сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-876

С.Н.Димова, М.С.Касчиев

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГОРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

1988

I. Постановка задачи

В последнее время интенсивно изучаются нестационарные диссипативные структуры, возникающие в нелинейной теплопроводной среде из-за режима с обострением [I]-[IO]. В этих исследованиях особое место занимает определение собственных функций (СФ) горения нелинейной среды, описываемой уравнением

$$u_t = \sum_{i=1}^{2} \left(u^{\sigma_i} u_{x_i} \right)_{x_i} + u^\beta, \quad t>0, \quad x=(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2, \quad \sigma_1>0, \ \sigma_2>0, \ \beta>1. \tag{I}$$

Неограниченные автомодельные решения $u(t,x)$ уравнения (I) имеют вид [3], [6], [IO]:

$$u_A = (1 - t/T_0)^{-\frac{1}{\beta-1}} \Theta(\xi), \tag{2}$$

где

$$\xi_i = x_i (1 - t/T_0)^{-\tilde{m}_i}, \quad \tilde{m}_i = \frac{\beta-\sigma_i-1}{2(\beta-1)}, \quad i=1,2.$$

Без ограничения общности положим

$$T_0 = 1/(\beta-1), \quad m_i = (\beta-1)\tilde{m}_i, \quad i=1,2.$$

Подставляя представление (2) в уравнение (I), получаем, что функция $\Theta(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$L\Theta \equiv \sum_{i=1}^{2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\Theta^{\sigma_i} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i} \right) + m_i \xi_i \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i} \right\} + \Theta - \Theta^\beta = 0. \tag{3}$$

Нетривиальные решения $\Theta(\xi) \not\equiv$ I, 0 уравнения (3) называются СФ горения нелинейной среды [2].

Ищем решения $\Theta(\xi) \geqslant 0$, которые при любых значениях параметров σ_1, σ_2 и β удовлетворяют условиям симметрии:

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} = 0, \tag{4}$$

и условиям на бесконечности:

$$\Theta(\xi) \to 0, \quad |\nabla \Theta(\xi)| \to 0, \quad |\xi| \to \infty. \tag{5}$$

Пусть заданы значения параметров σ_1, σ_2 и β. По аналогии с одномерным случаем рассматриваем следующие три типа соотношений в направлении ξ_i, i = I,2:

I. $\beta = \sigma_i + 1$ – S – режим с обострением;

2. $\beta < \sigma_i + 1$ – HS – режим с обострением;

3. $\beta > \sigma_i$ + I – LS – режим с обострением.

Качественное поведение СФ в каждом из этих режимов подробно исследовано в работах [I]-[5]. На основании этих исследований поставим граничные условия

$$\Theta(\xi)=0\,,\quad \xi_i=l_i\gg 1\,,\quad i=1,2\,, \tag{6}$$

если в направлении ξ_i осуществляется S- или HS-режим с обострением. Выбор величин l_i обсуждается в п.2. Пусть в направлении ξ_i имеем LS -режим. Известна [I] асимптотика СФ $\Theta(\xi)$:

$$\Theta(\xi)=C_A\,\xi_i^{-1/m_i}\,,\quad \xi_i\to\infty\,,\quad C_A=const. \tag{7}$$

На основании этого при больших значениях переменной ξ_i можно поставить граничное условие третьего рода

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i}=-m_i\frac{\Theta}{\xi_i}\,,\quad \xi_i=l_i\gg 1\,,\quad i=1,2. \tag{8}$$

Величины l_i в этом случае выбираются из условия выхода решения на асимптотику (7) в направлении ξ_i.

Таким образом, необходимо найти нетривиальное решение $\Theta(\xi)$ уравнения (3) в области $\Omega=\{(\xi_1,\xi_2),\ 0<\xi_1<l_1,\ 0<\xi_2<l_2\}$, удовлетворяющее краевым условиям (4) и условиям (6) или (8) в зависимости от соотношений между параметрами σ_1, σ_2 и β.

Цель работы состоит в разработке устойчивого численного метода решения сформулированной задачи. Отметим, что для вычисления одномерных СФ выполнено большое число работ (см.[I]-[5] и списки литературы в них), в которых предложены самые разнообразные численные методы. В то же время численные исследования двумерных СФ проведены только для изотропного случая ($\sigma_1=\sigma_2$) [7],[8]. Анизотропному случаю посвящены работы [9],[I0], в которых численно решалось уравнение (I), и из автомодельной обработки [9],[I] полученного решения определялась СФ $\Theta(\xi)$. В этой связи разработка новых методов численного решения задачи (3)-(5) для произвольных допустимых значений параметров σ_1, σ_2 и β является весьма актуальной задачей.

Ниже используем введенную в [9],[I0] терминологию для случая, когда в направлениях ξ_i, i = I,2, имеются различные режимы. Например, если $\beta=\sigma_1+1$, $\beta<\sigma_2+1$, будем говорить о S-HS-режиме, и т.д.

2. Метод численного решения

Предлагаемый метод основан на использовании непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) [II],[I2] с последующим решением эволюционного уравнения НАМН по методу конечных элементов (МКЭ)[I3].Ранее такой подход был применен для вычисления СФ в радиально-симметричном случае [5] . На основании полученных результатов удалось уточнить структуру СФ LS -режима и численно получить СФ новой структуры.

Введем непрерывный параметр $0\le t<\infty$. Эволюционное уравнение НАМН имеет вид [I2]

$$L'[\Theta(\xi,t)]\,V(\xi,t)+L\Theta(\xi,t)=0\,,\quad V=\frac{\partial\Theta(\xi,t)}{\partial t}\,,$$
$$\Theta(\xi,0)=\Theta_0(\xi)\,,\ (\xi_1,\xi_2)\in\Omega=\{0\le\xi_i\le l_i,\ i=1,2\}. \tag{9}$$

Здесь $\Theta_0(\xi)$-заданная функция, L' - производная Фреше оператора L, вычисленная в точке $\Theta(\xi,t)$. Применяя метод Эйлера, из (9) получаем итерационную схему

$$L'[\Theta_k(\xi)]\,V_k(\xi)=-L\Theta_k(\xi)\,, \tag{I0}$$

$$\Theta_{k+1}=\Theta_k+\tau_k V_k\,, \tag{II}$$

$0<\tau_k\le 1$- шаг итерационного процесса (I0)-(II). Пусть функция $\Theta_0(\xi)$ (начальное приближение) удовлетворяет граничным условиям (4),(6),(8). Легко проверить, что итерационные поправки V_k удовлетворяют тем же самым краевым условиям.

Численное решение уравнения (I0) проводится МКЭ на основе формулировки Галеркина.

Введем следующие обозначения: $\Gamma_1=\{0\le\xi_1\le l_1,\ \xi_2=l_2\}$, $\Gamma_2=\{\xi_1=l_1,\ 0\le\xi_2\le l_2\}$, $D=\{\Theta(\xi):\ \Theta,\partial\Theta^{\sigma_i+1}/\partial\xi_i\in L_2(\Omega)\}$, $H^1_\alpha=\{w:\ w,\partial w/\partial\xi_i\in L_2(\Omega),\ \alpha_i w(\xi)=0,\ \xi\in\Gamma_i,\ i=1,2\}$, где $\alpha_i=1$ для случаев S- и HS-режимов и $\alpha_i=0$ для LS -режима.

Сформулируем постановку Галеркина: для заданной функции $\Theta_k\in D$ необходимо найти функцию $V_k\in H^1_\alpha$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(L'(\Theta_k)V_k,w)=-(L\Theta_k,w)\,,\ \forall w\in H^1_\alpha(\Omega). \tag{I2}$$

Выражения для левой и правой частей с учетом граничных условий (4), (6),(8) имеют вид (индекс k будем опускать):

$$(L'(\Theta)v, w) = \iint_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{2} \Big[\Theta^{\sigma_i} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} + m_i \xi_i w \frac{\partial v}{\partial \xi_i} + \sigma_i \Theta^{\sigma_i - 1} v \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \Big] + (1 - \beta \Theta^{\beta-1}) v w \Big\} d\xi_1 d\xi_2 + \sum_{i=1}^{2} (1-\alpha_i) \int_{\Gamma_i} \Big(m_i \Theta^{\sigma_i} \xi_i^{-1} - \sigma_i \Theta^{\sigma_i - 1} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i} \Big) v w \, d\xi_i ,$$

$$(L\Theta, w) = \iint_{\Omega} \Big\{ \Big[\sum_{i=1}^{2} \Theta^{\sigma_i} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} + m_i \xi_i w \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i} \Big] + (1 - \Theta^{\beta-1}) \Theta w \Big\} d\xi_1 d\xi_2 + \sum_{i=1}^{2} (1-\alpha_i) \int_{\Gamma_i} m_i \Theta^{\sigma_i} \xi_i^{-1} \Theta w \, d\xi_i .$$

Дискретизацию интегрального тождества (I2) проводим по МКЭ. В работе используются восьмиузловые изопараметрические конечные элементы. Конечноэлементная сетка строится при помощи базисного обеспечения пакета программ MULTIMODE [I4]. При вычислении нелинейных коэффициентов уравнения (I2) применяются аппроксимации

$$\Theta^{\gamma} = \sum_{j=1}^{8} \Theta_j^{\gamma} h_j(r, s) , \quad \gamma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 - 1, \sigma_2 - 1, \beta, \beta - 1 ,$$

где $h_j(r,s)$, $j = 1, \dots, 8$, $-1 \le r, s \le 1$ – изопараметрические базисные функции, а через Θ_j обозначены значения функции Θ в узлах соответствующего элемента.

В результате дискретизации приходим к решению на каждом шаге итерационного процесса (I0)-(II) системы линейных уравнений

$$AV = F \qquad (I3)$$

с несимметричной матрицей A, где $V^T = (v_1, \dots, v_n)$ – вектор итерационных поправок, n – число узлов конечноэлементной сетки. Решение системы (I3) осуществляется путем разложения матрицы A в виде

$$A = LU, \qquad (I4)$$

где L – нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, U – верхняя треугольная матрица. Отметим, что при программной реализации разложения (I4) в памяти ЭВМ хранятся верхний и нижний профили матрицы A . Такая организация вычислений обеспечивает значительную экономию ресурсов ЭВМ. Итерационный шаг τ_k определяется в процессе вычислений по экстраполяционной формуле [I5] (см.также [5] , стр.8).

Одним из основных этапов при реализации предложенного метода является определение начального приближения Θ_c для искомой функции Θ .

В случае S-, HS- или S-HS –режимов начальное приближение определяется на основе исследований СФ в радиально-симметричном случае [I], [5]. Положим $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$, $\rho = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$. Значение $\ell = \ell_1 = \ell_2$ в формулах (5) определим из соотношения $\ell_0 = \frac{\pi}{\sigma}(\sigma + 1 + 1.84\frac{\sigma}{\pi})^{1/2}$, $\ell = \ell_0 + 2$, а функцию Θ_0 зададим следующим образом:

$$\Theta_0(\xi) = \begin{cases} A \cos^2(\pi\rho / 2\ell_0) , & \rho \le \ell_0 , \ A = const, \\ 0 , & \rho \ge \ell_0 , \ \xi_1 \le \ell_1 , \ \xi_2 \le \ell_2 . \end{cases}$$

Начальное приближение для функции Θ в случае LS –режима задается на основе разработанной в работах [7],[8] техники "сшивания" решений линеаризированного около гомотермического решения уравнения (3) с асимптотикой (7).

Как и в изотропном случае, уравнение (3) допускает одномерные решения $\Theta(\xi_i)$, а линеаризованное около $\Theta \equiv 1$ уравнение (3) – разделение переменных ξ_1 и ξ_2. Поэтому предложенный в [7], [8] способ конструирования линейных приближений к СФ изотропного LS –режима – раздельное сшивание по ξ_1 и ξ_2 – применим и для анизотропного LS-режима ($\beta > \sigma_k + 1$, $k = 1,2$). Этим способом получаем класс линейных приближений, который по аналогии с изотропным случаем обозначаем через Ei/j :

$$\tilde{\Theta}_{ij}(\xi_1, \xi_2) = f_i^{(1)}(\xi_1) f_j^{(2)}(\xi_2) , \quad i = 1, \dots, K_1, \ j = 1, \dots, K_2, \ i \le j , \qquad (I5)$$

$$f_i^{(k)}(\xi_k) = \begin{cases} 1 + \alpha_i^{(k)} y_k(\xi_k) , & 0 \le \xi_k \le \xi_{k,i} , \\ C_i^{(k)} \xi_k^{-1/m_i} , & \xi_k \ge \xi_{k,i} , \ i = 1, \dots, K_k , \end{cases} \qquad (I6)$$

$$y_k(\xi_k) = F\Big(-\frac{\beta - 1}{\beta - \sigma_k - 1} , \frac{1}{2} , \frac{\beta - \sigma_k - 1}{4} \xi_k^2 \Big) , \quad k = 1, 2, \qquad (I7)$$

где $F(-a, b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, а K_k – число нулей уравнения $y_k(\xi) = 0$. Константы $\alpha_i^{(k)}$, $C_i^{(k)}$ и точки сшивания $\xi_{k,i}$ определяются из условий $f_i^{(k)}(\xi) \in C^2[0, \ell_k]$ или $f_i^{(k)}(\xi) \in C^1[0, \ell_k]$.Число K различных приближений (I5) класса Ei/j дается формулой $K = K(K_1, K_2) = K_1(2K_2 - K_1 + 1)/2$ $(K_1 \le K_2)$.

В случаях LS-S- и LS-HS –режимов мы пользуемся начальными приближениями

$$\tilde{\Theta}_i(\xi_1, \xi_2) = f_i^{(1)}(\xi_1) g(\xi_2) , \quad i = 1, 2, \dots, K_1 , \qquad (I8)$$

где $f_i^{(1)}(\xi_1)$ дается формулами (I6),(I7), а

$$g(\eta)=\begin{cases} A\cos^2(\pi\xi/2\xi_0), & 0\le\xi\le\xi_0,\\ 0, & \xi_0\le\xi\le l_2,\end{cases}$$

$$\xi_0=\pi\sqrt{\sigma_2+1+1.84\,\sigma_2/\pi}\,/\,\sigma.$$

Приближения (I8) обозначаем через $Ei/S(Ei/HS)$ в случае LS-S-(LS-HS) -режима.

3. Численные исследования и результаты

На этапе апробации и тестирования метода были проведены численные эксперименты для установления точности приближенного решения и скорости сходимости метода.

Пусть имеется изотропная среда $(\sigma_1=\sigma_2=\sigma)$. В случае S- и HS -режимов решение соответствующей двумерной задачи должно совпадать с цилиндрически-симметричной одномерной СФ с теми же параметрами. В таблице приведены результаты вычислений СФ S - и HS-режимов по обоим способам. В левой части таблицы показаны результаты вычисления для цилиндрически-симметричной одномерной СФ, а в правой – для двумерной СФ. Переменные n и n_ℓ обозначают число узлов и число элементов соответствующих сеток, а ξ_0 – значение аргумента ξ, при котором $\Theta(\xi)=0$, $\xi>\xi_0$ $(\Theta(\xi_1,\xi_2)=0,\ \rho\ge\xi_0)$.

Таблица

$\beta=3,\ \sigma_1=\sigma_2=\sigma=2$ (S - режим)							
n	n_ℓ	$\Theta(0)$	ξ_0	n	n_e	$\Theta(0,0)$	ξ_0
5I	25	I,463540	3,07	382	II5	I,462850	3,09
$\beta=2.75,\ \sigma_1=\sigma_2=\sigma=2$ (HS-режим)							
5I	25	I,604909	2,88	382	II5	I,604620	2,87

При вычислениях использованы значения $l_1=l_2=l=6$. В работе [5] численным экспериментом было показано, что при использованных там квадратичных элементах точность метода есть $O(h^4)$ в узлах разбиения (имеет место сверхсходимость МКЭ в этих узлах). Полученные здесь результаты указывают на высокую точность численного решения и в двумерном случае и подтверждают надежность и устойчивость предложенного метода. Для достижения критерия прекращения итераций (норма невязки меньше 10^{-5}) были необходимы I3–I6 итераций.

Особый интерес представляет решение задачи (3)-(5) при $\sigma_1\ne\sigma_2$, анизотропный случай. На рис.I показаны полученное решение при значе-

HS-S:3,2,3

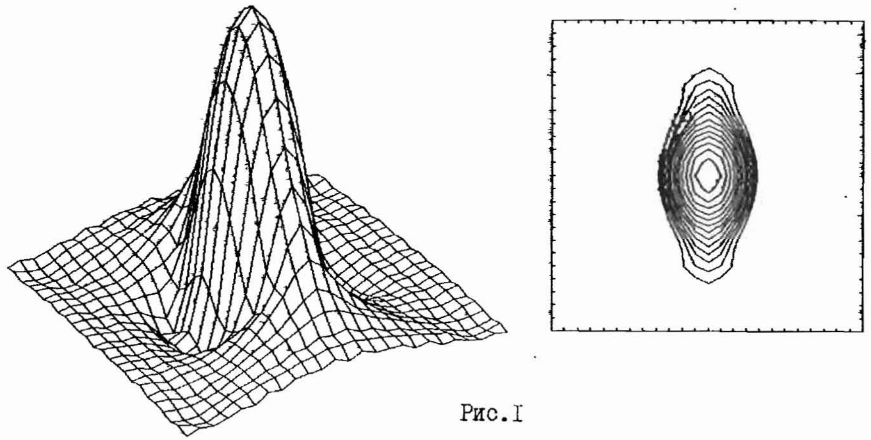

Рис.I

LS-S:2,2.5,3.5(E1/S)

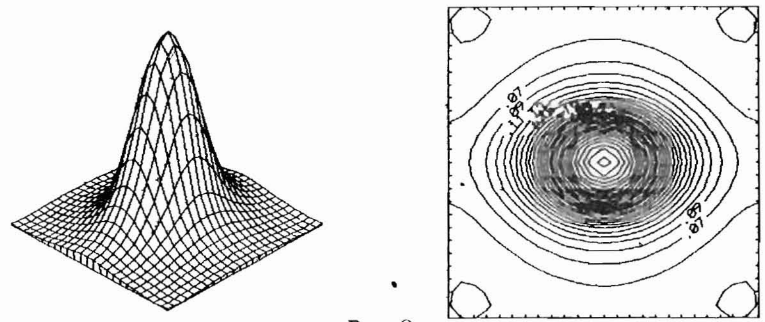

Рис.2

LS-LS:2,2,3.5(E3/3)

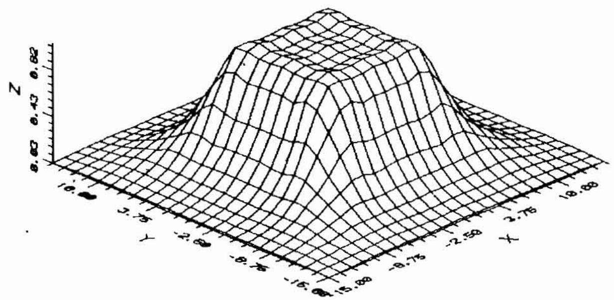

Рис.3

ниях параметров $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\beta = 3$ ($HS-S$-режим) и его линии уровня. Численные значения функции $\Theta(\xi)$ с точностью 10^{-3} совпадают с результатами работы [9].

Решение $\Theta(\xi)$ класса $E1/S$ и его линии уровня для $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 2{,}5$, $\beta = 3{,}5$ ($LS-S-$ режим) приведены на рис.2. Видно, что в направлении ξ_2 функция $\Theta(\xi)$ обращается в нуль для конечного значения $\xi = \xi_0$, а в направлении ξ_1 она имеет бесконечный носитель.

Решение класса $E3/3$ при $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 2$, $\beta = 3{,}5$ ($LS-LS-$ режим), показанное на рис.3, соответствует структуре с 9 максимумами.

Заключение

Разработан новый подход к вычислению двумерных СФ горения нелинейной диссипативной среды. Полученные на его основе вычислительные схемы позволяют определять эти СФ как для изотропной, так и для анизотропной среды, что является принципиально новым шагом при исследовании рассматриваемой задачи.

Проведенные численные эксперименты подтверждают высокую точность метода, устойчивость итерационного процесса и довольно слабую зависимость его сходимости от начального приближения. Эти обстоятельства позволяют применять разработанные схемы и соответствующее программное обеспечение для более прецизионного исследования двумерных СФ горения нелинейной среды.

Авторы глубоко благодарны С.П.Курдюмову, В.А.Галактионову, Ю.П.Попову и А.Б.Потапову за плодотворные дискуссии при выполнении этой работы.

Литература

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов П.С., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987.
2. Курдюмов П.С. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. – В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М. : Наука, 1983, с.217–243.
3. Галактионов В.А. и др. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. Совр.пробл.матем. Новейшие достижения. Т.28. ВИНИТИ АН СССР, М., 1986, 95–206.

4. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИПМатем. АН СССР, М., № 106, 1977.
5. Димова С.Н., Касчиев М.С., Курдюмов С.П. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. Препринты ОИЯИ Р11-88-473, Р11-88-831, Дубна, 1988.
6. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях. Дифференц.уравнения, 1983, т.19, № 7, с.1215–1223.
7. Курдюмов П.С., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Архитектура многомерных тепловых структур. ДАН СССР, т.274, № 5, 1984, с.1072.
8. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. ЖВМ и МФ, т.26, № 8, 1986, с.1189.
9. Бакирова М.И., Борщукова С.Н., Дородницын В.А., Свирщевский С.Р. О направленном распространении тепла в нелинейной анизотропной среде. Препринт ИПМатем. АН СССР, М., № 182, 1985.
10. Бакирова М.И., Димова С.Н. и др. Инвариантные решения уравнений теплопроводности, описывающие направленное распростране горения и спиральные волны в нелинейной среде. Докл.АН СССР, 1988, 299, № 2, с.346–350.
11. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Изв.ВУЗов, сер.матем., № 5(6), 1958, с.18.
12. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. ЭЧАЯ, 4, в.1, 1973, с.123.
13. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
14. Гусев В.В., Касчиев М.С., Пузынин И.В. Автоматическая генерация сетки в пакете программ MULTIMODE. Препринт ОИЯИ Р11-87-421, Дубна, 1987.
15. Пузынин И.В., Пузынина В.А. В сб.: Алгоритмы и программы решения некоторых задач физики. KFKI-74-34, Будапешт, 1974, с.93.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1988 года.