88-920

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-920

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек*

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛНОГО СПЕКТРА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ ОБЩЕГО ВИДА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

*Университет, Пхеньян, КНДР

1988

I. В В Е Д Е Н И Е

Настоящая работа посвящена обобщению результатов [I,2] вычисления полного спектра (в случае всех попарно различных собственных значений) квадратных вещественных трехдиагональных матриц размерности m общего вида

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \quad (\mathbb{C} - \lambda E)\,\mathcal{U}(\lambda) = 0, \qquad (I.I)$$

где элементы $\{q_1; p_k, r_k, q_k\}_{k=2}^{m} \in R$ - поле (= множество с заданными операциями над его элементами, см., например, § 8 [7]) вещественных чисел, на случай, когда в спектре $\mathbb{C}$ (I.I) имеются кратные и (или) комплексные собственные значения, т.е. $\mathbb{C}$ (I.I) имеет произвольную структуру (см., например, § 2 [9]).

При этом здесь во введении мы не приводим (в отличие от порядка изложения материала, принятого нами ранее в [I,2]), основные результаты, на которые опираемся ниже, по той причине, что они легко восстанавливаются из результатов настоящей работы.

2. Модификации методов [I] нахождения полного спектра вещественных трехдиагональных матриц

Ниже, воспользовавшись известной (см., например,[3÷5]) стратегией сдвигов

$$(\overset{(k)}{A} - \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k)}{L}\overset{(k)}{R} \rightarrow \overset{(k)}{R}\cdot\overset{(k)}{L} + \overset{(k)}{W}E = \overset{(k+1)}{A}, \qquad (2.I)$$

получим множества модифицированных$^{x)}$ ускоренных корректных алгоритмов для вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) как простой,так и произвольной структуры, у которых имеются не только вещественные,но и комплексные собственные значения.

Справедлива следующая

Теорема I. Пусть $\mathbb{C}$ (I.I)-вещественная трехдиагональная матрица общего вида простой структуры, которая имеет только вещественные собственные значения $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_m|$. Тогда имеют место следующие $\overline{\mathfrak{M}}[\Lambda,(W-d)]$, $\overline{\mathfrak{M}}[G,(W-d)]$ и $\overline{\mathfrak{M}}[(G,\Lambda),(W-d)]$ - множества из двенадцати

x) Полученные в теореме I методы являются модификациями соответствующих методов [I], поскольку в [I] была использована в отличие от (2.I) стратегия сдвигов

$$(\overset{(k)}{A} - \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k)}{L}\cdot\overset{(k)}{R} \rightarrow \overset{(k)}{R}\cdot\overset{(k)}{L} = \overset{(k+1)}{A}. \qquad (2.I)'$$

ускоренных корректных алгоритмов для вычисления её собственных значений[x)]

I°. $\overline{\mathfrak{M}}[\Lambda,(W-d)]$ – множество ускоренных алгоритмов.

I. ($\overline{\Lambda W d}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_i}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma_i} = \overset{(k)}{P_i}\cdot z_i/[(\overset{(k)}{q}_{i-1}-\overset{(k)}{W})(\overset{(k)}{q_i}-\overset{(k)}{W})]\ ;\ \overset{(k)}{\gamma_1} = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0;\ i = 2, 3, \cdots, m.\\
\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma_i}\cdot\overset{(k)}{\Lambda_i}{}^{-1}\ ;\ \overset{(k)}{\Lambda_1} = \overset{(k)}{\Lambda_2} = 1,\ i = 2, 3, \cdots, m.\\
\overset{(k)}{\lambda_i} = (\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W})\cdot\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m.\\
\overset{(k+1)}{P_i} = (\overset{(k)}{\lambda_i}/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{P_i}\ ;\ i = 2, 3, \ldots, m.\\
\overset{(k+1)}{q_i} = \begin{cases}\overset{(k)}{\lambda_i} + \overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}\ ; & i = 1, 2, \cdots, m-1.\\ \overset{(k)}{\lambda_m} + \overset{(k)}{W}\ ; & i = m.\end{cases}\\
\lambda_i = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q_i} - d\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m.
\end{array}\right\} \quad (2.2)$$

Если $|\overset{(k^*)}{P_{i^*}}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*+1)}{P_n} = 0,\ \overset{(k^*)}{\gamma_n} = 0,\ \overset{(k^*)}{\Lambda}_{n+1} = 1,\ \overset{(k^*)}{\lambda_n} = \overset{(k^*)}{q_n} - \overset{(k^*)}{W},\ \overset{(k^*+1)}{q_n} = \overset{(k^*)}{q_n}\right\}_{n=i^*}^{m} \text{для всех } k \geqslant k^*. \quad (2.3)$$

2. ($\overline{\tau_\wedge W d}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_i}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma_i} = \overset{(k)}{P_i} z_i/[(\overset{(k)}{q}_{i-1}-\overset{(k)}{W})(\overset{(k)}{q_i}-\overset{(k)}{W})]\ ;\ \overset{(k)}{\gamma_1} = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m.\\
\overset{(k)}{\tau_i} = \overset{(k)}{\gamma_i}/(1-\overset{(k)}{\tau_i})\ ;\ \overset{(k)}{\tau_1} = 0 = \overset{(k)}{\tau}_{m+1}\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m.\\
\overset{(k)}{\lambda_i} = (\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W})(1-\overset{(k)}{\tau_i})\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m.\\
\overset{(k+1)}{P_i} = (\overset{(k)}{\lambda_i}/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{P_i}\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m.\\
\overset{(k+1)}{q_i} = \begin{cases}\overset{(k)}{\lambda_i} + \overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}\ ; & i = 1, 2, \cdots, m-1\\ \overset{(k)}{\lambda_m} + \overset{(k)}{W}, & i = m\end{cases}\\
\lambda_i = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q_i} - d\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m
\end{array}\right\} \quad (2.4)$$

Если $|\overset{(k^*)}{P_{i^*}}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*)}{\tau_n} = 0,\ \overset{(k^*)}{\lambda_n} = \overset{(k^*)}{q_n} - \overset{(k^*)}{W},\ \overset{(k^*)}{P_n} = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q_n} = \overset{(k^*)}{q_n}\right\}_{n=i^*}^{m} \text{для всех } k \geqslant k^*, \quad (2.5)$$

3. ($T_\wedge W d$ –метод). Если $|\overset{(k+1)}{T_i}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k+1)}{q_i} = \overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{T_i} + \overset{(k)}{T}_{i+1}\ ;\ \overset{(k)}{T}_{m+1} = 0\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m\\
\overset{(k+1)}{T_i} = (\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T_i})\cdot\overset{(k)}{T_i}/(\overset{(k+1)}{q}_{i-1} - \overset{(k+1)}{W} - \overset{(k+1)}{T}_{i-1})\ ;\ \overset{(k+1)}{T_1} = 0\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m\\
\lambda_i = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q_i} - d\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m\ , \text{ где}
\end{array}\right\} \quad (2.6)$$

$$\overset{(1)}{T_i} = \overset{(1)}{P_i}\, z_i/(\overset{(1)}{q}_{i-1} - \overset{(1)}{T}_{i-1})\ ;\ \overset{(1)}{T_1} = 0\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m\ ;\ \overset{(1)}{W} = 0. \quad (2.7)$$

---

x) Во всех методах этой теоремы начальные сдвиги (=смещения) – d и итерационные – W выбираются таким же образом, как и в [I,2,IO]. При этом модификации соответствующих множеств $\mathfrak{M}$ [I] мы обозначили $\overline{\mathfrak{M}}$.

Если $|\overset{(k^*)}{T_{i^*}}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*+1)}{q_n} = \overset{(k^*)}{q_n},\ \overset{(k^*+1)}{T_n} = 0\right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k \geqslant k^* \quad (2.8)$$

4. ($\overline{(T-\lambda)_\wedge W d}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_i}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{T_i} = (\overset{(k)}{P_i} z_i)/(\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T}_{i-1})\ ;\ \overset{(k)}{T_1} = \overset{(k)}{T}_{m+1} = 0\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m\\
\overset{(k)}{\lambda_i} = \overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T_i}\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m\\
\overset{(k+1)}{P_i} = (\overset{(k)}{\lambda_i}/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{P_i}\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m\\
\overset{(k+1)}{q_i} = \begin{cases}\overset{(k)}{\lambda_i} + \overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}\ ; & i = 1, 2, \cdots, m-1\\ \overset{(k)}{\lambda_m} + \overset{(k)}{W}, & i = m\end{cases}\\
\lambda_i = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q_i} - d\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m
\end{array}\right\} \quad (2.9)$$

Если $|\overset{(k^*)}{P_{i^*}}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*)}{T_n} = 0,\ \overset{(k^*+1)}{P_n} = 0,\ \overset{(k^*)}{\lambda_n} = \overset{(k^*)}{q_n} - \overset{(k^*)}{W},\ \overset{(k^*+1)}{q_n} = \overset{(k^*)}{q_n}\right\}_{n=i^*}^{m} \text{для всех } k \geqslant k^*. \quad (2.10)$$

5. ($\overline{\lambda_\wedge W d}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_i}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\lambda_i} = (\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W}) - \overset{(k)}{P_i} z_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}\ ;\ \overset{(k)}{\lambda_1} = \overset{(k)}{q_1} - \overset{(k)}{W}\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m\\
\overset{(k+1)}{P_i} = (\overset{(k)}{\lambda_i}/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\ \overset{(k)}{P_i}\ ;\ i = 2, 3, \cdots, m\\
\overset{(k+1)}{q_i} = \begin{cases}\overset{(k)}{\lambda_i} + \overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}\ ; & i = 1, 2, \cdots, m\\ \overset{(k)}{\lambda_m} + \overset{(k)}{W}\ ; & i = m\end{cases}\\
\lambda_i = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q_i} - d\ ;\ i = 1, 2, \cdots, m
\end{array}\right\} \quad (2.11)$$

Если $|\overset{(k^*)}{P_{i^*}}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*)}{\lambda_n} = \overset{(k^*)}{q_n} - \overset{(k^*)}{W},\ \overset{(k^*+1)}{P_n} = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q_n} = \overset{(k^*)}{q_n}\right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k \geqslant k^*. \quad (2.12)$$

II°. $\overline{\mathfrak{M}}[G,(W-d)]$ – множество ускоренных алгоритмов.

I. ($\overline{GWd}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_j}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma_j} = \overset{(k)}{P_j} z_j/[(\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\widetilde{W}})(\overset{(k)}{q_j} - \overset{(k)}{\widetilde{W}})]\ ;\ \overset{(k)}{\gamma_1} = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0\ ;\ j = m, \cdots, 2\\
\overset{(k)}{G}_{j-1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma}_{j+1}\cdot\overset{(k)}{G_j}{}^{-1}\ ;\ \overset{(k)}{G_m} = \overset{(k)}{G}_{m-1} = 1\ ;\ j = m-1, \cdots, 1\\
\overset{(k)}{\widetilde{\lambda}_j} = (\overset{(k)}{q_j} - \overset{(k)}{\widetilde{W}})\cdot\overset{(k)}{G}_{j-1}\ ;\ j = m, m-1, \cdots, 1\\
\overset{(k+1)}{P_j} = (\overset{(k)}{\widetilde{\lambda}}_{j-1}/\overset{(k)}{\widetilde{\lambda}_j})\ \overset{(k)}{P_j}\ ;\ j = m, m-1, \cdots, 2\\
\overset{(k+1)}{q_j} = \begin{cases}\overset{(k)}{\widetilde{\lambda}_j} + \overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\widetilde{\lambda}}_{j-1}\ ; & j = m, m-1, \cdots, 2\\ \overset{(k)}{\widetilde{\lambda}_1} + \overset{(k)}{\widetilde{W}}\ ; & j = 1.\end{cases}\\
\widetilde{\lambda}_j = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q_j} - d\ ;\ j = m, m-1, \cdots, 1
\end{array}\right\} \quad (2.13)$$

Если $|\overset{(k^*)}{P_{j^*}}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{G}_{n-1}=1,\ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n=\overset{(k^*)}{q}_n-\overset{(k^*)}{\tilde W},\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{q}_n \right\}_{n=1}^{i^*} \quad \text{для всех } k \geq k^*. \tag{2.14}$$

2. ($\overline{T_G Wd}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_j}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma}_j=\overset{(k)}{P}_j z_j/[(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W})];\ \overset{(k)}{\gamma}_1=\overset{(k)}{\gamma}_{m+1}=0;\ j=m, m-1, \ldots, 2 \\
\overset{(k)}{S}_{j-1}=\overset{(k)}{\gamma}_j/(1-\overset{(k)}{S}_j);\ \overset{(k)}{S}_m=0=\overset{(k)}{S}_0;\ j=m, m-1, \cdots, 2 \\
\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j=(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W})(1-\overset{(k)}{S}_j);\ j=m, m-1, \cdots, 1 \\
\overset{(k+1)}{P}_j=(\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\cdot\overset{(k)}{P}_j;\ j=m, m-1, \ldots, 2 \\
\overset{(k+1)}{q}_j=\begin{cases}\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j+\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}; & j=m, m-1, \ldots, 2 \\ \overset{(k)}{\tilde\lambda}_1+\overset{(k)}{\tilde W}; & j=1\end{cases} \\
\tilde\lambda_j=\lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_j-d;\ j=m, m-1, \ldots, 1
\end{array}\right\} \tag{2.15}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k=k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{S}_{n-1}=0,\ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_{n-1}=\overset{(k^*)}{q}_{n-1}-\overset{(k^*)}{\tilde W},\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{q}_n \right\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех } k \geq k^* \tag{2.16}$$

3. ($\overline{T_G Wd}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{F_j}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k+1)}{q}_j=\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{F}_j+\overset{(k)}{F}_{j-1};\ \overset{(k)}{F}_0=\overset{(k)}{F}_m=0;\ j=m, m-1, \ldots, 1 \\
\overset{(k+1)}{F}_{j-1}=(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W}-\overset{(k)}{F}_{j-1})\overset{(k)}{F}_{j-1}/(\overset{(k+1)}{q}_j-\overset{(k+1)}{\tilde W}-\overset{(k+1)}{F}_j);\ \overset{(k+1)}{F}_m=\overset{(k+1)}{F}_0=0;\ j=m, m-1, \ldots, 2. \\
\tilde\lambda_j=\lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_j-d;\ j=m, m-1, \cdots, 1 \qquad \text{, где}
\end{array}\right\} \tag{2.17}$$

$$\overset{(1)}{F}_{j-1}=\overset{(1)}{P}_j z_j/(\overset{(1)}{q}_j-\overset{(1)}{F}_j);\ \overset{(1)}{F}_m=\overset{(1)}{F}_0=0;\ j=m, m-1, \ldots, 2;\ \overset{(1)}{\tilde W}=0 \tag{2.18}$$

Если $|\overset{(k^*)}{F}_{j^*}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k=k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*+1)}{F}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{q}_n \right\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех } k \geq k^*. \tag{2.19}$$

4. ($\overline{(T-\lambda)_G Wd}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_j}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{F}_{j-1}=\overset{(k)}{P}_j z_j/(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W}-\overset{(k)}{F}_j);\ \overset{(k)}{F}_m=\overset{(k)}{F}_0=0;\ j=m, m-1, \ldots, 2 \\
\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j=\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W}-\overset{(k)}{F}_j;\ j=m, m-1, \ldots, 1 \\
\overset{(k+1)}{P}_j=(\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\cdot\overset{(k)}{P}_j;\ j=m, m-1, \ldots, 2 \\
\overset{(k+1)}{q}_j=\begin{cases}\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j+\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}; & j=m, m-1, \ldots, 2 \\ \overset{(k)}{\tilde\lambda}_1+\overset{(k)}{\tilde W}; & j=1\end{cases} \\
\tilde\lambda_j=\lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_j-d;\ j=m, m-1, \ldots, 1
\end{array}\right\} \tag{2.20}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k=k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{F}_{n-1}=0,\ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_{n-1}=\overset{(k^*)}{q}_{n-1}-\overset{(k^*)}{\tilde W},\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{q}_n \right\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех } k \geq k^*. \tag{2.21}$$

5. ($\overline{\lambda_G Wd}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_j}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}=(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})-\overset{(k)}{P}_j z_j/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j;\ \overset{(k)}{\tilde\lambda}_m=\overset{(k)}{q}_m-\overset{(k)}{\tilde W};\ j=m, m-1, \ldots, 2 \\
\overset{(k+1)}{P}_j=(\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\cdot\overset{(k)}{P}_j;\ j=m, m-1, \cdots, 2. \\
\overset{(k+1)}{q}_j=\begin{cases}\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j+\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}; & j=m, m-1, \ldots, 2 \\ \overset{(k)}{\tilde\lambda}_1+\overset{(k)}{\tilde W}, & j=1\end{cases} \\
\tilde\lambda_j=\lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_j-d;\ j=m, m-1, \ldots, 1
\end{array}\right\} \tag{2.22}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k=k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_{n-1}=\overset{(k^*)}{q}_{n-1}-\overset{(k^*)}{\tilde W},\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{q}_n \right\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех } k \geq k^*. \tag{2.23}$$

III°. $\overline{\mathfrak{M}}[(G,\Lambda),(W-d)]$ – множество ускоренных алгоритмов.

I. ($\overline{[GB(G)], Wd}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_i}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma}_i=\overset{(k)}{P}_i z_i/[(\overset{(k)}{q}_i-\overset{(k)}{W})(\overset{(k)}{q}_{i-1}-\overset{(k)}{W})];\ \overset{(k)}{\gamma}_1=\overset{(k)}{\gamma}_{m+1}=0;\ i=2, 3, \cdots, m \\
\overset{(k)}{G}_{j-1}=1-\overset{(k)}{\gamma}_{j+1}\overset{(k)}{G}{}_j^{-1};\ \overset{(k)}{G}_m=\overset{(k)}{G}_{m-1}=1;\ j=m-1, m-2, \ldots, 1 \\
\overset{(k)}{\tilde B}_{ii}(G)=[1+(1-\overset{(k)}{G}_{i-2})\cdot\overset{(k)}{\tilde B}_{i-1,i-1}(G)]\cdot\overset{(k)}{G}{}_{i-1}^{-1};\ \overset{(k)}{\tilde B}_{11}=\overset{(k)}{G}{}_0^{-1};\ i=2, 3, \ldots, m \\
\overset{(k)}{\lambda}_i=(\overset{(k)}{q}_i-\overset{(k)}{W})[1-\overset{(k)}{G}_{i-1}+\overset{(k)}{\tilde B}{}_{ii}^{-1}(G)];\ i=1, 2, \ldots, m \\
\overset{(k+1)}{P}_i=(\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\overset{(k)}{P}_i;\ i=2, 3, \cdots, m \\
\overset{(k+1)}{q}_i=\begin{cases}\overset{(k)}{\lambda}_i+\overset{(k)}{q}_{i+1}-\overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; & i=1, 2, \ldots, m-1 \\ \overset{(k)}{\lambda}_m+\overset{(k)}{W}; & i=m\end{cases} \\
\lambda_i=\lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_i-d;\ i=1, 2, \ldots, m
\end{array}\right\} \tag{2.24}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k=k^*$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\tilde B}_{nn}(G)=1,\ \overset{(k^*)}{\lambda}_n=(\overset{(k^*)}{q}_n-\overset{(k^*)}{W}),\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{q}_n \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k \geq k^*. \tag{2.25}$$

2. ($\overline{[\Lambda B(\Lambda)], Wd}$ – метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_j}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma}_j=\overset{(k)}{P}_j z_j/[(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W})];\ \overset{(k)}{\gamma}_1=\overset{(k)}{\gamma}_{m+1}=0;\ j=m, m-1, \ldots, 2 \\
\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}=1-\overset{(k)}{\gamma}_i\overset{(k)}{\Lambda}{}_i^{-1};\ \overset{(k)}{\Lambda}_1=\overset{(k)}{\Lambda}_2=1;\ i=2, 3, \cdots, m \\
\overset{(k)}{\tilde B}_{jj}(\Lambda)=[1+(1-\overset{(k)}{\Lambda}_{j+2})\overset{(k)}{\tilde B}_{j+1,j+1}(\Lambda)]\cdot\overset{(k)}{\Lambda}{}_{j+1}^{-1};\ \overset{(k)}{\tilde B}_{mm}=\overset{(k)}{\Lambda}{}_{m+1}^{-1};\ j=m-1, \ldots, 1 \\
\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j=(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W})[1-\overset{(k)}{\Lambda}_{j+1}+\overset{(k)}{\tilde B}{}_{jj}^{-1}(\Lambda)];\ j=m, m-1, \ldots, 1 \\
\overset{(k+1)}{P}_j=(\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\overset{(k)}{P}_j;\ j=m, m-1, \cdots, 2 \\
\overset{(k+1)}{q}_j=\begin{cases}\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j+\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}; & j=m, m-1, \ldots, 2 \\ \overset{(k)}{\tilde\lambda}_1+\overset{(k)}{\tilde W}; & j=1\end{cases} \\
\tilde\lambda_j=\lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_j-d;\ j=m, m-1, \ldots, 1
\end{array}\right\} \tag{2.26}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P_{i^*}}| \leq \mathcal{E}$ в любой итерации $K=K^*\geq 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\hat{B}}_{ss}(\lambda)=1,\ \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_n=\overset{(k)}{q}_n-\overset{(k)}{\tilde{W}},\ \overset{(k)}{P}_n=0,\ \overset{(k+1)}{q}_n=\overset{(k)}{q}_n \right\}_{n=1}^{i^*} \quad \text{для всех } K\geq K^*. \qquad (2.27)$$

Доказательство теоремы I формально совпадает с доказательством соответствующих методов в [I], если воспользоваться приёмом доказательства теоремы I [6] и теорем I и 2 в [2], а также стратегией сдвигов (2.I) вместо (2.I)*. С целью экономии места мы не будем его поэтому повторять полностью, а только приведем без доказательства лишь некоторые из результатов, которыми необходимо воспользоваться при доказательстве настоящей теоремы. Эти основные сведения мы сформулируем в виде лемм, доказательство которых также аналогично доказательству соответствующих результатов в [I].

Лемма I. В алгоритмах (2.2)÷(2.27) имеют место следующие предельные соотношения при $n\to\infty$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(\overset{(n)}{q}_j-\overset{(n)}{\tilde{W}}_j)=0 \quad (\text{ или } \lim_{n\to\infty}(\overset{(n)}{q}_j-\overset{(n)}{\tilde{W}}_j)=0\ ),\\ &\lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{q}_{i-1}=\lambda_{i-1}+d \quad (\text{ или } \lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{q}_{i-1}=\tilde{\lambda}_{i-1}+d\\ &\text{при использовании } \tilde{W}_j\ ),\ \lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{\Lambda}_{i+1}=1\ (\text{ или } \lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{G}_{i-1}=1\ ),\\ &\lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{\tau}_i=0\ (\text{ или } \lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{S}_i=0\ ),\ \lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{T}_i=0 \quad (\text{ или } \lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{F}_i=0\ ). \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

Лемма 2. Пусть собственные значения матрицы $\overset{\omega}{\mathbb{C}}=(\mathbb{C}+dE)$ удовлетворяют условиям

$$|\lambda_1(d)|>|\lambda_2(d)|>\cdots>|\lambda_m(d)|>0 \quad (\text{ или } 0<|\tilde{\lambda}_1(d)|<\cdots<|\tilde{\lambda}_m(d)|\,). \qquad (2.29)$$

Тогда если для любого $j=2,3,\cdots,m$ и любого $K=1,2,\cdots$ выбирать итерационные ускоряющие коэффициенты $\overset{(k)}{W}_j$ ($\overset{(k)}{\tilde{W}}_j$) в виде (3.2) [I] в методах $\overline{\Lambda Wd}$, $\overline{Z_\Lambda Wd}$, $\overline{(T-\lambda)_\Lambda Wd}$, $\overline{\lambda_\Lambda Wd}$ и $\overline{[GB(G)],Wd}$ и (3.I5) [I] в методе $\overline{T_\Lambda Wd}$, а также (3.3) [I] в методах $\overline{GWd}$, $\overline{Z_G Wd}$, $\overline{(T-\lambda)_G Wd}$, $\overline{\lambda_G Wd}$ и $\overline{[\Lambda B(\Lambda)],Wd}$ и (3.2I)* [I] в методе $\overline{T_G Wd}$, то для множества приведенных выше методов имеют место асимптотические равенства (т.е. ускорение сходимости)

$$\left\{\frac{\overset{(k)}{P}_j(\overset{(k-1)}{W}_j)}{\overset{(k)}{P}_j}\right\}_{j=2}^{m} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0,\quad \left\{\frac{\overset{(k)}{P}_j(\overset{(k-1)}{\tilde{W}}_j)}{\overset{(k)}{P}_j}\right\}_{j=2}^{m} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0. \qquad (2.30)$$

Доказательство этих асимптотик (например, для $\overline{\Lambda Wd}$ - метода) нетрудно выполнить, если учесть соотношение

$$\overset{(k+1)}{P}_j(\overset{(k)}{W}_j)=\prod_{n=1}^{K}\left[\frac{(\overset{(n)}{q}_i-\overset{(n)}{W}_i)}{\overset{(n)}{q}_{i-1}}\cdot(1-\overset{(n)}{\Lambda}_{i+1}(W)\cdot\overset{(n)}{\Lambda}_{i+1}(W))\right]\cdot\overset{(1)}{P}_j \qquad (2.31)$$

получаемое из $(2.2)_{I)}\div(2.2)_{3)}$, и (2.28).

Замечание I. Напомним, что если матрица $\overset{\omega}{\mathbb{C}}$ (I.I) имеет кратные собственные значения (т.е. $\lambda_s=\lambda_{s-1}$) или комплексные (т.е. $\lambda_s=\lambda^*_{s-1}$), то

элемент $\overset{(k)}{P}_s$ не стремится к нулю при $K\to\infty$, но собственные значения матричных блоков порядка 2, т.е. $\begin{bmatrix}\overset{\omega}{q}_{s-1} & \overset{\omega}{z}_s\\ \overset{\omega}{P}_s & \overset{\omega}{q}_s\end{bmatrix}$ стремятся при $K\to\infty$ соответственно к собственным значениям $\lambda_s(d)$ и $\lambda_s(d)$ матрицы $\mathbb{C}$ (I.I).

Если учесть замечание I, то перечисленные выше методы могут быть использованы для вычисления всех собственных значений, включая кратные и комплексные, для вещественных трехдиагональных матриц $\mathbb{C}$(I.I) общего вида. На самом деле. Пусть заданная матрица $\mathbb{C}$ (I.I) имеет кратное комплексное собственное значение $\lambda=a+ib$ и его кратность равна n. Тогда по основной теореме алгебры (см., например, § 68 [7]) ему сопряженное комплексное число $\lambda^*=a-ib$ также собственное значение кратности n матрицы $\overset{\omega}{\mathbb{C}}$ (I.I). Если комплексное кратное собственное значение - λ_i, $i=1,2,\cdots,n$ (т.е. $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda^*_{n+1}=\cdots=\lambda^*_{2n}$), то поддиагональные элементы $\overset{(k)}{P}_i$, $i=2,3,\cdots,2n$ не стремятся к нулю при $K\to\infty$, но собственные значения подматрицы $\overset{\omega}{\mathbb{C}}_{2n}$ стремятся к кратным собственным значениям λ_i матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). Если уравнение $\lambda^2+2B\lambda+F=0$ имеет комплексные корни $\lambda=a\pm i\cdot b$, то $(\lambda^2+2B\lambda+F)^n$ есть характеристический многочлен (под)матрицы $\overset{(k)}{\mathbb{C}}_{2n}$. Тогда справедлив следующий результат.

Лемма 3. Дискриминант $V=B^2-F$ уравнения $\lambda^2+2B\lambda+F=0$ не зависит от сдвига d.

Доказательство. Характеристический многочлен матрицы $\overset{(k)}{\mathbb{C}}_{2n}$ может быть получен следующим образом:

$$D_{2n}(\lambda)=\lambda^{2n}-\sum_{i=1}^{2n}b_i\cdot\lambda^{2n-1}+[b_1\cdot b_2+(b_1+b_2)\,b_3+\cdots+(b_1+b_2+\cdots+b_{i-1})\,b_i+\cdots$$
$$+(b_1+b_2+\cdots+b_{2n-1})\,b_{2n}-\sum_{i=2}^{2n}C_{i-1}\,a_i\,]\,\lambda^{2(n-1)}+Q^{(\lambda)}_{2n-3}, \qquad (2.32)$$

если использовать следующее рекуррентное соотношение [8]

$$D_n(\lambda)=(b_n-\lambda)\,D_{n-1}(\lambda)-a_n\,C_{n-1}\,D_{n-2}(\lambda),\quad n=2,3,\cdots, \text{ где} \qquad (2.33)$$

$$D_0(\lambda)=1,\quad D_1(\lambda)=(b_1-\lambda),$$

$$D_n(\lambda)=\begin{vmatrix}(b_1-\lambda) & C_1 & & & \\ a_2 & (b_2-\lambda) & C_2 & & \\ & - & - & - & \\ & & a_{n-1} & (b_{n-1}-\lambda) & C_{n-1}\\ & & & a_n & (b_n-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

для верхних главных угловых миноров. С другой стороны,

$$(\lambda^2+2B\lambda+F)^n=\lambda^{2n}+2\cdot n\cdot B\cdot\lambda^{2n-1}+n\cdot[(n-1)\cdot 2\cdot B^2+F]\,\lambda^{2(n-1)}+Q^{(\lambda)}_{2n-3}. \qquad (2.34)$$

Из (2.32) и (2.34) получаем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ

$$\left.\begin{aligned} &2\cdot n\cdot B=-\sum_{i=1}^{n}b_i,\\ &2\cdot n\cdot(n-1)\cdot B^2+n\,F=[b_1b_2+(b_1+b_2)\cdot b_3+\cdots+(b_1+\cdots+b_{2n-1})\,b_{2n}]-\sum_{i=2}^{2n}C_{i-1}a_i \end{aligned}\right\} \qquad (2.35)$$

и учитывая $D_{2n}(\lambda)=(\lambda^2+2B\lambda+F)^n$. Из (2.35) получаем

$$
\left.\begin{aligned}
B &= \frac{-\sum_{i=1}^{2n} b_i}{2n} \\
F &= \frac{[b_1 b_2 + (b_1+b_2)b_3 + \cdots + (b_1+\cdots+b_{2n-1})b_{2n}] - \sum_{i=2}^{2n} C_{i-1} a_i}{n} - 2(n-1)B^2
\end{aligned}\right\} . \tag{2.36}
$$

Откуда <u>для дискриминанта</u> V получаем следующее соотношение

$$
V = B^2 - F = (1/4n^2)\{[(b_1-b_2)^2 + (b_1-b_3)^2 + \cdots + (b_1-b_{2n})^2] + [(b_2-b_3)^2 + \cdots + (b_2-b_{2n})^2] + \cdots + [(b_{2n-1}-b_{2n})^2]\} + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{2n} C_{i-1} a_i . \tag{2.37}
$$

Если учесть теперь, что $(b_k-d)-(b_{k+1}-d) = b_k - b_{k+1}$, то лемма доказана.

<u>Теорема 2</u>. Пусть у матрицы $\mathbb{C}$(I.I) имеется кратное вещественное либо коплексное собственное значение λ . Тогда если итерационная матрица $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$ (I.I),(2.I) при указанных в лемме 2 способах выбора ускоряющих итерационных коэффициентов $\overset{(k)}{W}$ ($\overset{(\infty)}{\tilde{W}}$) в соответствующих, приведенных в теореме I, методах стремится при $k\to\infty$ к виду

$$
\overset{(\infty)}{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & \tau_2 & & & & & & \\
& \lambda_2 & \tau_3 & & & & & \\
& & --- & & & & & \\
& & \lambda_i & \tau_{i+1} & & & & \\
& & & \tilde{\mathbb{C}}_n & \tau_{i+n+1} & & & \\
& & & & \lambda_{i+n+1} & \tau_{i+n+2} & & \\
& & & & & --- & & \\
& & & & & \lambda_{m-1} & \tau_m & \\
& & & & & & \lambda_m &
\end{bmatrix} , \text{ где} \tag{2.38}
$$

$\tilde{\mathbb{C}}_n \begin{bmatrix} q_1' & \tau_2' & & \\ p_2' & q_2' & \tau_3' & \\ & --- & & \\ & p_{n-1}' & q_{n-1}' & \tau_n' \\ & & p_n' & q_n' \end{bmatrix}$ – вещественная трехдиагональная[x)] (под)матрица размерности n ($1 < n < m$), то

имеют место следующие утверждения:

I. Равенство $n = 2s+1$, где $s = 1, 2, \cdots$ (т.е. нечетность порядка матрицы $\tilde{\mathbb{C}}_n$) является <u>достаточным</u> условием для того, чтобы $\tilde{\mathbb{C}}_n$ (а вместе с ней и исходная матрица $\mathbb{C}$(I.I)) имела бы n – кратное вещественное собственное значение

$$
\lambda = \frac{1}{n}\Big[\sum_{i=1}^{n} q_i' = Sp(\tilde{\mathbb{C}}_n)\Big] . \tag{2.39}
$$

2. Равенство $n = 2s$, где $s = 1, 2, \cdots$ (т.е. четность порядка матрицы $\tilde{\mathbb{C}}_n$) и $J < 0$, является необходимым и достаточным условиями для s – кратного комплексного

---

x) Для упрощения дальнейщего анализа мы ввели следующие переобозначения элементов трехдиагональной матрицы $\tilde{\mathbb{C}}_n$:

$$
\Big\{ p_k' = \overset{(\infty)}{p}_{k+i},\ \tau_k' = \tau_{k+i} \Big\}_{k=1}^{n} , \quad \Big\{ q_k' = \overset{(\infty)}{q}_{k+i} \Big\}_{k=1}^{n} .
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda &= (a \pm i\cdot b), \text{ где} \\
a &= (1/2s)\cdot\sum_{i=1}^{2s} q_i' ,\ b = \sqrt{|\tilde{V}|}
\end{aligned}\right\} \tag{2.40}
$$

собственного значения λ , а $n = 2s$ и $J = 0$ достаточными условиями для $2s$ – кратного действительного

$$
\lambda = (1/2s)\cdot\Big[\sum_{i=1}^{2s} q_i' = Sp(\tilde{\mathbb{C}}_n)\Big] \tag{2.4I}
$$

собственного значения матрицы $\tilde{\mathbb{C}}_n$ (то же самое матрицы $\mathbb{C}$ (I.I)). Здесь

$$
\begin{aligned}
J = \{[(4s^2)\cdot\tilde{V}] = (4s^2)(\tilde{B}^2 - \tilde{F})\} = \\
= \{[(q_1'-q_2')^2 + \cdots + (q_1'-q_n')^2] + [(q_2'-q_3')^2 + \cdots + (q_2'-q_n')^2] + \cdots \\
+ [(q_{n-1}'-q_n')^2] + (4s)\cdot\sum_{i=2}^{2s} \tau_i' p_i' \} \quad , \text{ где}
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

$\tilde{V}$ – дискриминант характеристического многочлена – ($\lambda^2 + 2\tilde{B}\lambda + \tilde{F}$)^s матрицы $\tilde{\mathbb{C}}_n$.

<u>Доказательство</u>. Появление трехдиагональных (под)матриц $\tilde{\mathbb{C}}_n$ в итерационных матрицах $\{\overset{(1)}{\mathbb{C}} = \mathbb{C}, \overset{(2)}{\mathbb{C}}, \cdots, \overset{(k)}{\mathbb{C}}, \cdots\}$ в любом из приведенных выше методов является очевидно (как и в любых других методах, см., например, § 2, II гл. 8 [II]) следствием наличия в спектре матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) либо n – кратного вещественного, либо ($S = n/2$) – кратного комплексного собственного значения λ , поскольку $\overset{(k)}{W}(\overset{(\infty)}{W})$ – сдвиги всегда в нашем случае вещественны. Другими словами, $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}} = T\overset{(1)}{\mathbb{C}}T^{-1}$, где T – вещественная матрица во всех наших методах. В соответствии с условием теоремы у такой (под)матрицы $\tilde{\mathbb{C}}_n$ имеется лишь одно собственное значение λ . Если λ – комплексное, то характеристическое уравнение $det(\tilde{\mathbb{C}}_n - \lambda E) = 0$ имеет и $\bar{\lambda}$ – сопряженный корень. Следовательно, n должно быть кратно 2, т.е. $n = 2\cdot s$. И соответственно, если $n = 2s$ и $J < 0$, то имеем (2.40), а если $n = 2\cdot s$ и $J = 0$, то имеем (2.4I). Отметим, однако, что $J > 0$ не может быть, поскольку у $\tilde{\mathbb{C}}_n$ имелись бы различные собственные значения, что противоречило бы условию теоремы. В случае нечетного n, λ не может быть комплексным, и, следовательно, имеем (2.39).

<u>Замечание 2</u>. Если у исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) ни один из внедиагональных элементов $\{p_k \neq 0,\ \tau_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$ – не равен нулю, то появление нескольких матриц типа $\tilde{\mathbb{C}}_n$ будет свидетельствовать (см., например, § 8, IIгл. 8 [II]) о наличии в спектре $\mathbb{C}$ (I.I) нескольких кратных вещественных либо комплексных собственных значений. Поэтому теорема 2 без труда переформулируется и на этот случай. Если некоторые из внедиагональных элементов исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) равны нулю, то имеет место следующий результат.

<u>Лемма 4</u>. Пусть матрица $\mathbb{C}$ (I.I) имеет вид

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1 & r_{K_1} & & & \\ p_{K_1} & \mathbb{C}_2 & r_{K_2} & & \\ & & - - - - & & \\ & & p_{K_{n-2}} & \mathbb{C}_{n-1} & r_{K_{n-1}} \\ & & & p_{K_{n-1}} & \mathbb{C}_n \end{bmatrix} \qquad (2.43)$$

, где $\{ [r_{K_i}=0$ и $p_{K_i}\neq 0]$, либо $[r_{K_i}\neq 0$ и $p_{K_i}=0]$, либо $[r_{K_i}=0=p_{K_i}]\}$ для некоторых K_i при i из $1 \leq i \leq n-1$, а также $\mathbb{C}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ – трехдиагональные (под)матрицы исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), у которых ни один из внедиагональных элементов не равен нулю.

Тогда вычисление полного спектра матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) сводится (по сути !) к вычислению полных спектров всех матриц $\mathbb{C}_i$, $i=1,2,\cdots,n$ с учетом того обстоятельства, что в каждом из методов теоремы I последовательности, эквивалентные последовательностям $\{\Lambda\}$ в $\overline{\Lambda W d}$ – методе (2.2)÷(2.3) и соответственно $\{G\}$ в $\overline{GWd}$ – методе (2.I3)÷(2.I4), становятся (как и сами эти последовательности $\{\Lambda\}$, $\{G\}$) циклическими из-за циклического переноса своих начальных условий. При этом не происходит в общем случае общего упорядочения элементов спектра матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) в виде

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_m| \quad (\text{либо соответственно } |\tilde{\lambda}_1| \leq |\tilde{\lambda}_2| \leq \cdots \leq |\tilde{\lambda}_m|), \qquad (2.44)$$

но в каждом из интервалов $[1, K_1]$, $[K_1+1, K_2]$, $\cdots$, $[K_{n-1}+1, K_n]$ номеров j собственных значений λ_j такое упорядочение осуществляется.

<u>Доказательство</u>. Пусть матрица $\mathbb{C}$ (I.I) имеет, например, вид

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - - & - & \\ & & p_{s-1} & q_{s-1} \end{bmatrix} \equiv \mathbb{C}_1 & \mathbf{0} \\ \quad r_s & \\ p_s & \\ \mathbf{0} & \mathbb{C}_2 \equiv \begin{bmatrix} q_s & r_{s+1} & & \\ & - - - & & \\ & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad (2.45)$$

, где $r_s \neq 0$ ($p_s = 0$) или $p_s \neq 0$ ($r_s = 0$). Тогда из (2.2)÷(2.3) имеем, что

$$\overset{(K)}{\gamma}_s = 0, \quad \overset{(K)}{\Lambda}_{s+1} = 1, \quad \overset{(K)}{\lambda}_s = \overset{(K)}{q}_s - \overset{(K)}{W}, \qquad (2.46)$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{(K+1)}{q}_{s-1} &= \overset{(K)}{\lambda}_{s-1} + \overset{(K)}{W} \\ \overset{(K+1)}{q}_s &= \overset{(K)}{\lambda}_s + \overset{(K)}{q}_{s+1} - \overset{(K)}{\lambda}_{s+1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.47)$$

Таким образом, условия $\{[r_s \neq 0 \ (p_s = 0) \ (\text{или } p_s \neq 0 \ (r_s = 0))] \rightarrow \overset{(K)}{\Lambda}_{s+1} = 1\}$ как бы диктуют повторение исходного начального условия для последовательности $\{\Lambda\}$.

В результате в соответствии с методом (2.2)÷(2.3) (а как следствие и во всех других наших методах) процедуры вычисления собственных значений матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) формально при любом K свелись к вычислению

собственных значений как бы независимых (с точностью до условия $\overset{(K)}{\Lambda}_{s+1} = 1$) матриц $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$. Такие рассуждения легко повторяются и при нескольких нулевых внедиагональных элементах.

Очевидно, что в соответствии с требованием упорядоченности (2.44) спектра $\mathbb{C}$ (I.I), использованным при доказательстве результатов [6,2, I] и, естественно, теоремы I в этой работе, такая упорядоченность будет соблюдаться лишь для каждой матрицы $\mathbb{C}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, но может нарушаться для $\mathbb{C}$ (I.I) при таком способе вычислений. Лемма доказана.

3. Приложение

В настоящем параграфе приводятся некоторые оригинальные результаты для анализа проблемы кратных собственных значений вещественных трехдиагональных матриц $\mathbb{C}$ (I.I) только в случае $m=4$ и $m=3$.

<u>Лемма 5</u>. Пусть размерность матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) равна $m=4$ и пусть A , E , F , Z_1^2 , B , Z , Z_2 следующие функции от элементов исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I)

$$\left.\begin{aligned} A &= [-\sum_{i=1}^{4} q_i = -Sp(\mathbb{C})], \\ E &= [(q_1 q_2) + (q_1 + q_2)(q_3 + q_4) + q_3 q_4 - \sum_{i=2}^{4} p_i r_i] \\ F &= [(q_1 + q_4)(p_3 r_3) - (q_3 + q_4)(q_1 q_2 - r_2 p_2) + (q_1 + q_2)(p_4 r_4 - q_3 q_4)] \\ Z_1^2 &= [(q_1 q_2 - r_2 p_2)(q_3 q_4 - p_4 r_4) - (q_1 q_4)(p_3 r_3)] \end{aligned}\right\} \qquad (3.I)$$

$$\left.\begin{aligned} B &= A/4 \\ Z &= [(E - A\cdot B)/2 = (E - \tfrac{A^2}{2})/2] \\ Z_2 &= F/A \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Тогда

$$Z_1^2 \geq 0 \qquad (3.3)$$

является необходимым, а

$$Z_1 = Z = Z_2 \qquad (3.4)$$

необходимым и достаточным условиями для того, чтобы исходная матрица $\mathbb{C}$ (I.I) имела кратные собственные значения. При этом, если $(Z_1 = Z = Z_2)$, то: I) если $D = 0$, то

$$\lambda_i = -B, \quad i = 1, 2, \cdots, 4 \qquad (3.5)$$

2) если $D > 0$, то

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = -B + \sqrt{D} \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = -B - \sqrt{D} \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

3) если $D < 0$, то

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 = \lambda_2 = -B + i\sqrt{-D}\\ \lambda_3 = \lambda_4 = -B - i\sqrt{-D}\end{aligned}\right\}, \qquad (3.7)$$

где
$$D = B^2 - Z \qquad (3.8)$$

Доказательство. Пусть размерность исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) равна 4 и её собственные значения – $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Тогда имеем

$$\det(\mathbb{C} - \lambda E) = \lambda^4 + A\lambda^3 + E\lambda^2 + F\lambda + Z_1^2 \quad , \qquad (3.9)$$

где A, E, F, Z_1^2 есть (3.I).

Теперь пусть $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_3 = \bar{\lambda}_4$ или $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4$. Тогда заведомо $\det(\mathbb{C} - \lambda E)$ (3.9) имеет следующий вид

$$\det(\mathbb{C} - \lambda E) = (\lambda^2 + 2B\lambda + C)^2 = \lambda^4 + 4B\lambda^3 + (4B^2 + 2C)\lambda^2 + 4BC\lambda + C^2 \qquad (3.10)$$

Следовательно из (3.9) и (3.10) следует, что $Z_1^2 = C^2 \geq 0$, поскольку матрица $\mathbb{C}$ (I.I) – вещественная и

$$B = A/4 , \quad E = (4B^2 + 2C), \quad F = 4BC \quad . \qquad (3.II)$$

Поэтому если положить $Z_2 = F/A$, $Z = [(E - 4B^2)/2 = (E - A \cdot B)/2]$, то имеем $Z_1 = Z = Z_2$.

Наоборот, пусть выполняется условие (3.4). Тогда выполняются равенства $F = A \cdot Z$, $E = [2Z + 4B^2 = 2Z + (A^2/4)]$, $Z_1 = Z$ т.е. $\det(\mathbb{C} - \lambda E) = [(\lambda^2 + \frac{1}{2}A\lambda + Z)^2 = (\lambda^2 + 2B\lambda + Z)^2]$. Следовательно, характеристический многочлен (3.9) имеет кратные собственные значения вида (3.5), либо (3.6), либо (3.7). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $\mathbb{C}$ (I.I) матрица размерности $m=3$ и пусть A, B, Z, a , a_1 и a_2 следующие функции её элементов

$$A = \left[\sum_{i=1}^{3} q_i = Sp(\mathbb{C})\right]$$

$$B = [(q_1 + q_2)q_3 + (q_1 \cdot q_2) - (p_3 \cdot r_3) - (p_2 r_2)] \qquad (3.I2)$$

$$Z = [(q_1 q_2) q_3 - (q_3 r_3) q_1 - (p_2 r_2) \cdot q_3]$$

$$a = A/3 , \quad a_1 = B/A , \quad a_2 = 3Z/B \qquad (3.I3)$$

Тогда
$$B > 0 \qquad (3.I4)$$

является необходимым, а

$$a_1 = a = a_2 \qquad (3.I5)$$

необходимым и достаточным условиями для того, чтобы матрица (I.I) имела кратное вещественное собственное значение

$$\lambda_i = a , \quad i = 1, 2, 3 \quad . \qquad (3.I6)$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 5 для характеристического многочлена $\mathbb{C}$ (I.I), можем записать

$$\det(\mathbb{C} - \lambda E) = \lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - Z \quad , \qquad (3.I7)$$

где A, B, Z есть (3.I2). В соответствии с основной теоремой (см., например, теорему 68.I § 68 [7]) алгебры при $m=3$ не может быть кратных комплексных собственных значений.

Пусть поэтому матрица $\mathbb{C}$ (I.I) размерности $m=3$ имеет кратное вещественное собственное значение $\lambda_i = a$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда $\det(\mathbb{C} - \lambda E)$ (3.I7) имеет вид

$$\det(\mathbb{C} - \lambda E) = [(\lambda - a)^3 = \lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3a^2\lambda - a^3] \quad . \qquad (3.I8)$$

Следовательно, из (3.I7) и (3.I8) получаем

$$3a = A, \quad 3a^2 = B , \quad Z = a^3 \quad . \qquad (3.I9)$$

Далее из (3.I3) и (3.I9) следует (3.I5), а также (3.I4).

Наоборот, пусть выполняется условие (3.I5). Тогда выполняются равенства $A = 3a$, $B = a \cdot A = 3 \cdot a^2$, $Z = \frac{1}{3} a \cdot B = a^3$ т.е. $\det(\mathbb{C} - \lambda E) = \lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3a^2\lambda - a^3$. Следовательно, характеристический многочлен (3.I7) имеет кратное вещественное собственное значение (3.I6). Лемма доказана.

Замечание 3. Результат теоремы 2 позволяет выполнить модификации системы программ [I0] для вычисления полного спектра матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) и в случае их произвольной структуры. На этом обстоятельстве мы уже ранее останавливались (см. страницу 9 [I0]). В следующей работе нами будет приведено описание системы программ, в которых реализованы алгоритмы теорем I,2, а также лемм 5 и 6 при $m = 3$ и 4 настоящей работы. Отметим также, что стратегия (2.I') сдвигов обеспечивает кубическую сходимость в отличие от квадратической сходимости при стратегии (2.I).

Заключение

В заключение отметим, что в настоящей работе выполнено обобщение (теоремы I,2) методов [6,2,I] корректного вычисления полного спектра вещественных трехдиагональных матриц при всех различных собственных значениях на случай, когда в спектре таких матриц имеются кратные собственные значения. Получены также простые неитерационные методы (леммы 5,6) вычисления кратных собственных значений в случае вещественных трехдиагональных матриц размерностей $m = 3$ и 4.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР професору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящим исследованиям и предоставленную возможность работы над ними.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-453-88, Дубна, 1988.
2. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-452-88, Дубна, 1988.
3. В. В. Воеводин. Вычислительные основы линейной алгебры. М., Наука, 1977.
4. В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. Начало теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. Минск, Наука и техника, 1985.
5. 리화선 역. 포트란에 의한 수값계산 편람(번역판). 외국문도서출판사, 1982년.
6. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-451-88, Дубна, 1988.
7. В. В. Воеводин. Линейная алгебра. М., Наука, 1980.
8. Г. А. Емельяненко. ОИЯИ, PII-531-86, Дубна, 1986. Л. И. Турчак. Основы численных методов. М., Наука, 1987.
9. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-736-88, Дубна, 1988.
10. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-787-88, Дубна, 1988.
11. Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М., Наука, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1988 года.

Емельяненко Г.А., Им Ён Сек P11-88-920

Методы вычисления полного спектра вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры

Получено множество неизвестных ранее методов нахождения полного спектра вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Im Yen Sec P11-88-920

Methods for Calculation of Complete General Real Triadiagonal Arbitrary Structure Matrix Spectrum

Many(unknown until)methods for calculation of complete general real triadiagonal arbitrary structure matrice spectrum are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988