</sup>	0.00430	20
DIG3	3: 0.15769907.10 <sup>-6</sup>	3: -.15769907.10 <sup>-6</sup>	3: 0.15769907.10 <sup>-6</sup>	3: -.15769907.10 <sup>-6</sup>	0.8881784.10 <sup>-14</sup>	0.00450	20
DIG4	3: 0.15769907.10 <sup>-6</sup>	3: -.15769907.10 <sup>-6</sup>	3: 0.15769907.10 <sup>-6</sup>	3: -.15769907.10 <sup>-6</sup>	0.8881784.10 <sup>-14</sup>	0.00450	20
DGBG	3: 0.13160349.10 <sup>-6</sup>	3: -.13160349.10 <sup>-6</sup>	3: 0.13160349.10 <sup>-6</sup>	3: -.13160349.10 <sup>-6</sup>	0.1421085.10 <sup>-13</sup>	0.00853	28
DL8L	3: 0.91856927.10 <sup>-7</sup>	3: -.91856927.10 <sup>-7</sup>	3: 0.91856927.10 <sup>-7</sup>	3: -.91856927.10 <sup>-7</sup>	0.1154632.10 <sup>-13</sup>	0.00751	24
DHQR	3: 0.86967.10 <sup>-2</sup>	3: -.86967.10 <sup>-2</sup>	2: 2.9913	0: 0.0	0.3463896.10 <sup>-13</sup>	0.01674	

$C_7 = \{q: (2, 2, 2); P: (-1, 0, 5); z: (0, 5, -1)\}; m = 3, \lambda = (2+i, 2-i, 2)$

Таблица 6

	Собственные значения			AS	$t_n$	N
	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$			
DG11	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$	—	$0.2220446 \cdot 10^{-14}$	$0.00287$	IO
DG12	—	—	—	—	$0.00290$	IO
DG15	—	—	—	$0.2886580 \cdot 10^{-14}$	$0.00301$	I4
DG13	—	—	—	$0.15543122 \cdot 10^{-14}$	$0.00282$	I3
DG14	—	—	—	—	$0.00280$	I3
DIG1	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$	—	$0.2220446 \cdot 10^{-14}$	$0.00307$	IO
DIG2	—	—	—	—	—	—
DIG5	—	—	—	$0.2664535 \cdot 10^{-14}$	$0.00269$	II
DIG3	—	—	—	$0.1554312 \cdot 10^{-14}$	$0.00256$	IO
DIG4	—	—	—	—	$0.00266$	IO
DGEG	—	—	—	$0.2220446 \cdot 10^{-14}$	$0.00347$	IO
DLEL	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$	—	—	$0.1998401 \cdot 10^{-14}$	$0.00345$	IO
DHQR	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$	—	$0.2220446 \cdot 10^{-15}$	$0.00813$	

$$C_7 = \left\{ q_i = \begin{cases} 110 - 10 \cdot i, & 1 \leq i \leq 11 \\ 10 \cdot i - 110, & 12 \leq i \leq 21 \end{cases} \right\}; m = 21$$

Таблица 7

DHQR	-0.197092891034	9.900494253373	10.096595438598	19.999506574412	20.000496623252	29.999999172904	30.00000028492	39.999999999955	40.000000000000	49.999999999975	50.000000000000	59.99999993130	60.000000000000	69.99999960550	70.000493399329	80.00000821020	90.000493425588	100.099505746625	
	$\Delta S = 0.818545232 \cdot 10^{-11}$		$t_n = 0.11610031$																
DG14	100.099505746104	90.000493425949	80.000000827095	70.00000000689	60.000000000000	50.000000000000	40.000000000000	30.000000000000	20.000000000000	10.096595438598	9.900494253376	-0.197092891032	-0.197092891032	-0.197092891032	-0.197092891032	-0.197092891032	-0.197092891032	-0.197092891032	-0.197092891032
	$\Delta S = 0.22737368 \cdot 10^{-11}$		$t_n = 0.02559$		N = 72														
DMTQL1	-0.197092891034	9.900494253376	10.096595438598	19.999506574412	20.000496623253	29.999999172904	30.00000028492	39.999999999998	40.000000000003	49.999999999999	50.000000000000	59.99999993130	60.000000000000	69.99999960550	70.000493399329	80.00000821020	90.000493425588	100.099505746624	
	$\Delta S = 0.102318153949 \cdot 10^{-11}$		$t_n = 0.0353546$																
DBSECT	-0.197092891087	9.900494257566	10.096595440091	19.999506566342	20.000496620931	29.999999180624	30.000000211370	39.99999993130	49.99999990264	59.99999963416	69.99999960550	79.99999960550	89.99999960550	99.99999960550	109.99999960550	119.99999960550	129.99999960550	139.99999960550	149.99999960550
	$\Delta S = 0.234618255490 \cdot 10^{-6}$		$t_n = 0.0875702$																

Таблица 8

		C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>6</sub>
DIM1	ΔS	.53.10 <sup>-14</sup>	.71.10 <sup>-14</sup>	.53.10 <sup>-14</sup>	.73.10 <sup>-14</sup>	.19.10 <sup>-13</sup>	.16.10 <sup>-14</sup>
	Re(Δ)	.16.10 <sup>-14</sup>	.69.10 <sup>-13</sup>	.94.10 <sup>-12</sup>	.98.10 <sup>-14</sup>	.44.10 <sup>-14</sup>	.92.10 <sup>-14</sup>
	Im(Δ)	.73.10 <sup>-15</sup>	.0	.93.10 <sup>-12</sup>	.0	.0	.21.10 <sup>-14</sup>
	t <sub>λ</sub>	.00404	.00336	.00525	.00377	.00523	.00289
	t <sub>λ,u</sub>	.00542	.00467	.00638	.00468	.00678	.00386
DHQR2	ΔS	.78.10 <sup>-13</sup>	.41.10 <sup>-13</sup>	.70.10 <sup>-13</sup>	.36.10 <sup>-13</sup>	.35.10 <sup>-13</sup>	.22.10 <sup>-15</sup>
	Re(Δ)	.11.10 <sup>-4</sup>	.22.10 <sup>-9</sup>	.21.10 <sup>-8</sup>	.19.10 <sup>-3</sup>	.15.10 <sup>-2</sup>	.37.10 <sup>-14</sup>
	Im(Δ)	.0	.37.10 <sup>-7</sup>	.82.10 <sup>-5</sup>	.11.10 <sup>-8</sup>	.15.10 <sup>-8</sup>	.70.10 <sup>-14</sup>
	t <sub>λ</sub>	.01765	.00718	.01656	.01068	.01674	.00813
	t <sub>λ,u</sub>	.02212	.00909	.02087	.01341	.02063	.01001

Таблица 9

	M	N	ΔS	Δ	t <sub>λ</sub>	t <sub>u</sub>	t <sub>λ,u</sub>	
C <sub>8</sub> = $\begin{bmatrix} q_i = i; i=1, \dots, 6 \\ q_7 = 6 \\ q_j = j; j=8, \dots, 10 \\ p_k = 1; k=2, \dots, 10 \\ z_n = 0; n=2, \dots, 10 \end{bmatrix}$	10	DGAE1	1	0.0	0.35.10 <sup>-14</sup>		0.010	
		DHQR2 (DHQR)		0.16.10 <sup>-12</sup>	0.13.10 <sup>-9</sup>		0.041	
		DBSECT+						
		DIVUIT						
		DMTQL2 (DMTQL1)						
C <sub>9</sub> = $\begin{bmatrix} q_i = i; i=1, \dots, 6 \\ q_7 = 6 \\ q_j = j; j=8, \dots, 10 \\ p_k = 0; k=2, \dots, 10 \\ z_n = 1; n=2, \dots, 10 \end{bmatrix}$	10	DGAE1	1	0.0	0.35.10 <sup>-14</sup>		0.009	
		DHQR2 (DHQR)		0.0	0.10.10 <sup>-11</sup>		0.007	
		DBSECT+						
		DIVUIT						
		DMTQL2 (DMTQL1)						
C <sub>10</sub> = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \\ 0 & & & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$	100	DGAE1	309	0.98.10 <sup>-12</sup>	0.54.10 <sup>-11</sup>	3.383	1.192	1.575
		DHQR2 (DHQR)		0.15.10 <sup>-10</sup>	0.27.10 <sup>-9</sup>	11.14	19.32	30.96
		DBSECT+		0.21.10 <sup>-8</sup>	0.92.10 <sup>-8</sup>	2.617	4.765	7.402
		DIVUIT						
		DMTQL2 (DMTQL1)		0.10.10 <sup>-11</sup>	0.31.10 <sup>-9</sup>	0.880	10.23	11.11

Таблица 10

Программы (алгоритмы)	Число операций и вычитаний в каждой итерации	Число умно- жений в каж- дой итерации	Число дело- ний в каж- дой итерации	Общее число операций в каж- дой итерации
DG11	4m-2	5m-4	2(m-1)	11m-8
DO12	4m-2	4m-3	3(m-1)	11m-8
DG13	4m-1	2(m-1)	2(m-1)	8m-5
DG14	4m-2	2(m-1)	2(m-1)	8m-6
DG15	4m-1	m-1	m-1	6m-3
DIG1	4m-2	5m-4	2(m-1)	11m-8
DIG2	4m-2	4m-3	3(m-1)	11m-8
DIG3	4m-1	2(m-1)	2(m-1)	8m-5
DIG4	4m-2	2(m-1)	2(m-1)	8m-6
DIG5	4m-1	m-1	m-1	6m-3
DGBG	6m-4	4m-3	5m-3	16m-10
DLBL	6m-4	4m-3	5m-3	16m-10

В этой таблице помещен подсчет количества различных операций в новых ( описанных выше ) подпрограммах.

мой ( снизу ) частями соответствующих вычисленных  $\lambda$  – собственных значений.

Далее столбец  $\Delta S = |\sum_{i=1}^m \lambda_i - \sum_{i=1}^m q_i|$ . Затем идет столбец, указывающий время, затраченное на вычисление всех собственных значений. И наконец, в последнем столбце указано общее число итераций, затраченное на вычисление также всех  $\lambda$ .

В таблице 7 приводятся основные результаты счета по указанным в её первой колонке программам для тестовой матрицы, взятой из [11] ( см., § 7 гл. II.6 ), у которой имеются несколько близких, но не совпадающих собственных значений. При этом приводятся численные значения всех  $2l$  – вычисленных собственных значений, а  $t_{\lambda}$ ,  $\Delta S$  и  $N$  имеют такой же смысл, как и в таблицах I + 6. В таблицах 7+9 мы поместили из наших результатов только результаты счета по одной из новых подпрограмм, пос-

кольку все остальные наши подпрограммы дают приблизительно такие же результаты.

В таблице 8:  $\Delta = \max\{(\epsilon - \lambda_i \epsilon^2) U(\lambda_i)\}$  - невязка и  $\text{Re}(\Delta)$  - действительная, а  $\text{Im}(\Delta)$  - мнимая часть невязки,  $t_{\lambda, u}$  - полное время вычисления всех собственных значений и всех корневых векторов  $C_i \neq C_6$  - матриц из таблиц I + 6 а  $n, \Delta S$  и  $t_{\lambda}$  имеют тот же смысл, что и в таблицах I + 6.

В таблице 9, в дополнение к уже выполненным пояснениям, прибавляется столбец  $t_u$  - время вычисления всех корневых векторов. Во всех таблицах прочерк означает повторение результата предыдущей строки в этом столбце.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в работе описаны система новых эффективных подпрограмм для вычисления всех собственных значений, а также модифицированные варианты [II] подпрограмм для вычисления корневых векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. При этом (как следует из анализа таблиц) время, затрачиваемое на вычисление всех собственных значений, по любой из новых подпрограмм приблизительно в два раза лучше, чем по широко эксплуатируемым известным стандартным подпрограммам (при условии одинаковой в среднем точности вычислений). Из анализа таблиц 8 и 9 следует, что даже при малых порядках  $n$  матриц  $C(I, I)$  невязка и время вычисления корневых векторов по новым подпрограммам также лучше, чем по известным.

Авторы искренне признательны члену - корреспонденту АН СССР профессору Н. Н. Говоруну за интерес к настоящим исследованиям и предоставленную возможность работы над ними.

#### Литература

1. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-787, Дубна, 1988.
2. В. В. Воеводин. Линейная алгебра. М., Наука, 1980.
3. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-920, Дубна, 1988.
4. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-736, Дубна, 1988.
5. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-451, PII-88-452, PII-88-453, Дубна, 1988.
6. А. И. Кострикин. Введение в алгебру. М., Наука, 1977.
7. П. Ланкастер. Теория матриц. М., Наука, 1978.
8. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. Матрицы и вычисления. М., Наука, 1984.
9. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Линейная алгебра. М., Наука, 1978.
10. Р. Н. Федорова, А. И. Широкова. Библиотека программ на ФОРТРАНе. т. VI. Описания программ. Дубна. 1983.
11. Уилкинсон Райнш. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М., Машностроение, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел  
29 декабря 1988 года.

Емельяненко Г.А., Им Ён Сек

P11-88-921

О системе программ на фортране ЭВМ  
ES-1061(60) для вычисления собственных  
значений и корневых векторов вещественных  
трехдиагональных матриц общего вида  
произвольной структуры

Получены новые эффективные подпрограммы для вычисления собственных значений, а также корневых векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Вишгородовой

Emelyanenko G.A., Im Yen Sec

P11-88-921

On program System Written in ES-1061(60)  
Computer Fortran for Calculation  
of Eigenvalues and Radical Real Tridiagonal  
General Arbitrary Structure Matrix Vectors

Effective (unknown until) programs for eigenvalue calculation of real general arbitrary structure tridiagonal matrices and radical vectors of real general arbitrary structure tridiagonal matrices are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988