

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

Ц 465

P11-88-831

С.Н.Димова, М.С.Касчиев, С.П.Курдюмов \*

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ  
ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
ГОРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ.  
НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ**

---

\*Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша  
АН СССР, г. Москва

Направлено в "Журнал вычислительной математики  
и математической физики"

**1988**

Работа является непосредственным продолжением работы [1], где предложен новый подход к вычислению неотрицательных решений нелинейной краевой задачи [1], [2]:

$$L(\theta) \equiv -\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta^\sigma \theta')' + \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \theta' + \theta - \theta^\beta = 0, \quad 0 < \xi < \infty, \quad (1)$$

$$\theta'(0) = 0, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad N = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$\theta(\infty) = 0, \quad \theta^\sigma \theta' = 0 \quad \text{всегда, когда } \theta = 0. \quad (3)$$

Решения задачи (1)–(3) определяют типы структур и волн, которые могут существовать в нелинейной среде, описываемой уравнением теплопроводности с источником

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau^{N-1} u^\sigma \frac{\partial u}{\partial \tau}) + u^\beta, \quad 0 < \tau < \infty, \quad t > 0. \quad (4)$$

Поэтому их называют собственными функциями (СФ) горения нелинейной среды [3].

Предложенный в работе [1] подход численного решения задачи (1)–(3) основан на сочетании непрерывного аналога метода Ньютона и метода конечных элементов. Он позволяет единообразно решать задачу во всех режимах горения:  $S$ -режим ( $\beta = \sigma + 1$ ),  $HS$ -режим ( $\beta < \sigma + 1$ ) и  $LS$ -режим ( $\beta > \sigma + 1$ ) в радиально-симметричном случае ( $N = 1, 2, 3$ ). Проведенное в [1] численное исследование в широком диапазоне изменения параметров указывает на высокую точность предложенного метода и на надежность получаемых результатов. Это обстоятельство позволило уточнить структуру СФ  $LS$ -режима и рассмотреть некоторые интересные предельные случаи:  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  и  $\sigma \rightarrow 0$  при  $\beta = \sigma + 1$ . В цилиндрически-симметричном и в сферически-симметричном случаях ( $N = 2, 3$ ) найдены СФ  $LS$ -режима новой структуры. Исследовано тоже поведение при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  предложенных в [6] "линейных приближений" к СФ.

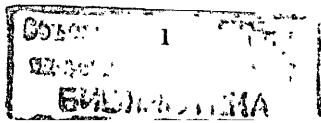
### 1. Предварительные сведения

Как показано в работе [4], при  $N = 1$ ,  $\beta = \sigma + 1$  задача (1)–(3) имеет не менее

$$K = -[\alpha] - 1, \quad \alpha = (\beta - 1) / (\beta - \sigma - 1) > 1, \quad (5)$$

различных решений, отличающихся по числу точек экстремума при  $\xi \in [0, \infty)$ . На основе линейного анализа [6] и некоторых численных экспериментов в работах [5], [6] было высказано предположение, что число различных решений при  $\beta > \sigma + 1$  и  $N \geq 1$  равно  $K + 1$ .

Из формулы (5) видно, что большое число СФ (и сл., большое число различных структур в среде) можно получить в двух случаях: при боль-



ших  $\beta$  и  $\sigma$  или при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ , независимо от величины  $\sigma$  и  $\beta$ . Мы исследуем второй случай, так как он более остроуствен на практике.

Из (5) следует, что

$$\alpha \rightarrow \infty \quad (K \rightarrow \infty) \quad \text{при} \quad \beta \rightarrow \sigma + 1 + 0.$$

Это хорошо согласуется с теоретическими исследованиями только в случае  $N = 1$ . Известно [2], что при  $\beta = \sigma + 1, N = 1$  задача (I)-(3) имеет счетное число различных решений. Каждое из них состоит из конечного числа элементарных точных решений [2]

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \left[ \frac{2(\sigma+1)}{\sigma+2} \cos^2 \frac{\pi \xi}{4} \right]^{1/\sigma}, & |\xi| < L_N/2, \quad L_N = \frac{2\pi\sqrt{\sigma+1}}{\sigma} \\ 0, & |\xi| > L_N/2, \end{cases} \quad (6)$$

расположенных на соседних фундаментальных длинах  $L_N$  и сдвинутых произвольно по оси  $\xi$  (при  $\beta = \sigma + 1$  и  $N = 1$  уравнение (I) автономное).

В случае  $\beta = \sigma + 1, N > 1$  доказано [2], что задача (I)-(3) имеет конечное монотонно убывающее решение  $\theta(\xi)$  и что она не имеет немонотонных решений. Поэтому очень интересным является вопрос: что происходит с немонотонными решениями при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ ; действительно ли их число растет неограниченно и как это согласуется с отсутствием немонотонных решений (в порождающей, хотя и не доказанной, их единственности) при  $\beta = \sigma + 1$ ?

Интересным и важным является также вопрос о поведении при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  "линейных приближений" [6], [1]:

$$\theta_i(\xi) = \begin{cases} 1 + \alpha_i y_N(\xi), & 0 \leq \xi \leq \bar{\xi}_i \\ c_i \xi^{-p}, & \bar{\xi}_i \leq \xi < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, K+1, \end{cases} \quad (7)$$

$$y_N(\xi) = F\left(-\alpha, \frac{N}{2}; \frac{1}{\alpha} \frac{\beta-1}{4} \xi^2\right), \quad p = 2/(\beta - \sigma - 1), \quad N = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$F(-\alpha, \beta; z)$  - вырожденная гипергеометрическая функция, а решениями  $\theta(\xi)$  задачи (I)-(3). Они построены путем оживания решений линеаризованного около гомотермического решения  $\theta(\xi) \equiv 1$  уравнения (I) с асимптотикой

$$\theta(\xi) \sim c_0 \xi^{-p}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad p = 2/(\beta - \sigma - 1). \quad (9)$$

В основе их получения лежит предположение о малых колебаниях решений  $\theta(\xi)$  в области их немонотонности около решения  $\theta(\xi) \equiv 1$ . Численные эксперименты показывают [6], [1], что для некоторых значений  $\sigma$  и  $\beta$  "линейные приближения" (7) отражают правильно (качественно и даже

количественно) характер немонотонности решений  $\theta(\xi)$ . В этих случаях они являются хорошими начальными приближениями для итерационных процессов нахождения всех различных решений задачи (I)-(3). При стремлении  $\beta$  к  $\sigma + 1 + 0$ , однако, колебания решений  $\theta(\xi)$  около единицы увеличиваются, особенно при  $N = 2, 3$ , поэтому вопросы о поведении "приближений" (7) и о правомерности их использования очень важны. Отметим, что конструкции, подобные (7), предложены [6] и использованы [6], [8] в качестве начальных приближений для итерационных процессов и для предсказания числа различных СФ в существенно двумерном случае. Поэтому детальное исследование радиально-симметричного случая прольет дополнительный свет и в существенно многомерном случае.

В п.3 (п.4) этой работы изложены результаты численного исследования поведения решений задачи (I)-(3) при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  и  $N = 1$  ( $N = 2, 3$ ). В п.5 приведены результаты аналитического и численного исследования "линейных приближений" (7). В п.6 показаны и прокомментированы некоторые интересные эффекты вычислительного процесса в случае  $\sigma \rightarrow 0, \beta = \sigma + 1, N = 1$ .

## 2. Обозначения

Пусть  $\theta_j(\xi), j = 1, 2, \dots, K+1$  - решения задачи (I)-(3) при фиксированных  $\sigma > 0, \beta > \sigma + 1, N = 1, 2$  или 3. Введем следующие обозначения:

$$M_{ij} = \theta_j(\xi_{ij}), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad \text{при} \quad j = 2k+1, \\ i = 1, 2, \dots, k \quad \text{при} \quad j = 2k,$$

для локальных максимумов СФ  $\theta_j(\xi)$ , где  $0 = \xi_{0j} < \xi_{1j} < \dots < \xi_{kj}$ ;

$$m_{ij} = \theta_j(\eta_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{при} \quad j = 2k, 2k+1,$$

для локальных минимумов  $\theta_j(\xi)$ , где  $0 = \eta_{1j} < \eta_{2j} < \dots < \eta_{kj}$ ;

$$M_1^{(N)} = \theta^{(N)}(0)$$

для максимума СФ  $\theta^{(N)}(\xi)$  S-режима ( $\beta = \sigma + 1$ ) при том же  $\sigma > 0, N = 1, 2$  или 3.

## 3. Предельный случай $N = 1, \beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$

Как уже было сказано в [1], наши численные эксперименты подтверждают выводы [5], [6], [2], что при  $\beta > \sigma + 1, N = 1$  максимумы старших СФ растут с отдалением от центра симметрии  $\xi = 0$ , а минимумы уменьшаются:

$$M_{0j} < M_{1j} < \dots < M_{kj}, \quad \text{для} \quad j = 3, 4, \dots, K+1, \quad j = 2k, 2k+1,$$

$$m_{1j} > m_{2j} > \dots > m_{kj}, \quad \text{для} \quad j = 4, 5, \dots, K+1, \quad j = 2k, 2k+1.$$

При  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ , однако, максимумы всех СФ выравниваются и стремятся к максимуму СФ для  $S$ -режима ( $\beta = \sigma + 1$ ) при том же  $\sigma$ , а минимумы стремятся к 0:

$$M_{ij} \rightarrow M^{(N)}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad m_{ij} \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, K+1.$$

При этом

$$\xi_{i+1,j} - \xi_{ij} \rightarrow L_s, \quad \eta_{i+1,j} - \eta_{ij} \rightarrow L_s, \quad \beta \rightarrow \sigma + 1 + 0.$$

На рис. I показаны первые 4 СФ для  $N = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\beta = 3.0002$  ( $a = 10001$ ). Точками отмечена СФ  $S$ -режима при  $\sigma = 2$ . В табл. I приведены значения  $M_{ij}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $i = 0, 1, \dots, j$  и  $m_{ij}$ ,  $j = 2, 3, 4$ ,  $i = 1, \dots, j$  для  $\sigma = 2$  и нескольких значений  $\beta$ , приближающихся к  $\sigma + 1 = 3$ , а также значение  $K$  для этих  $\sigma$  и  $\beta$ . В последней строке табл. I приведено значение (с 7 верными знаками) максимума СФ  $S$ -режима при  $\sigma = 2$ ,  $\beta = 3$ , вычисленное по точному решению (4).

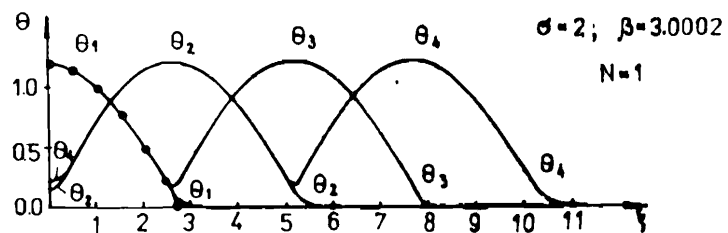


Рис. I

#### 4. Пределные случаи $N = 2, 3$ . $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$

На основе некоторых численных экспериментов в работах [5], [6] утверждается, что структура СФ не зависит от геометрии пространства. Наши численные эксперименты показывают, что это утверждение начинает нарушаться при приближении  $\beta$  к  $\sigma + 1$ :

- Для фиксированного  $\sigma$  и некоторых  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(\sigma, N)$  первый (центральный) максимум СФ с нечетными номерами  $\theta_{2j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  становится больше следующих и стремится к максимуму СФ  $S$ -режима ( $\beta = \sigma + 1$ ) для соответствующего значения  $N$ :

$$M_{0,2j+1}^{(N)} > M_{i,2j+1}^{(N)} \quad \text{при} \quad \beta < \beta_{ij}(\sigma, N), \quad i = 1, 2, \dots, j; \quad M_{0,2j+1}^{(N)} \rightarrow M^{(N)}.$$

- Для фиксированного  $\sigma$  и некоторых  $\beta_j^* = \beta_j^*(\sigma, N)$  первый (центральный) минимум СФ с четными номерами  $\theta_{2j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , становится

Таблица I ( $N = 1$ )

$\beta$	$K+1$	$M_{0,1}$	$m_{1,2}$	$M_{1,2}$	$M_{0,3}$	$M_{1,3}$	$m_{1,4}$	$m_{2,4}$	$M_{1,4}$	$M_{2,4}$
3.5	5	1.148	0.931	1.073	1.010	1.029	0.986	0.999	1.001	1.007
3.4	6	1.160	0.907	1.091	1.020	1.046	0.973	0.997	1.003	1.018
3.2	11	1.188	0.810	1.142	1.069	1.105	0.905	0.969	1.032	1.075
3.1	21	1.205	0.702	1.178	1.125	1.154	0.805	0.898	1.086	1.133
3.01	201	1.2243	0.403	1.219	1.211	1.216	0.477	0.560	1.202	1.213
3.001	2001	1.2245	0.228	1.2241	1.2232	1.2238	0.270	0.320	1.222	1.223
3.0002	10001	1.22472	0.152	1.2246	1.2244	1.2245	0.183	0.215	1.2242	1.2245
3										1.224745

равным нулю и для  $\beta < \beta_j^*(\sigma, N)$  все СФ  $\theta_{2j}(\xi)$  имеют нулевой участок в центре:

$$\theta_{2j}(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_j^*, \quad \xi_j^* = \xi_j^*(\sigma, \beta, N), \quad j=1, 2, \dots \quad (I0)$$

СФ  $\theta_{2j}(\xi)$  для  $\sigma = 2$  и некоторых различных значений  $\beta$  показаны на рис.2. Наши численные эксперименты показывают: все  $\xi_j^*$  растут, когда  $\beta$  приближается к  $\sigma + 1$ ; все максимумы  $M_{i, 2j}^{(N)}$  стремятся к максимуму СФ для S-режима при том же  $\sigma$  и  $N = 1$ :

$$M_{i, 2j}^{(N)} \rightarrow M^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, j;$$

все минимумы  $m_{i, 2j}$  уменьшаются монотонно.

Так что все СФ  $\theta_{2j}$ , "уходя на бесконечность" при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ , стремятся к СФ  $\theta^{(1)}(\xi)$  S-режима (для того же  $\sigma$ ,  $N = 1$ ,  $\beta = \sigma + 1$ ), состоящей из  $j$  элементарных решений (6).

Поведение СФ  $\theta_{2j}(\xi)$  при  $N = 3$ ,  $\sigma = 2$  и различных  $\beta$ , приближающихся к  $\sigma + 1$ , показано на рис.3, и оно аналогично для всех СФ  $\theta_{2j+1}^{(N)}$ : первый минимум уменьшается и для  $\beta < \beta_j^*(\sigma, N)$  СФ  $\theta_{2j+1}$  как бы распадается на две части: первая из них совпадает (с точностью численного метода, см. [1]) с СФ  $\theta_1^{(N)}$ , вторая - с СФ  $\theta_{2j}^{(N)}$ . На рис.4 показаны первые пять СФ для  $\sigma = 2$ ,  $N = 2$ ;  $\beta = 3.02$ , а на рис.5 - для  $\sigma = 2$ ,  $N = 3$ ,  $\beta = 3.0(3)$ . В табл.2 ( $N = 2$ ) и табл.3 ( $N = 3$ ) приведены значения максимумов  $M_{ij}$  и минимумов  $m_{ij}$  (или значения  $\xi_1^*$ ,  $\xi_2^*$ ) для первых четырех СФ для  $\sigma = 2$  и нескольких значений  $\beta$ , близких  $\sigma + 1 = 3$ . В последних строках таблиц 2 и 3 приведены значения максимумов СФ S-режима при  $\sigma = 2$ ,  $\beta = 3$  и  $N = 2, 3$  соответственно.

Чтобы подтвердить возможность существования СФ  $\theta_{2j}(\xi)$  новой структуры

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi^*(\sigma, \beta, N), \quad \theta^\sigma \theta'(\xi^*) = 0, \\ \theta(\xi) &> 0 \quad \text{при} \quad \xi > \xi^* > 0, \end{aligned} \quad (II)$$

нами было найдено следующее разложение решений задачи (I)-(3) при  $\sigma > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $\beta > \sigma + 1$ ,  $\xi \rightarrow \xi^* + 0$ :

$$\theta(\xi) \sim C(\xi - \xi^*)^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{\sigma}, \quad C = \left( \frac{(\beta - \sigma - 1)\sigma}{2} \xi^* \right)^{1/\sigma}. \quad (I2)$$

Наоборот, легко показать, что в случае  $\sigma > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $\beta > \sigma + 1$  не существуют константы  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$  такие, что имело бы место разложение

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &\sim C(\xi^* - \xi)^\alpha, \quad \xi \rightarrow \xi^* - 0, \\ \theta(\xi) &> 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi < \xi^*, \quad \theta^\sigma \theta'(\xi^*) = 0. \end{aligned}$$

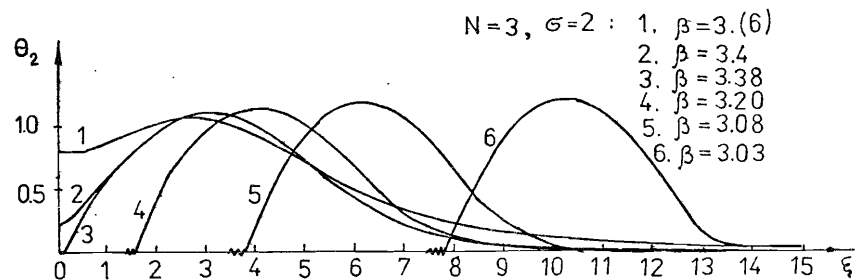


Рис.2

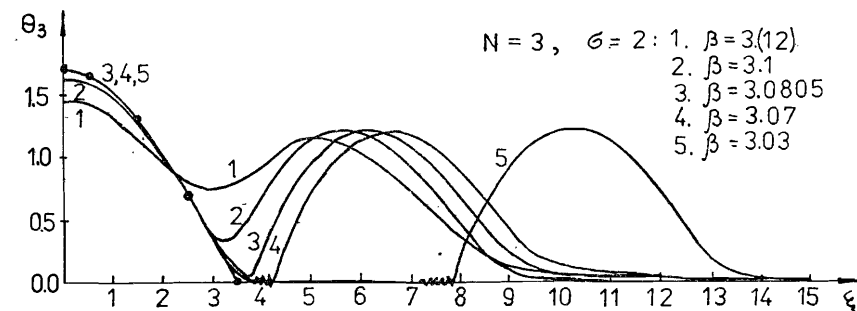


Рис.3

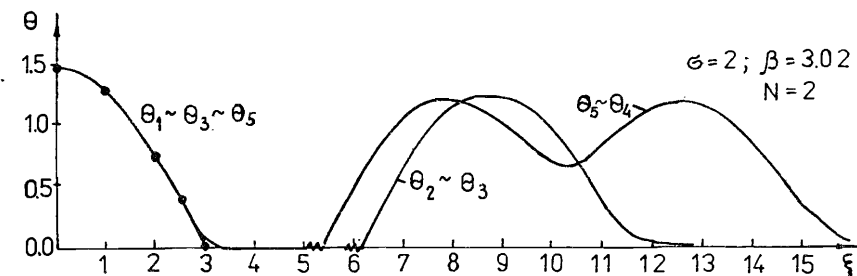


Рис.4

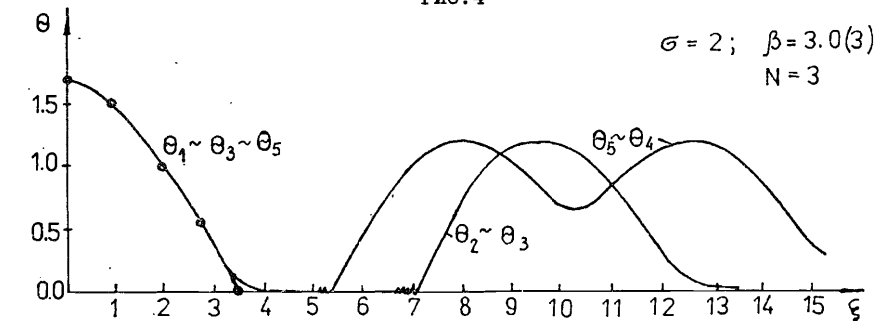


Рис.5

Таблица 2 (N=2)

$\beta$	K+1	M <sub>01</sub>	$m_{12}/\zeta_1^*$	M <sub>12</sub>	M <sub>03</sub>	M <sub>13</sub>	M <sub>13</sub>	$m_{13}$	$m_{14}/\zeta_2^*$	$m_{24}$	M <sub>14</sub>	M <sub>24</sub>
3.5	5	I.303	0.795	I.087	I.0319	I.0324	0.981	0.981	0.99806	0.99799	I.0011	I.0075
3.4	6	I.328	0.693	I.108	I.063	I.052	0.962	0.962	0.990	0.992	I.005	I.020
3.(3)	7	I.345	0.577	I.125	I.096	I.069	0.941	0.941	0.977	0.984	I.011	I.034
3.(2)	10	I.378	0.047	I.157	I.187	I.109	0.872	0.872	0.906	0.950	I.039	I.071
3.2	11	I.386	$\zeta_1^* = 0.4$	I.163	I.213	I.119	0.849	0.849	0.874	0.937	I.050	I.082
3.1	21	I.421	$\zeta_1^* = 1.5$	I.192	I.363	I.176	0.639	0.639	0.327	0.822	I.129	I.143
3.05	41	I.441	$\zeta_1^* = 3.1$	I.208	I.441	I.208	0.114	0.114	$\zeta_2^* = 1.45$	0.703	I.177	I.180
3.02	101	I.454	$\zeta_1^* = 6.15$	I.218	I.454	I.218	-	-	$\zeta_2^* = 4.4$	0.565	I.205	I.205
3.01	201	I.458	$\zeta_1^* = 9.7$	I.221	I.458	I.221	-	-	$\zeta_2^* = 7.85$	0.477	I.215	I.215
3		I.643										

Таблица 3 (N=3)

$\beta$	K+1	M <sub>01</sub>	$m_{12}/\zeta_1^*$	M <sub>12</sub>	M <sub>03</sub>	M <sub>13</sub>	M <sub>13</sub>	$m_{13}$	$m_{14}/\zeta_2^*$	$m_{24}$	M <sub>14</sub>	M <sub>24</sub>
3.5	5	I.466	0.560	I.096	I.066	I.035	0.975	0.975	0.996	0.998	I.002	I.008
3.4	6	I.504	0.195	I.117	I.131	I.056	0.950	0.950	0.979	0.991	I.006	I.021
3.(3)	7	I.531	$\zeta_1^* = 0.6$	I.133	I.201	I.077	0.920	0.920	0.946	0.981	I.015	I.036
3.(2)	10	I.584	$\zeta_1^* = 1.45$	I.160	I.382	I.122	0.815	0.815	0.741	0.940	I.053	I.076
3.2	11	I.595	$\zeta_1^* = 1.7$	I.166	I.429	I.133	0.777	0.777	0.629	0.925	I.067	I.087
3.1	21	I.651	$\zeta_1^* = 3.2$	I.194	I.649	I.192	0.293	0.293	$\zeta_2^* = 1.55$	0.813	I.142	I.144
3.08	26	I.663	$\zeta_1^* = 3.8$	I.199	I.663	I.199	-	-	$\zeta_2^* = 2.20$	0.775	I.157	I.157
3.05	41	I.683	$\zeta_1^* = 5.4$	I.208	I.683	I.208	-	-	$\zeta_2^* = 3.75$	0.699	I.182	I.179
3.0(3)61	I.694	$\zeta_1^* = 7.1$	I.214	I.694	I.694	I.214	-	-	$\zeta_2^* = 5.45$	0.636	I.196	I.193
3.0286	71	I.697	$\zeta_1^* = 7.8$	I.215	I.697	I.215	-	-	$\zeta_2^* = 6.10$	0.613	I.200	I.197
3.		I.717										

Существование СФ (II) с нулевыми участками в центре было проверено численно предложенным в [I] методом, путем вычисления СФ  $\Theta_2(\xi)$  и  $\Theta_3(\xi)$ ,  $N = 2, 3$  на пяти вложенных сетках и исходя из трех видов начальных приближений для использованного нами итерационного процесса ( $C^2, C^I$  и приближения (37)). Результаты показывают, что вид каждой из функций  $\Theta_{2j}(\xi)$  не зависит от начального приближения, а её значения на сетках, как и положения точек  $\xi_j^*$  (см. (10)), совпадают с точностью численного метода (см. [I]) и с шагом мельчайшей сетки соответственно. Кроме того, для проверки был использован и метод стрельбы (это было предложено нам В.А. Галактионовым). Проверка состояла в следующем (она была проведена для СФ  $\Theta_2(\xi)$  при  $N = 2, 3$ ).

По найденному изложенным в [I] методом численному значению  $\xi_1^*$  из разложения (I2) находилось значение решения  $\Theta_2(\xi)$  в точке  $\xi_1^* + h$  ( $h$  - шаг сетки), а потом по трехточечной разностной схеме оно вычислялось до точки максимума  $\xi_{1,2}$ :  $\Theta_2(\xi_{1,2}) = M_{1,2}$ . Потом по найденной в численном эксперименте константе  $C_\infty$  в асимптотике (9) и значению решения в точке  $l \gg 0$  (см. [I]) по разложению (9) находилось решение  $\Theta_2(\xi)$  в точке  $l - h$  и по трехточечной схеме пристреливалось значение максимума  $M_{1,2}$ . Результаты пристрелки подтверждают существование таких решений.

Вопрос о поведении СФ  $\Theta_{2j+1}^{(N)}(\xi)$  при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ ,  $N = 2, 3$ , остается открытым. Наша гипотеза такая: при каждом фиксированном значении  $\sigma$  существует такое значение  $\beta_j^{**} = \beta_j^{**}(\sigma, N)$ , что при  $\sigma + 1 < \beta < \beta_j^{**}$ , СФ  $\Theta_{2j+1}^{(N)}(\xi)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , вырождается в  $\Theta_1^{(N)}(\xi)$ ; в процессе счета эта вырожденная СФ "сшивается" с СФ  $\Theta_{2j}^{(N)}(\xi)$ . Это "сшивание" возможно, потому что "хвост" СФ  $\Theta_1^{(N)}(\xi)$  (см. (9)) при  $\beta \sim \sigma + 1$ ,  $\beta > \sigma + 1$  воспринимается в счете как ноль и через него  $\Theta_1^{(N)}(\xi)$  "сшивается" с  $\Theta_{2j}^{(N)}(\xi)$  (напомним, что  $\Theta \equiv 0$  тоже является решением уравнения (I)).

"Уходящие" на бесконечность при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  СФ  $\Theta_{2j}$  и гипотеза о вырождении всех СФ  $\Theta_{2j+1}$  в  $\Theta_1$ , которая стремится к СФ  $S'$ -режима ( $\beta = \sigma + 1$ ), хорошо согласуются с уже упомянутым во введении фактом, что при  $\beta = \sigma + 1$ ,  $N > 1$  задача (I)-(3) не имеет немотонных решений.

С другой стороны, на такую интерпретацию численных результатов наводит и следующая запись уравнения (I):

$$-(\theta^\sigma \theta')' - \frac{N-1}{\xi} \theta^\sigma \theta' + \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \theta' + \theta - \theta^\beta = 0, \quad 0 < \xi < \infty. \quad (I3)$$

Видно, что при  $\xi \rightarrow \infty$  переносный член  $(N-1)\theta^\sigma \theta' / \xi$  стремится к 0 и уравнение (I3), а сл. и (I), стремится к уравнению для случая  $N = 1$ . Кроме того, при  $\beta > \sigma + 1$  переносные члены имеют разные знаки. Вероятно, при каком-то  $\beta = \beta_j^{**}(\sigma, N)$  для одних и тех же  $\xi$  их сумма меняет знак и это определяет вырождение СФ  $\Theta_{2j+1}(\xi)$ . Так что поведение СФ  $\Theta_{2j+1}(\xi)$  при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  надо исследовать аналитически. Нам кажется, что эту задачу надо поставить как задачу теории бифуркаций.

При сделанной нами гипотезе о вырождении СФ с нечетными номерами  $\Theta_{2j+1}^{(N)}(\xi)$  в первую  $\Theta_1^{(N)}(\xi)$ ,  $N = 2, 3$ , число СФ при  $\beta < \beta_j^{**}(\sigma, N)$ ,  $\beta > \sigma + 1$  уже не дается формулой (4). Число СФ при фиксированных  $\sigma$  и  $\beta$ ,  $\beta \sim \sigma + 1$ , все же остается большим из-за вклада СФ с четными номерами  $\Theta_{2j}^{(N)}(\xi)$ , которые только сдвинулись по оси  $\xi$ , пока некоторые из СФ с нечетными номерами уже выродились в  $\Theta_1^{(N)}(\xi)$ .

#### 5. Поведение "линейных приближений" (7) при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$

Исходя из известного предельного соотношения ([7], стр. 323, I3.3.2):

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ F(a, b; -\frac{z}{a}) / \Gamma(b) \right\} = z^{\frac{1-b}{2}} Y_{b-1}(2\sqrt{z}), \quad (I4)$$

где  $F(a, b; x)$  - вырожденная гипергеометрическая функция,  $\Gamma(b)$  - гамма-функция и  $Y_\nu(x)$  - бesselева функция первого рода, для пределов при  $a \rightarrow \infty$  решений  $y_N(\xi)$  линейаризованного уравнения получаем:

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= \lim_{a \rightarrow \infty} y_1(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F(-a, 0.5; \frac{1}{a} \frac{\beta-1}{4} \xi^2) = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, 0.5; -\frac{1}{a} \frac{\beta-1}{4} \xi^2) = \cos(\sqrt{\sigma} \xi) \quad (I5) \end{aligned}$$

$$Y_2(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} y_2(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F(-a, 1.0; \frac{1}{a} \frac{\beta-1}{4} \xi^2) = Y_0(\sqrt{\sigma} \xi) \quad (I6)$$

$$Y_3(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} y_3(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F(-a, 1.5; \frac{1}{a} \frac{\beta-1}{4} \xi^2) = \frac{\sin(\sqrt{\sigma} \xi)}{\sqrt{\sigma} \xi}. \quad (I7)$$

Как видно из (I5)-(I7), расстояния  $S$  между соседними нулями каждой из функций  $Y_N(\xi)$  равны величине  $S = \pi / \sqrt{\sigma}$ .

Так как расстояния между нулями функций  $y_N(\xi)$  являются расстояниями между  $C^1$ -точками сшивания  $\xi_i$  из (7) (а в пределе  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  и между  $C^2$ -точками сшивания), то

$$\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i \rightarrow \pi/\sqrt{\sigma}, \quad \beta \rightarrow \sigma+1+0.$$

Обозначим через  $\bar{\xi}_i$   $i$ -ю точку пересечения СФ  $\theta_i$  с пространственно-однородным решением  $\theta(\xi) \equiv 1$  (точка  $\bar{\xi}_i$  -аналог точки сшивания  $\xi_i$  в (7)).

Численные эксперименты показывают, что при  $N=1$  расстояния  $\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i$  тоже стремятся к одной и той же величине

$$\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i \rightarrow L_S/2 = \pi\sqrt{\sigma+1}/\sigma, \quad \beta \rightarrow \sigma+1+0,$$

но она всегда больше  $s = \pi/\sqrt{\sigma}$  и может существенно отличаться от него при больших  $\sigma$  или при  $\sigma \sim 0$ . Для констант  $\mathcal{L}_i$  в (7) при  $N=1$  имеем:

$$\mathcal{L}_{2i} \rightarrow -1+0 \quad \text{для СФ } \theta_{2i}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\mathcal{L}_{2i+1} \rightarrow 1-0 \quad \text{для СФ } \theta_{2i+1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Эти соотношения вместе с (15) показывают, что "линейные приближения" (7) в случае  $N=1$  остаются положительными при  $\beta \rightarrow \sigma+1+0$ . Они все же правильно передают характер немонотонности СФ и могут быть использованы в качестве начальных приближений для итерационного процесса нахождения всех различных СФ вплоть до  $\beta = \sigma+1$ . В итерационном процессе начальное приближение (7) как бы растягивается по оси и стремится к соответствующей СФ.

При  $N=2$  и  $N=3$ , как показывают численные эксперименты, константы  $\mathcal{L}_i$  из (7) стремятся при  $\beta \rightarrow \sigma+1+0$  к разным числовым значениям, большим по модулю единицы. Поэтому "линейные приближения" (7) для нескольких первых СФ, начиная с  $\theta_2(\xi)$  (все большее их число при  $\beta \rightarrow \sigma+1+0$ ), принимают отрицательные значения. Кроме того,

$$\bar{\xi}_{2j} \rightarrow \infty, \quad \beta \rightarrow \sigma+1+0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Отметим, однако, что отрицательные значения "линейных приближений"  $\tilde{\theta}(\xi)$  появляются до того, как СФ  $\theta_{2j}(\xi)$  принимают вид (10) или СФ  $\theta_{2j+1}(\xi)$  вырождаются. Для таких значений  $\sigma$  и  $\beta$  в качестве начальных приближений для итерационного процесса можно использовать функции  $|\theta_i(\xi)|^{1/2}$ , или приближения (37) из [1], которые всегда положительны. При значениях  $\sigma$  и  $\beta$ , для которых СФ  $\theta_{2j}$  имеет структуру (10) с большой "пустотой" в центре, в качестве начального приближения удобнее взять вычисленную уже СФ  $\theta_{2j}$  для некоторого большего  $\beta$  (с меньшей "пустотой" в центре). В процессе итераций начальное приближение перестраивается, передвигаясь вправо.

## 6. Предельный случай $\sigma \rightarrow 0, \beta = \sigma+1$

Как видно из (6), при  $N=1$  фундаментальная длина растет неограниченно при  $\sigma \rightarrow 0$  :  $L_S^{(1)} \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow 0$ .

Приближенные формулы из [1] для  $L_S^{(N)}$ ,  $N=2,3$ , тоже дают  $L_S^{(N)} \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow 0$ .

В численном эксперименте мы наблюдали следующий интересный эффект.

- В случае  $N=1$  при значениях  $\sigma$ , близких к 0, на одной фундаментальной длине  $L_S$  мы получали несколько решений (6), сдвинутых ими не по оси  $\xi$  (напомним, что в этом случае  $y=1$  - автономное). Число этих решений зависит от  $L_S$  и от начального приближения. Объяснение этого эффекта следующее: при  $\sigma \sim 0$  интервал  $I_\varepsilon$ , где  $\theta(\xi) > \varepsilon$  ( $\varepsilon$  - достаточно малое), существенно меньше  $L_S$ ; если начальное приближение достаточно большое на всем  $L_S$ , то на почти нулевом "хвосте" основного решения (6) сшивается еще одно или несколько таких решений; если начальное приближение положительное на интервале, не большем  $I_\varepsilon$ , то получается только основное решение (6).

На рис.6,7 показаны полученные в счете решения при  $N=1$ ,  $\sigma=0,1$  и  $\sigma=0,01$  соответственно. При  $\sigma=0,1$  на  $L_S$  можно считать не

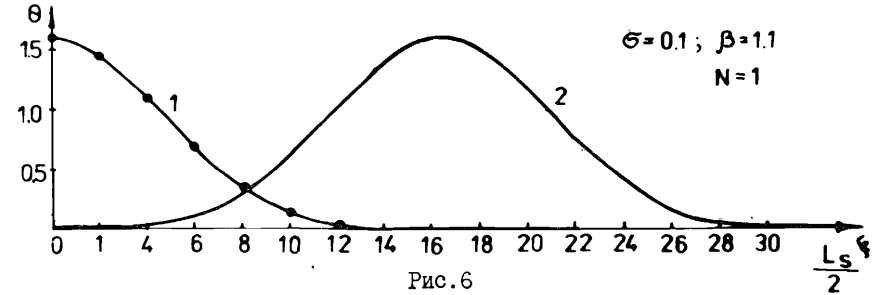


Рис.6

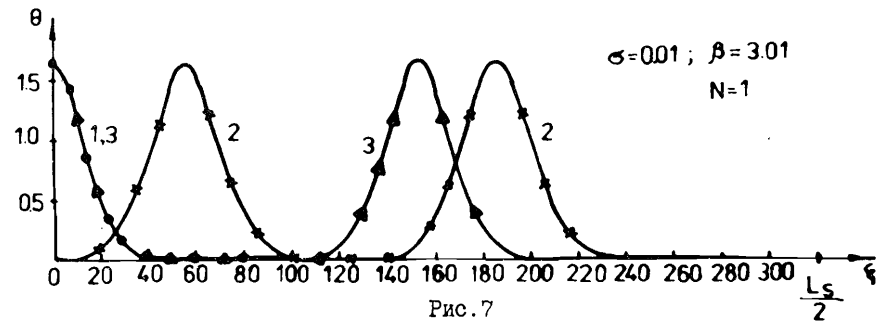


Рис.7



больше двух (сдвинутых) основных решений (6). При  $\sigma = 0,01$  спиваются уже 2,3 или 4 таких решения, в зависимости от начального приближения и даже от шага сетки  $h$ .

В случаях  $N=2,3$  уравнение (I) неавтономное и поэтому в счете получается только одно решение, независимо от носителя начального приближения и от шага сетки  $h$ .

### 7. Заключение

Численным экспериментом на основе разработанного в (I) метода уточнена структура СФ  $LS$ -режима и исследовано стремление  $LS$ -режима к  $S$ -режиму в радиально-симметричном случае. Выявлено существенное отличие плоского случая ( $N=1$ ) от цилиндрически- и сферически-симметричных ( $N=2,3$ ).

В последних двух случаях получены численно СФ новой структуры в виде поверхностей вращения с дыркой в середине. Выявлено различие в поведении СФ с четными номерами ( $\Theta_{2j}(\xi)$ ) и СФ с нечетными номерами ( $\Theta_{2j+1}(\xi)$ ) при стремлении  $LS$ -режима к  $S$ -режиму. Гипотеза о вырождении СФ  $\Theta_{2j+1}^{(N)}(\xi)$  с нечетными номерами в СФ  $\Theta_1^{(N)}(\xi)$  при  $N=2,3$  нуждается в подтверждении детальным аналитическим исследованием.

Полученные результаты указывают направление исследований в существенно многомерном случае.

Изучение эволюции во времени решений  $\Theta(\xi)$  будет предметом следующей работы.

Авторы выражают глубокую благодарность В.А.Галактионову, Ю.П.Попову, С.А.Посашкову, С.И.Серджиковой за очень полезные обсуждения в ходе работы.

### Литература

1. С.Н.Димова, М.С.Касчиев, С.П.Курдюмов. Препринт ОИЯИ, Р11-88-473, Дубна, 1988.
2. А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
3. Г.Г.Еленин, С.П.Курдюмов. Препринт ИММатем. АН СССР, М., № 106, 1977.
4. М.М.Адъитов, Ю.А.Клоков, А.П.Михайлов. ДУ, 1983, т.19, № 7, с. 1107-1114.
5. С.П.Курдюмов, Е.С.Куркина, П.Г.Малинецкий. Препринт ИММатем. АН СССР, М., 1979, № 16.

6. С.П.Курдюмов, Е.С.Куркина, А.Б.Потапов. Препринт ИММатем. АН СССР, М., 1982, № 75.
7. Справочник по специальным функциям. Ред. Абрамовиц М., Стиган Н. М.: Наука, 1979.
8. С.П.Курдюмов, Е.С.Куркина, А.Б.Потапов, А.А.Самарский. ЖВМ и МФ, 1986, т.26, №8, с.1189-1205.

Рукопись поступила в издательский отдел  
1 декабря 1988 года.