сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-86

В.Л.Топунов*, А.Б.Швачка

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ВНЕШНИХ ФОРМ

*Московский государственный педагогический институт им. В.И.Ленина

1988

В последние годы значительно возрос интерес к использованию геометрических и теоретико-групповых методов в теории дифференциальных уравнений в частных производных, что выражается, в частности, в резком увеличении числа научных работ, в которых используются современные геометрические методы и исчисление внешних форм [1-8]. В связи с этим становится актуальной задача реализации на ЭВМ по крайней мере некоторых из этих методов.

Ниже изложены результаты работы по созданию комплекса программ, позволяющего автоматизировать исследование дифференциальных уравнений /прежде всего нелинейных/ методом внешних форм. Программы позволяют упростить процедуру вычисления образующих локально-инвариантных групп, ассоциированных с заданным уравнением [1-3]. Этот же аппарат применим к исследованию интегрируемости дифференциального уравнения, реализации структур продолжения в рамках метода Уолквиста-Эстабрука, замыканию алгебр Ли, связанных с данным уравнением [9].

СТРУКТУРА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Уже сейчас ясно, что ограничиться лишь машинной обработкой уравнений не удается, поэтому "человеческая" компонента обязательно должна присутствовать в процессе исследования нелинейных уравнений. Разрабатываемый комплекс программ предназначен именно для таких смешанных вычислений на ЭВМ при активном участии исследователя. В связи с отсутствием развитой диалоговой системы для программирования на языке рефал вычисления выполняются в пакетном режиме. В процессе выполнения программ информация о состоянии оперативной памяти ЭВМ выводится во внешнюю память с соответствующими указаниями пользователю. Имеется возможность продолжить расчет в следующем запуске задачи, начиная с некоторого завершенного этапа исследования уравнений.

Первый набор программ создаваемого комплекса позволяет установить замкнутость идеала, порожденного дифференциальными формами, ассоциированными с заданным уравнением, а также вычислить образующие локально-инвариантной группы, связанной с уравнением. Весь комплекс базируется на системе стандартных рефал-модулей, описанных в [14].

Для решения перечисленных выше задач с использованием ЭВМ необходимо наличие программных единиц, оперирующих с внешними формами. С этой целью система стандартных рефал-модулей была дополнена модулями, реализующими аппарат внешних форм. В пакете имеются функции, осуществляющие умножение /как внешнее в случае дифференциальных форм, так и внутреннее при умножении дифференциальной формы на вектор/, внешнее дифференцирование, вычисление производной Ли дифференциальной формы по заданному направлению [5,6,12]. Созданы также модули ввода-вывода и перевода объектов из внешнего /фортраноподобного/ представления во внутреннее и обратно. Система модулей является расширяемой и при необходимости в нее могут быть включены дополнительные операции. Таким образом, построен базис, над которым можно "надстраивать" новые модули более высокого уровня, реализующие те или иные подходы к исследованию /нелинейных/ дифференциальных уравнений с использованием аппарата внешних дифференциальных форм.

В настоящее время комплекс состоит из четырех программ: CLIDED, GENER1, GENER2, DIRAC, все они описаны ниже. Программы обладают унифицированным входом. Это означает, что информация об исследуемом дифференциальном уравнении /системе уравнений/ для счета по программам задается в унифицированном виде. Программы ведут подробный протокол о своей работе, который вместе с окончательным результатом выводится на печать. Как уже отмечалось, в ряде случаев имеется возможность выбрать один из вариантов анализа исходного дифференциального уравнения, возникающего в процессе счета /программа, как правило, выбирает самый общий случай/ и продолжить счет при следующем запуске задачи, начиная с точки ветвления.

Программы реализованы в виде набора рефал-модулей на ЭВМ серии ЕС [15,16]:

- модули INSYST, OUTER, EXTAR, MGCD, ARDFPOL, CONVERT, TRANSL реализуют полиномиальную арифметику, алгебру внешних дифференциальных форм, перевод объектов из внешнего представления во внутреннее /используется несколько видов внутренних представлений в зависимости от характера операций с объектами/ и обратно и ряд других вспомогательных функций, при этом все модули иерархически подчинены ведущим модулям;
- ведущие модули: INTEGR, GENER1, GENER2, DIRAC, FROBNS, PASSIV, с помощью которых реализованы алгоритмы исследования дифференциальных уравнений на базе вспомогательных модулей;
- системные модули: SWMCR, MVVRTOP, SWORMR, SWAD2R, необходимые для повышения эффективности системной реализации языка рефал.

В целом комплекс программ является машинно-независимым. Необходимым условием реализации вычислений на данной ЭВМ является наличие соответствующей реализации языка рефал, а также машинных процедур, реализующих определенные рефал-функции, используемые для повышения эффективности вычислений.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, РЕАЛИЗОВАННЫЙ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ

С дифференциальным уравнением /или системой уравнений/

$$\Phi\left(x^i, z^j, \frac{\partial z^j}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i \partial x^k}, \dots\right) = 0 \qquad /1/$$

/$i, k = 1, \dots n$; $j = 1, \dots, r$; $(\partial/\partial x)$ - символ частной производной по переменной x/ связывается система дифференциальных форм

$$\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s, \qquad /2/$$

порождающая идеал I в m-мерном пространстве переменных задачи. Размерность пространства определяется способом построения системы дифференциальных форм /2/. Идеал $I = I\ (\omega^1, \dots, \omega^s)$ является *замкнутым*, если $DI \in I$, где D - символ внешнего дифференцирования [12].

Векторное поле $\bar{V} = V^i e_i$ /по индексу i осуществляется суммирование, $e_1, \dots, e_m$ - базис касательного пространства/ называется изовектором замкнутого идеала I, если производная Ли идеала I по направлению $\bar{V}$ не выводит из идеала, т.е. $L(I) \in I$, где $L_{\bar{V}}(I)$ - производная Ли от идеала I по направлению вектора $\bar{V}$. Иными словами, $L_{\bar{V}}(I) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \omega^1, \dots, \omega^s)$. Последнее означает, в частности, что производная Ли по направлению $\bar{V}$ от каждой из дифференциальных форм /2/ может быть представлена в виде линейной комбинации всех форм /2/ и удовлетворяет, следовательно, s равенствам

$$L_{\bar{V}}(\omega^i) + A^i_j \omega^j = 0 \qquad /3/$$

/по j осуществляется суммирование от 1 до s/ для некоторых s^2 констант A^i.

После приведения по модулю идеала I /в соответствии с терминологией [1] после перехода на многообразие/ соотношение /3/ /при выбранных A^i_j/ можно рассматривать как систему уравнений на компоненты V^i изовектора $\bar{V}$. Решение этих уравнений эквивалентно построению переопределенной системы дифференциальных уравнений на образующие локально-инвариантной группы, ассоциированной с уравнением /1/. Далее возникает обычная задача приведения переопределенной системы к пассивному виду и получения из нее информации о свойствах решения исходного уравнения [1].

Наиболее трудоемкой является задача определения замкнутости идеала I, порожденного формами /2/, решение уравнений /3/ относительно компонент изовектора V^i и их производных и приведение полученной системы уравнений к пассивному виду. Представляет интерес также задача построения системы дифференциальных форм /2/ по заданному уравнению /1/, но она существенно проще перечисленных выше задач.

Замкнутость идеала I, порожденного формами /2/, определяется непосредственной проверкой принадлежности идеалу I внешней производной от каждой из дифференциальных форм ω^1, ω^2, ..., ω^s.

Решение уравнений /3/ получено путем применения известных формул для вычисления производных Ли [12].

Построенная система линейных однородных уравнений на компоненты изовектора разрешается алгебраически относительно возможно большего числа компонент изовектора и их производных и упрощается.

ОПИСАНИЕ БАЗОВОЙ ПРОГРАММЫ КОМПЛЕКСА

Ниже описана базовая программа комплекса GENER1 и форма задания информации об исследуемом уравнении. Эта программа используется пока в пакетном режиме.

Информация об исследуемом уравнении задается в следующем виде. На первой перфокарте данных /или строке дисплея, если информационный файл вводится с терминала/ указывается наименование решаемой задачи, в котором должно присутствовать ключевое слово УРАВНЕНИЕ (по нему программа определяет принадлежность информации к тому или иному разделу). Ключевое слово может быть сокращено до УРАВ. На следующих перфокартах (или строках на терминальном устройстве) указываются имена всех параметров, фигурирующих в исследуемом уравнении. Каждый параметр задачи может принадлежать к одному из четырех типов: независимые переменные, зависимые переменные, буквенные константы и произвольные функции от указанных в явном виде аргументов. Список параметров каждого типа начинается с новой перфокарты/строки и ему предшествует ключевое выражение: НЕЗАВ{α}_ПЕРЕМ{β}_ - для независимых переменных, ЗАВИС{α}_ПЕРЕМ{β}_ - для зависимых переменных, КОНСТ{α}_ - для буквенных констант и ФУНКЦ{α}_ - для произвольных функций /здесь

{α},{β} - произвольные последовательности символов, не содержащие пробелов, _ - признак пробела/. После ключевого выражения выписываются имена параметров. В качестве имени параметра может выступать любая последовательность букв и цифр, начинающаяся не с цифры или буквы D. Не рекомендуется использовать имена, начинающиеся с символа ь, так как при дальнейшей работе программа может сгенерировать такие имена для других целей /об этом подробнее см.ниже/. Имена в списках разделяются запятыми, конец каждого списка отмечается символом ";". После каждого имени произвольной функции в скобках указываются имена аргументов функции, разделенные запятыми. В случае, если список параметров какого-либо типа пуст, его можно опустить.

После перфокарт/строк с именами параметров следуют перфокарты/строки, на которых записано исследуемое уравнение /система уравнений/. Каждое из уравнений может содержать лишь полиномиальные выражения от параметров задачи и производных этих параметров /или построенных по тем же правилам полиномиальных выражений/; числовые коэффициенты должны быть целыми числами. Поскольку многие уравнения удается привести к такому виду, подобное ограничение не представляется слишком обременительным. Запись уравнения заканчивается символами "=" или "Ø", что всегда можно обеспечить путем переноса всех членов в левую часть уравнения. Каждое уравнение записывается, начиная с новой перфокарты/строки, но может занимать любое количество перфокарт/строк. Пробелы в записи уравнения игнорируются, в конце записи последнего уравнения должен стоять символ ";". В качестве знака умножения употребляется символ "*", возведение в степень /показатель степени - натуральное число/ обозначается символом "**". Допускается употребление в записи уравнения производных любого порядка от полиномиальных выражений, в том числе и от выражений, содержащих производные. Примеры записи задач во входном потоке указаны в приложении.

Программа анализирует входную информацию и если не обнаруживает в ней ошибок и противоречий, переходит к дальнейшей обработке. Прежде всего программа строит систему дифференциальных форм, эквивалентную данному уравнению /системе/, вводя при необходимости формы линеаризации. Чтобы не ограничивать пользователя в выборе обозначений для параметров задачи, новые переменные, которые появляются при линеаризации, программа называет последовательно именами ь1, ь2, ...

В случае, если пользователя не устраивают введенные программой обозначения, он имеет возможность на входе задать саму систему дифференциальных форм, эквивалентную исходному уравнению /системе уравнений/, при этом он может использовать сведения из предыдущего запуска, выведенные программой. Программа идентифицирует информацию на входе, и в случае, если задана система дифференциальных форм, этап построения системы дифференциальных форм, эквивалентных уравнению, будет опущен.

В качестве следующего шага программа осуществляет проверку замкнутости идеала I для построенной системы дифференциальных форм/2/. В результате внешнего дифференцирования форм /2/ должны быть получены формы, линейно выражающиеся через исходные. Проверка осуществляется путем построения идеала I, порожденного формами $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s$, и определения принадлежности внешних производных D^1_ω, D^2_ω, ..., D^s_ω этому идеалу. При этом выполняются операции внешнего дифференциирования, внешнего умножения и сложения дифференциальных форм /для построения идеала вычисляется выражение $\omega^i \wedge \ell^i_j dy^j$, где по индексу i осуществляется суммирование от 1 до s и по индексу j - суммирование от 1 до m, где m - размерность пространства переменных задачи, $\wedge$ - знак внешнего произведения дифференциальных форм, ℓ^i_j - произвольные параметры, изменение которых в области значений коэффициентов дифференциальных форм и определяет искомый идеал I /. Затем решается система линейных уравнений относительно переменных ℓ^i_j /строго говоря, определяется совместность этой системы/.

Если идеал I замкнут относительно дифференцирования, программа GENER1 продолжает работу, в противном случае выводится соответствующее сообщение и программа заканчивает свою работу.

После проверки замкнутости идеала I программа строит в касательном пространстве вектор $\bar{V} = J(y^i)\dfrac{\partial}{\partial y^i}$ /по индексу i осуществляется суммирование, y^i - все переменные задачи, в том числе и введенные программой/ с компонентами $J(y^i)$, которые в дальнейшем и подлежат определению. Вектор $\bar{V}$ окажется изовектором замкнутого идеала $I(\omega^1, \ldots, \omega^s)$, если производная Ли каждой из форм $\omega^1, \ldots, \omega^s$ по направлению вектора $\bar{V}$ принадлежит идеалу I, т.е. $L_{\bar{V}}(\omega^i) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \ldots, \omega^s)$.

Программа вычисляет производную Ли по направлению вектора $\bar{V}$ от каждой из форм $\omega^1, \ldots, \omega^s$, приравнивает полученные дифференциальные формы нулю и затем приравнивает нулю все коэффициенты этих дифференциальных форм. Тем самым строится система уравнений в частных производных на величины $J(y^i)$, которая является разрешимой лишь в случае, когда $\bar{V}$ является изовектором идеала I [1].

Построение указанной системы уравнений и является целью работы программы. Далее программа исключает из полученной системы уравнений возможно большее число производных $\dfrac{\partial J(y^i)}{\partial y^i}$ и различные дифференциальные следствия, затем распечатывает сначала более простые, а затем и все остальные уравнения системы.

На всех этапах работы программа ведет "протокол" выполняемых действий и выводит этот протокол на печать.

ПРОГРАММЫ CLIDED И GENER2

Программы CLIDED и GENER2 являются соответственно некоторым сужением и расширением базовой программы GENER1.

На входе эти программы используют ту же информацию об исследуемом уравнении, что и GENER1. Точно так же строится /если это необходимо/ система дифференциальных форм /2/ и проверяется замкнутость идеала, порожденного этими формами. После контроля замкнутости идеала программа CLIDED выводит на печать соответствующее сообщение и заканчивает работу. Программа GENER2 продолжает работу до той же точки, что и GENER1, но при этом производит дополнительные вычисления и выводит на печать более общую информацию об изовекторах замкнутого идеала I. При следующих запусках задачи эта информация может быть использована для дальнейшего изучения исходного уравнения.

ПРОГРАММА DIRAC

На входе программы DIRAC используется унифицированная информация об исследуемом уравнении /системе уравнений/. В отличие от описанных выше программ, программа DIRAC вводит в рассмотрение все необходимые дополнительные переменные, в то время как в предыдущих программах при построении системы /2/ новые /дополнительные/ переменные вводились лишь в минимальном количестве. Поскольку при этом значительно расширяется размерность пространства дифференциальных форм, возникает необходимость в изменении алгоритмов и использовании внешней памяти.

Рассмотрим используемый в программе DIRAC метод построения системы дифференциальных форм, ассоциированных с исходным уравнением. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ и $z^1, \ldots, z^r$ - соответственно независимые и зависимые переменные задачи, определяемой уравнением /1/. Строим систему дифференциальных форм /2/ $\omega^i = dz^i - z^i_j dx^j$, $i = 1, \ldots, r$ /по индексу $j = 1, \ldots, n$ ведется суммирование/, в которой $z^i_j = \partial z^i/\partial x^j$ и при этом некоторые из производных z^i_j уже исключены с помощью условий /1/.

Потребуем, как и ранее, чтобы для всех i производная Ли $L_{\bar V}(\omega^i)$ являлась линейной комбинацией всех форм ω^i, т.е.

$$L_{\bar V}(\omega^i) + A^i_k \omega^k = 0. \qquad /4/$$

В левых частях системы /4/ фигурируют дифференциальные формы вида

$$C^i_\ell dz^\ell + \bar C^i_j dx^j + A^i_k(dz^k - z^k_j dx^j), \qquad /5/$$

где по индексам j, k, ℓ ведется суммирование, причем $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, s$, $\ell = 1, \ldots, r$.

Значения A^i_k выбираем такими, чтобы в формах /5/ отсутствовали дифференциалы dz^ℓ, далее приравниваем нулю коэффициенты при dx^j и получаем требуемую систему уравнений.

Как правило, в случае неодномерных задач, например для нелинейных уравнений Дирака, полученная система уравнений имеет большую размерность, поэтому в процессе дальнейшей обработки используется процедура "выталкивания" промежуточной информации во внешнюю память.

Из построенной системы исключаются компоненты изовектора $J(z^i_j)$, т.е. компоненты изовектора, ассоциированные с первыми производными $z^i_j \left(= \dfrac{\partial z^i}{\partial x^j}\right)$.

Оставшиеся уравнения системы связывают $J(x^1), \ldots, J(x^n)$, $J(z^1), \ldots, J(z^r)$ и их частные производные. Как известно /13/, компоненты изовектора $J(x^1), \ldots, J(z^r)$ зависят только от $x^1, \ldots, z^r$. Следовательно, представив левые части оставшихся уравнений системы в виде полиномов от переменных z^i_j, можно приравнять нулю все коэффициенты этих полиномов. Полученную при этом систему уравнений большой размерности упрощаем с помощью алгоритмов, используемых на заключительной стадии работы программы GENERI. На этом программа DIRAC работу заканчивает.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Рассмотрим уравнение околозвукового установившегося плоскопараллельного течения газа /[1], с.72/:

$$u_y = v_x, \quad v_y = -u \cdot u_x. \qquad /6/$$

Информация об исследуемой задаче может быть задана в следующем виде на перфокартах/строках терминального устройства /см.выше о возможных сокращениях/:


```
УРАВНЕНИЕ ОКОЛОЗВУКОВОГО УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО
ТЕЧЕНИЯ:
НЕЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ: X,Y;
ЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ: U,V;
D(U)/D(Y) - D(V)/D(X)= 0
D(V)/D(Y) + U*D(U)/D(X) = 0;
```

Программа GENERI, проверив корректность введенной информации, построит и выведет на печать следующую систему дифференциальных форм, ассоциированную с данным уравнением:

```
ПОСТРОЕНА СЛЕДУЮЩАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ:
DX∧DU+DY∧DV=0
DX∧DV-U*DY∧DU=0
```

Далее осуществляется проверка замкнутости идеала, порожденного построенными формами, и выводится соответствующее сообщение на печать. Информация о следующем этапе работы программы имеет вид:

```
ПОЛУЧЕНЫ СЛЕДУЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ
НА КОМПОНЕНТЫ ИЗОВЕКТОРА - J(X), J(Y), J(U), J(V):
D(J(V))/D(U)+U*D(J(U))/D(V)=0
D(J(V))/D(V)-D(J(U))/D(U)+D(J(Y))/D(Y)-D(J(X))/D(X)=0
D(J(Y))/D(U)-D(J(X))/D(V)=0
-D(J(V))/D(X)+D(J(U))/D(Y)=0
-J(U)-2*U*D(J(Y))/D(Y)+2*U*D(J(X))/D(X)=0
U*D(J(Y))/D(X)+D(J(X))/D(Y)=0
U*D(J(Y))/D(V)+D(J(X))/D(U)=0
D(J(V))/D(Y)+U*D(J(U))/D(X)=0
```

Это и есть искомая система определяющих уравнений, но еще не в окончательном виде. После приведения этой системы к пассивному виду программа напечатает окончательный результат:

```
ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ВИД ПАССИВНОЙ СИСТЕМЫ:
D(J(V))/D(U)+2*D(J(X))/D(Y)=0
-D(J(V))/D(V)-3*D(J(Y))/D(Y)+3* D(J(X))/D(X)=0
D(J(V))/D(X)=0
D(J(V))/D(Y)=0
-J(U)-2*U*D(J(Y))/D(Y)+2*U*D(J(X))/D(X)=0
D(J(Y))/D(U)-D(J(X))/D(V)=0
U*D(J(Y))/D(X)+D(J(X))/D(Y)=0
U*D(J(Y))/D(V)+D(J(X))/D(U)=0
D(J(Y))/D(Y,Y)=0
```

```
-U*D(J(X))/D(Y,U)+2*D(J(X))/D(Y)=0
U**2*D(J(X))/D(V,V)+U*D(J(X))/D(U,U)-D(J(X))/D(U)=0
D(J(X))/D(Y,V)=0
-U**2*D(J(X))/D(X,V)-D(J(X))/D(Y)=0
D(J(X))/D(Y,Y)=0
D(J(X))/D(X,Y)=0
D(J(X))/D(X,U)=0
D(J(X))/D(X,X)=0
```

Хотя эта система и содержит число уравнений, большее, чем исходная система определяющих уравнений, она имеет более простую структуру и легко интегрируется:

$$J(x) = C_1(yu^2 - xv) + (C_2 + C_3)x + f(u,v);$$

$$J(y) = -C_1(xu + 2yv) + C_3 y + \bar{f}(u,v);$$

$$J(u) = 2C_1 uv + 2C_2 u;$$

$$J(v) = -\frac{2}{3}C_1 u^3 + \frac{3}{2}C_1 v^2 + 3C_2 v + C_4;$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - произвольные постоянные, а $f(u,v)$ и $\bar{f}(u,v)$ - произвольные функции, удовлетворяющие условиям $f_v = \bar{f}_u$ и $f_u = -u\bar{f}_v$.

Полученные результаты полностью совпадают с приведенными в /1/.

Таким образом, пространство L решений системы определяющих уравнений можно представить в виде прямой суммы $L = L^4 + L^\infty$, где L^4 - 4-мерное пространство решений, для которых $f = \bar{f} = 0$ и L^∞ - бесконечномерное пространство решений, для которых $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$.

2. Рассмотрим нелинейное уравнение типа уравнения Кортевега-де Вриза /18/:

$$u_t + u_{xxx} + (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)u_x = 0; \ \alpha,\beta,\gamma = \mathrm{const}, \ \alpha \neq 0, \ \gamma \neq 0. \qquad /7/$$

Информация для запуска программ может быть задана в следующем виде:

```
НЕЗАВПЕРЕМ X,T;
ЗАВИСПЕРЕМ U;
КОНСТАНТЫ ALFA, BETA, GAMMA;
D(U)/D(T)+D(U)/D(X,X,X)+(ALFA*U**2+BETA*U+GAMMA)*D(U)/D(X)=0;
```


Программа введет дополнительные переменные $Ь1 = u_x$ и $Ь2 = Ь1_x$ и построит систему внешних форм:

```
-DT∧DU-Ь1*DX∧DT=0
-DT∧DЬ1-Ь2*DX∧DT=0
DX∧DU-DT∧DЬ2+ (U**2*Ь1*ALFA+U*Ь1*BETA+Ь1*GAMMA)*DX*DT=0
```

После построения системы определяющих уравнений и приведения ее к пассивному виду на печать выводится система 13 уравнений относительно компонент изовектора $J(x)$, $J(t)$, $J(u)$, $J(Ь1)$, $J(Ь2)$:

```
ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ВИД ПАССИВНОЙ СИСТЕМЫ:
J(Ь2)+3*Ь2*D(J(X))/D(X)=0
J(Ь1)+2*Ь1*D(J(X))/D(X)=0
2*ALFA*J(U)+(2*U*ALFA+BETA)*D(J(X))/D(X)=0
D(J(Ø))/D(Ь2)=0
D(J(T))/D(Ь1)=0
D(J(T))/D(U)=0
D(J(T))/D(X)=0
D(J(T))/D(T)-3*D(J(X))/D(X)=0
D(J(X))/D(Ь2)=0
D(J(X))/D(Ь1)=0
D(J(X))/D(U)=0
D(J(X))/D(X,X)=0
-2*ALFA*D(J(X))/D(T)+(4*ALFA*GAMMA-BETA**2)*D(J(X))/D(X)=0
```

Проинтегрировав эту систему "вручную", получим:

$$J(x) = C_1\left(x - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{2\alpha}t\right) + C_2; \quad J(t) = 3C_1 t + C_3;$$

$$J(u) = -C_1\left(u + \frac{\beta}{2\alpha}\right); \quad J(Ь1) = -2C_1 Ь1; \quad J(Ь2) = -3C_1 Ь2.$$

Таким образом, общее решение определяющих уравнений зависит от трех произвольных постоянных. Вычислим инфинитезимальные операторы группы, допускаемой уравнением /7/, полагая одну из произвольных постоянных равной единице и остальные постоянные равными нулю:

$$\sigma_1 = \left(x - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{2\alpha}t\right)\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - \left(u + \frac{\beta}{2\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial u} - 2u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - 3u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}};$$

$$\sigma_2 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \sigma_3 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

3. В качестве следующего примера рассмотрим уравнения "мелкой воды" /7, 17/:

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y + GH_x = 0, \quad u_x + v_y = 0, \\
&H_t + CH_x = 0, \qquad H_y = 0;
\end{aligned}
\qquad /8/
$$

где $C = C(H)$ - произвольная функция, G - константа. Запишем эту систему в следующем виде:

```
УРАВНЕНИЕ МЕЛКОЙ ВОДЫ:
НЕЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ: X, Y, T;
ЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ: U, V, H;
КОНСТАНТА G;
ФУНКЦИЯ C(H);
D(U)/D(T)+U*D(U)/D(X)+V*D(U)/D(Y)+G*D(H)/D(X)=0
D(U)/D(X)+D(V)/D(Y)=0
D(H)/D(T)+C*D(H)/D(X)=0
D(H)/D(Y)=0
```

В результате работы программ GENER1, GENER2 и DIRAC получим систему уравнений:

```
ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ВИД ПАССИВНОЙ СИСТЕМЫ:
J(H)=0
J(V)-D(J(Y))/D(T)-V*D(J(Y))/D(Y)-U*D(J(Y))/D(X)+V*D(J(X))/D(X)=
=0
J(U)=0
D(J(T))/D(H)=0
D(J(T))/D(V)=0
D(J(T))/D(U)=0
D(J(T))/D(Y)=0
D(J(T))/D(X)=0
D(J(T))/D(T)-D(J(X))/D(X)=0
D(J(Y))/D(H)=0
D(J(Y))/D(V)=0
D(Y(Y))/D(U)=0
D(J(Y))/D(Y,T)=0
D(J(Y))/D(Y,Y)=0
D(J(Y))/D(X,Y)=0
D(J(X))/D(H)=0
D(J(X))/D(V)=0
D(J(X))/D(U)=0
D(J(X))/D(Y)=0
D(J(X))/D(T)=0
D(J(X))/D(X,X)=0
```


Не составляет труда проинтегрировать вручную полученную на заключительном этапе вычислений систему:

$$J(x) = C_1 x + C_2, \quad J(y) = C_3 y + \alpha(x,t), J(t) = C_1 t + C_4,$$

$$J(u) = \emptyset, \; J(v) = (C_3 - C_1)v + \alpha_t + u\alpha_x, \; J(H) = \emptyset.$$

Здесь C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) - произвольные постоянные, $\alpha = \alpha(x,t)$ - произвольная функция двух переменных. Допускаемая системой алгебра Ли $L = L^4 + L^\infty$ может быть записана в виде:

	J(x)	J(y)	J(t)	J(u)	J(v)	J(H)
σ_1	x	∅	t	∅	-v	∅
σ_2	1	∅	∅	∅	∅	∅
σ_3	∅	y	∅	∅	v	∅
σ_4	∅	∅	1	∅	∅	∅
σ_∞	∅	α	∅	∅	$\alpha_t + u\alpha_x$	∅

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ - базисные операторы конечномерной части алгебры и σ_∞ - операторы бесконечномерной части алгебры L .

Анализ дополнительной информации, выдаваемой программами на печать, показывает, что это результат имеет место при условии $C''C + (C')^2 \neq \emptyset$ /программы сообщают пользователю о проведенных сокращениях и принятых предположениях об отличии от нуля тех или иных выражений/. Требование $C''C + (C')^2 \neq \emptyset$ приводит к выражению $C(H) = (KH + L)^{1/2}$ с постоянными K и L. При следующем запуске задачи на счет положив $C(H) = (KH + L)^{1/2}$, решение задачи /8/ получим в следующем виде:

$$J(x) = C_1 x + C_2, \; J(y) = C_3 y + \alpha(x,t), \; J(t) = C_4 t + C_5,$$

$$J(u) = (C_1 - C_4)u, \quad J(v) = (C_3 - C_4)v + \alpha_t + u\alpha_x,$$

$$J(H) = 2(C_1 - C_4)H + \frac{2L}{K}(C_1 - C_4).$$

Как и ранее, C_i /$i = 1, 2, 3, 4, 5$/ - произвольные постоянные, $\alpha = \alpha(x, t)$ - произвольная функция двух переменных, но число произвольных постоянных равно 5.

Допускаемая системой алгебра Ли $L = L^5 + L^\infty$ может быть записана в виде:

	J(x)	J(y)	J(t)	J(u)	J(v)	J(H)
σ_1	x	Ø	Ø	u	Ø	2H+2L/K
σ_2	1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
σ_3	Ø	y	Ø	Ø	v	Ø
σ_4	Ø	Ø	t	−u	−v	−2H−2L/K
σ_5	Ø	Ø	1	Ø	Ø	Ø
σ_∞	Ø	a	Ø	Ø	$a_t + u a_x$	Ø

В случае представления системы определяющих уравнений в пассивном виде значительно упрощается процедура интегрирования. Интегрирование исходной системы определяющих уравнений зачастую приводит к ошибкам. Так, в /7,17/ неверно указан произвол в выборе решения и вид функции C(H), изменяющей этот произвол.

4. Уравнения стационарного пограничного слоя с моментными напряжениями /см. /1/, с.395/.

$$u_x + v_y = Ø\,; \quad p_y = Ø\,; \quad u u_x + v u_y + p_x - u_{yy} - \omega_y = 0;$$

$$u\omega_x + v\omega_y - \omega_{yy} = 0.$$

Первоначально получаем систему 39 определяющих уравнений на компоненты изовектора $J(x)$, $J(y)$, $J(u)$, $J(v)$, $J(p)$, $J(\omega)$, $J(\text{ь}1)$, $J(\text{ь}2)$, где $\text{ь}1 = u_y$ и $\text{ь}2 = \omega_y$. После приведения этой системы к пассивному виду в ней остается 36 уравнений:

$$J(x)_{\text{ь}2} = J(x)_{\text{ь}1} = J(x)_\omega = J(x)_p = J(x)_v = J(x)_u = J(x)_y = J(x)_{xx} = 0;$$

$$J(y)_{\text{ь}2} = J(y)_{\text{ь}1} = J(y)_\omega = J(y)_p = J(y)_v = J(y)_u = J(y)_{yy} = J(y)_{xy} = 0;$$

$$J(u) = u(J(x)_x - 2J(y)_x);\ J(v) = -vJ(y)_y + uJ(y)_x\,;$$

$$J(p)_{\text{ь}2} = J(p)_{\text{ь}1} = J(p)_\omega = J(p)_v = J(p)_u = J(p)_y = J(p)_x = 0;$$

$$J(p)_p = 2J(x)_x - 4J(y)_y\,;$$

$$J(\omega)_{\text{ь}2} = J(\omega)_{\text{ь}1} = J(\omega)_p = J(\omega)_v = J(\omega)_u = J(\omega)_y = J(\omega)_x = 0;$$

$$J(\omega)_\omega = -3J(y)_y + J(x)_x\,;$$

$$J(\text{ь}1) = \text{ь}1(J(x)_x - 3J(y)_y);\quad J(\text{ь}2) = \text{ь}2(J(x)_x - 4J(y)_y).$$

Интегрируя полученную систему, находим

$$J(x) = C_1 x + C_2, \quad J(y) = C_3 y + a(x), \quad J(u) = (C_1 - 2C_3)u,$$

$$J(v) = -C_3 v + a'u, \quad J(p) = (2C_1 - 4C_3)p + C_4,$$

$$J(\omega) = (C_1 - 3C_3)\omega + C_5, \quad J(\text{ь}1) = (C_1 - 3C_3)\text{ь}1,$$

$$J(\text{ь}2) = (C_1 - 4C_3)\text{ь}1,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 - произвольные постоянные, $a = a(x)$ - произвольная функция. Допускаемая системой алгебра Ли $L = L^5 + L^\infty$ ($a = a(x)$ - произвольная функция) имеет вид

	J(x)	J(y)	J(u)	J(v)	J(p)	J(ω)
σ_1	x	Ø	u	Ø	2p	ω
σ_2	1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
σ_3	Ø	y	−2u	−v	−4p	−3ω
σ_4	Ø	Ø	Ø	Ø	1	Ø
σ_5	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	1
σ_a	Ø	a	Ø	$a'u$	Ø	Ø

Поскольку компоненты $J(\text{ь}1)$ и $J(\text{ь}2)$ могут быть вычислены по остальным компонентам $J(\gamma)$, $\gamma = x$, u, v, p, ω, y, нет необходимости указывать для них вид инфинитезимальных операторов.

5. Уравнение, рассмотренное в /19/, имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial p}{\partial x}\right),\ k(x) \text{ - некоторая функция от } x. \qquad /9/$$

Решение системы определяющих уравнений запишем в виде

$$J(t) = C_1;\ J(x) = Ø\,;\ J(p) = C_2 p + a(x,t)\,;\ J(\text{ь}1) = C_2\,\text{ь}1 + a_x\,.$$

Здесь, как и ранее, C_1, C_2 - произвольные постоянные, $a(x,t)$ - любое частное решение уравнения /9/. Таким образом, уравнение /9/ является автоморфным, поскольку любое его решение может быть найдено из его группы инвариантности и произвольного частного решения. Если положить $k(x) = a + bx^2$, то результат оказывается точно таким же, и, следовательно, квадратичная функция является функцией общего положения для данного уравнения.

6. Система нелинейных уравнений Шредингера [20]:

$u_t = u_{xx} + u^2 v; \quad v_t = v_{xx} - uv^2.$

Допускаемая алгебра Ли имеет вид $L = L^6$:

	J(t)	J(x)	J(u)	J(v)
σ_1	2t	x	∅	-2v
σ_2	1	∅	∅	∅
σ_3	∅	2t	-xu	xv
σ_4	∅	1	∅	∅
σ_5	∅	∅	u	-v
σ_6	∅	∅	1	∅

7. Уравнения Прандтля двумерного нестационарного пограничного слоя /см.[1], с.129/:

$$u_t + uu_y + vu_y + p_x - u_{yy} = 0,$$
$$p_y = 0, \qquad /10/$$
$$u_x + v_y = 0.$$

Уравнения описывают движение несжимаемой жидкости вблизи непроницаемой твердой поверхности при больших числах Рейнольдса. Решение определяющих уравнений имеет вид

$$J(t) = 2C_1 t + C_2, \quad J(x) = C_3 x + \alpha(t), \quad J(y) = C_1 y + \beta(x, t),$$

$$J(u) = (C_3 - 2C_1) u + \alpha', \quad J(v) = -C_1 v + \beta_x u + \beta_t,$$

$$J(p) = (2C_3 - 4C_1) p - \alpha'' x + \gamma(t), \qquad J(ы1) = (C_3 - 3C_1) ы1,$$

и содержат три произвольных функции $\alpha(t)$, $\beta(x, t)$, $\gamma(t)$ и три произвольных постоянных. Отметим неточность, допущенную в [1], где функция β является функцией лишь одной переменной t. Допускаемая алгебра Ли $L = L^3 + L^\infty$ имеет следующий вид:

	J(t)	J(x)	J(y)	J(u)	J(v)	J(p)
σ_1	2t	∅	y	-2u	-v	-4p
σ_2	1	∅	∅	∅	∅	∅
σ_3	∅	x	∅	u	∅	2p
σ_α	∅	α	∅	α'	∅	$-\alpha'' x$
σ_β	∅	∅	β	∅	$\beta_x u + \beta_t$	∅
σ_γ	∅	∅	∅	∅	∅	γ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный выше комплекс программ позволяет автоматизировать процесс построения системы определяющих уравнений, ассоциированной с заданным уравнением /системой уравнений/. Система определяющих уравнений далее приводится к пассивному виду, что существенно упрощает процедуру интегрирования системы определяющих уравнений. С помощью программ комплекса определяется также замкнутость идеала, порожденного дифференциальными формами, связанными с исходным уравнением /системой уравнений/. Вмешательство пользователя необходимо при анализе полученной в процессе счета информации и при выборе нового варианта для запуска задачи на счет с учетом упрощений, полученных в результате предыдущего запуска задачи. Интегрирование построенной системы определяющих уравнений осуществляется вручную, но является достаточно простой задачей в связи с приведением системы к пассивному виду. В дальнейшем представляется целесообразным автоматизировать процесс проверки интегрируемости исходного уравнения /системы уравнений/, поиск вариантов замыкания алгебр Ли и других этапов исследования дифференциальных уравнений с использованием ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л.:ОГИЗ,1948.
3. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
4. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.

5. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984.
6. Flanders H. Differential forms with applications to the physical sciences. Academical Press, N.Y., 1963.
7. Edelen D.J.B. Isovector methods for equations of balance. S & N., Netherlands, 1980.
8. Kersten P. Infinitesimal symmetries and conserved currents for non-linear Dirac equations. Memorandum 398. Twente University of Technology, 1982.
9. Швачка А.Б., Яновски А.Б. ОИЯИ, Р5-82-239, Дубна, 1982.
10. Резников И.Г., Топунов В.Л., Швачка А.Б. Тезисы докладов Всес.конф."Системы для аналитических преобразований в механике". Горький:изд.Горьковского университета,1984,с.88.
11. Топунов В.Л., Швачка А.Б. Труды Межд.сов.по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применение в теоретической физике. ОИЯИ,Д11-85-791, Дубна, 1985, с.351.
12. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.:Мир, 1970.
13. Anderson R., Ibragimov N. Lie-Backlund Transformations in Applications. SIAM studies in Appl.Math. Philadelphia, 1979.
14. Резников И.Г., Стеллецкий В.И., Топунов В.Л. Тезисы Всес. конф. по методам трансляции. Новосибирск: изд.ВЦ СО АН СССР, 1981, с.174.
15. Романенко С.А. Система программирования рефал-2 для ЕС ЭВМ. Описание входного языка. М.: ИПМ АН СССР, 1987.
16. Романенко С.А. Препринт ИПМ АН СССР, М., № 200, 1986.
17. Edelen D.J.B. Comp. & Math.with Appl., 1980, 6,p.415.
18. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Метод обратного спектрального преобразования. М.: Мир, 1985.
19. Drummond R., Hoch A., Horgan B. - J.Phys.A:Math.Gen., 1986, 19, p.3871.
20. Михайлов А.В., Шабат А.Б. - ТМФ, 1986, 66, № 1, с.47.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1988 года.