объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

С 324

Р11-88-810

С.И.Сердюкова

ОЦЕНКА "ТЕНИ" ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НАКЛОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПОСТОЯННОГО ЗНАКА

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1988

Если система дифференциальных уравнений гиперболического типа имеет характеристики одного знака, то при решении краевой задачи с двумя границами требуется задавать граничные условия лишь на одной из границ [1], на той, из которой выходят характеристики. Для определенности будем считать, что все характеристики выходят из левой границы. В таком случае решение задачи с двумя границами совпадает с решением левой краевой задачи. Если задача решается методом конечных разностей, могут потребоваться граничные условия на обеих границах. На правой границе ставятся дополнительные граничные условия. При этом возникает задача об оценке влияния дополнительных граничных условий. Пусть порядок аппроксимации левой разностной краевой задачи /р.к.з./ есть $O(h^q)$, h - шаг по x, "ϵ-тенью" дополнительных граничных условий назовем область, вне которой решение р.к.з. с двумя границами отличается от решения левой р.к.з. на величину порядка $O(h^{q+\epsilon})$. Предполагается, что левая и правая р.к.з. устойчивы в С. Доказано, что при $n \le \exp(bN)$, $N = h^{-1}$, "ϵ-тенью" является пограничный слой $|\nu - N| = O(\ln N)$. Для таких n ограничены степени G^n оператора перехода от слоя к слою р.к.з. с двумя границами [2]. Оценка $\|G^n\| \le c$ справедлива для всех $n \ge 0$ при дополнительном ограничении: левая и правая р.к.з. не должны иметь точек спектра на единичной окружности. В таком случае удается доказать, что на высоте $n = O(N)$ "ϵ-тень" исчезает. Далее последовательно приводится математическая постановка задачи. Доказываются критерии устойчивости в С р.к.з. Строится интегральное представление Δ_ν^n уклонения решения р.к.з. с двумя границами от решения соответствующей левой р.к.з. Доказываются оценки Δ_ν^n в С, из которых следуют оценки "ϵ-тени".

Рассматривается разностная краевая задача

$$u_\nu^{n+1} = \sum_{\ell=-r1}^{r2} A_\ell u_{\nu-\ell}^n, \quad n \ge 0, \quad \nu = 1, \dots, N-1, \qquad /1/$$

$$u_\nu^0 = f_\nu,$$

$$u_i^n = \sum_{\ell=1}^{s1} B_{\ell i} u_\ell^n, \quad i = 0, \dots, -r1+1,$$

$$u_{N+j}^n = \sum_{\ell=1}^{s2} C_{\ell j} u_{N-\ell}^n, \quad j = 0, \dots, r2-1. \qquad /2/$$

БИБЛИОТЕКА

Здесь u_ν^n - векторы размерности k; A_ℓ, $B_{\ell i}$, $C_{\ell j}$ - постоянные матрицы. Предполагается, что $r1 \geq 1$, $r2 \geq 1$; матрицы A_{-r1}, A_{r2} невырожденные.

Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство последовательностей $u = (u_{-r1+1}, \ldots, u_\nu, \ldots, u_{N+r2-1})$, удовлетворяющих граничным условиям /2/. Норма в $\mathcal{H}$ дается соотношением $\|u\| = \max\limits_{1 \leq \nu \leq N-1} |u_\nu|$.

Под $|u_\nu|$ понимается максимум модулей компонент вектора u_ν.

Задача /1/, /2/ может быть записана в операторном виде: $u^{n+1} = Gu^n$. Оператор перехода от слоя к слою G действует из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$.

Задача /1/, /2/ устойчива в C, если $\exists$ $c > 0$ такая, что для всех $u^\circ \subset \mathcal{H}$ и всех $n \geq 0$ $\|u^n\| \leq c\|u^\circ\|$. Для устойчивости /1/, /2/ необходимо, чтобы были устойчивы соответствующие задача Коши[3], левая и правая р.к.з. Далее доказываются критерии устойчивости в С р.к.з. В процессе доказательства строится математический аппарат, необходимый для оценки "ϵ-тени".

Пусть $\mathfrak{D}$ - характеристическая матрица:

$$\mathfrak{D} = \sum_{\ell=-r1}^{r2} A_\ell e^{i\ell\phi},$$

λ_i - ее собственные значения. Из устойчивости задачи Коши следует, что $|\lambda_i(\phi)| \leq 1$ для всех $0 \leq \phi \leq 2\pi$. При этом $|\lambda_i(\phi)| = 1$ лишь в изолированных определяющих точках $e^{i\phi_0}$. В окрестности определяющих точек λ_i допускают разложение

$$\lambda_i(\phi) = \exp\{i\psi_0 + i\gamma_i(\phi - \phi_0) + (i\alpha_i - \beta_i)(\phi - \phi_0)^{2\mu_i} + \ldots\}. \qquad /3/$$

Здесь ψ_0, ϕ_0, α_i вещественные, $\beta_i > 0$, μ_i целые. Предполагается, что все $\gamma_i < 0$. Для простоты изложения далее рассматривается единственная определяющая точка $\phi_0 = 0$. Полагаем также $\psi_0 = 0$. Из доказательства будет ясно, что результат верен в общем случае.

Левая р.к.з., отвечающая /1/, /2/, имеет вид

$$v_\nu^{n+1} = \sum_{\ell=-r1}^{r2} A_\ell v_{\nu+\ell}^n, \quad n \geq 0, \quad \nu \geq 1, \qquad /4/$$

$$v_i^n = \sum_{\ell=1}^{s1} B_{\ell i} v_\ell^n, \qquad i = 0, \ldots, -r1+1. \qquad /5/$$

Пусть /4/, /5/ аппроксимирует непрерывную к.з. с погрешностью $O(h^q)$. Если /4/, /5/ устойчива в C, то решение /4/, /5/ отличается от решения исходной непрерывной к.з. на $O(h^q)$. Назовем "ϵ-тенью" область переменных ν, n, вне которой

$$|u_\nu^n - v_\nu^n| = O(h^{q+\epsilon}).$$

Вне области "ϵ-тени" решение /1/, /2/ отличается от решения непрерывной краевой задачи с двумя границами на ту же величину $O(h^q)$, что и решение /4/, /5/. Напомним, что в непрерывном случае решение к.з. с двумя границами совпадает с решением левой к.з. Оценки $\Delta_\nu^n = u_\nu^n - v_\nu^n$ находятся из интегрального представления u_ν^n, v_ν^n через операторы резольвенты. Начнем с v_ν^n. Аналогично предыдущему введем в рассмотрение гильбертово пространство полубесконечных последовательностей векторов $v = \{v_\nu\}$, $\nu \geq -r1+1$, удовлетворяющих /5/, с нормой $\|v\| = \max\limits_{\nu \geq 1} |v_\nu|$. Задача /4/, /5/ записывается в операторном виде $v^{n+1} = Gv^n$. Точка комплексной плоскости z_0 называется точкой спектра G, если $\exists\, v^\circ \subset \mathcal{H}$, $\|v^\circ\| \neq 0$, такая, что $Gv^\circ = z_0 v^\circ$. Решение /4/, /5/ можно представить[4] в виде интеграла

$$v^n = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (G - zI)^{-1} z^n dz\, v^\circ. \qquad /6/$$

Контур Γ охватывает все точки спектра G, особые точки резольвенты $(G - zI)^{-1}$. Для устойчивости необходимо, чтобы спектр G лежал в единичном круге $|z| \leq 1$. Построение $(G - zI)^{-1}$ в окрестности $|z| = 1$ связано с решением системы

$$\sum_{\ell=-r1}^{r2} A_\ell u_{\nu+\ell} - zu_\nu = f_\nu, \quad \nu \geq 1,$$

$$u_i = \sum_{\ell=1}^{s1} B_{\ell i} u_\ell, \quad i = 0, -1, \ldots, -r1+1. \qquad /7/$$

Здесь $\{u_\nu\}$ искомая, а $\{f_\nu\}$ заданная последовательности из $\mathcal{H}$. После замены

$$Y_\nu = (u_{\nu + r2 - 1}, \dots, u_\nu, \dots, u_{\nu - r1})^T, \quad \dim Y_\nu = r = (r1 + r2)k,$$

система /7/ принимает вид

$$Y_{\nu+1} = M(z) Y_\nu + F_\nu, \quad \nu \geq 1,$$
$$[0, I] Y_1 = \sum_{\ell = r1 + 1}^{s1+1} [0, B_\ell] Y_\ell. \qquad /8/$$

Матрицы B_ℓ составлены из исходных краевых матриц $B_{\ell i}$. Через $M(z)$ обозначена резольвентная матрица

$$M(z) = \begin{bmatrix} -A_{r2}^{-1} \cdot A_{r2-1} & \dots & -A_{r2}^{-1} \cdot (A_0 - zI) & \dots & -A_{r2}^{-1} \cdot A_{-r1} & \\ I & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения /с.з./ $M(z)$ удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\mathrm{Det}\left(\sum_{\ell = -r1}^{r2} A_\ell \kappa^\ell - zI \right) = 0.$$

Из устойчивости задачи Коши следует [4], что при $|z| \geq 1$ $M(z)$ имеет $r1 \cdot k$ с.з., меньших по модулю 1, и равно $r2 \cdot k$ с.з., больших по модулю 1. Обозначим их через κ_i, $i = 1, \dots, r1 \cdot k$ и κ_j, $j = r1 \cdot k + 1, \dots, r$ соответственно. Из условия $\gamma_i < 0$ следует, что при достаточно малом δ $|\kappa_j| > d^{-1} > 1$ для $|z| \geq 1 - \delta$. Пусть характеристическая матрица имеет ℓ с.з. λ_i, $\lambda_i(1) = 1$. Им отвечает ℓ с.з. резольвентной матрицы κ_i, $\kappa_i(1) = 1$. Пусть это последние из $\kappa_1, \dots, \kappa_{r1 \cdot k}$. Остальные $|\kappa_i| \leq d < 1$ при $|z| \geq 1 - \delta$. Из предположения, что $\phi_0 = 0$ - единственная определяющая точка и $\psi_0 = 0$, следует, что выделенные $|\kappa_i| < 1$ ($i = r1 \cdot k - \ell + 1, \dots, r1 \cdot k$) всюду в $|z| \geq 1$, $z \neq 1$. В окрестности $\psi = 0$ ($z = 1$, $z = e^{i\psi}$) выделенные κ_i имеют разложения того же типа /3/, что и порождающие их λ_i:

$$\kappa_i(\psi) = \exp\left\{ \frac{i\psi}{\gamma_i} + \frac{\beta_i - i\alpha_i}{\gamma_i^{2\mu_i + 1}} \psi^{2\mu_i} + \dots \right\}.$$

Так как $\gamma_i < 0$, коэффициент при $\psi^{2\mu_i}$ имеет отрицательную вещественную часть. Согласно известной теореме [5] в области $|z| \geq 1 - \delta$ определено невырожденное аналитическое преобразование подобия $T(z)$, приводящее $M(z)$ к блочному виду:

$$TMT^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, \quad |z| \geq 1 - \delta.$$

Блоку M_{11} отвечают $|\kappa_i| \leq 1$, блоку M_{22} - $|\kappa_j| > 1$ при $|z| \geq 1$. В окрестности $z = 1$ дополнительным преобразованием подобия в M_{11} выделяем блок S, которому отвечают $\kappa_i(1) = 1$. Произведение преобразований по-прежнему обозначаем через $T(z)$:

$$TMT^{-1} = \begin{bmatrix} M_1 & & 0 \\ & S & \\ 0 & & M_{22} \end{bmatrix}, \quad |z - 1| \leq \delta, \quad \dim S = \ell.$$

Спектр M_1 лежит строго внутри единичного круга. После замены $w_\nu = TY_\nu$ система /8/ преобразуется к виду

$$w_{\nu+1}^{I} = M_{11} w_\nu^{I} + (TF_\nu)^{I}, \quad \nu \geq 1,$$
$$w_{\nu+1}^{II} = M_{22} w_\nu^{II} + (TF_\nu)^{II}, \qquad /9/$$
$$T_{21}^{-} w_1^{I} + T_{22}^{-} w_1^{II} = \sum_{\xi = r1 + 1}^{s1+1} B_\xi (T_{21}^{-} w_\xi^{I} + T_{22}^{-} w_\xi^{II}).$$

Через w_ν^I, w_ν^{II} обозначены верхние $r1 \cdot k$ и нижние $r2 \cdot k$ компоненты w_ν; T_{21}^-, T_{22}^- - блоки T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11}^- & T_{12}^- \\ T_{21}^- & T_{22}^- \end{bmatrix}.$$

T_{21}^- - квадратная матрица размерности $r1 \cdot k$. Решение /9/ выписывается в явном виде

$$w_\nu^I = M_{11}^{\nu-1} w_1^I + \sum_{\xi=1}^{\nu-1} M_{11}^{\nu-1-\xi} (TF_\xi)^I, \quad \nu \geq 2,$$

$$w_\nu^{II} = -\sum_{\xi=\nu}^{\infty} M_{22}^{\nu-1-\xi}(TF_\xi)^{II}, \quad \nu \ge 1, \qquad /10/$$

$$w_1^{I} = K_1^{-1} K_2 w_1^{II} + K_1^{-1}\sum_{\xi=1}^{s1} B_\xi^{I}(TF_\xi)^{I} + B_\xi^{II}(TF_\xi)^{II}.$$

Аналитические матрицы K_1, K_2, B_ξ^I, B_ξ^{II} зависят от исходных постоянных краевых матриц B_{ξ_i} /5/ и преобразования подобия $T(z)$:

$$K_1 = T_{21}^{-} - \sum_{\xi=r1+1}^{s1+1} B_\xi T_{21}^{-} M_{11}^{\xi-1}, \qquad K_2 = -T_{22}^{-} + \sum_{\xi=r1+1}^{s1+1} B_\xi T_{22}^{-} M_{22}^{\xi-1}.$$

Если $s1 \le r1$, то для $1 \le \xi \le s1$

$$B_\xi^{I} = B_{r1+1}\cdot T_{21}^{-}\cdot M_{11}^{r1-\xi}, \quad B_\xi^{II} = B_{r1+1}\cdot T_{22}^{-}\cdot M_{22}^{r1-\xi}.$$

Если же $s1 > r1$, то при $1 \le \xi \le r1$

$$B_\xi^{I} = \sum_{\ell=r1+1}^{s1+1} B_\ell T_{21}^{-} M_{11}^{\ell-1-\xi}, \quad B_\xi^{II} = \sum_{\ell=r1+1}^{s1+1} B_\ell T_{22}^{-} M_{22}^{\ell-1-\xi}.$$

Для остальных ξ, $r1+1 \le \xi \le s1$

$$B_\xi^{I} = \sum_{\ell=\xi+1}^{s1+1} B_\ell T_{21}^{-} M_{11}^{\ell-1-\xi}, \quad B_\xi^{II} = \sum_{\ell=\xi+1}^{s1+1} B_\ell T_{22}^{-} M_{22}^{\ell-1-\xi}.$$

Точки спектра левой р.к.з. удовлетворяют уравнению[4]

$$\mathrm{Det}\, K_1(z) = 0.$$

При исследовании устойчивости основные блоки характеристической и резольвентной матриц дополнительным преобразованием подобия в окрестности определяющих точек приводятся к нормальному виду[3,6]. Будем считать, что блок S приведен к квазижордановой нормальной форме[6]. Тогда элементы $K_1^{-1}(z)$ могут иметь особенности только целого порядка.

Справедлива

Теорема 1. Для того, чтобы левая р.к.з. /4/, /5/ /при условии, что все $\gamma_i < 0$/ была устойчива в C, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1-3:

1. Должна быть устойчива в C соответствующая задача Коши[3].
2. Спектр G должен лежать в единичном круге $|z| \le 1$.
3. В точках спектра на единичной окружности элементы $K_1^{-1}(z)$ могут иметь полюса только первого порядка.

Доказательство. В окрестности определяющих точек блоки M_{11}, M_{22}^{-1} имеют ту же структуру, что и характеристическая матрица. Поэтому оценки /см. /6/, /10//

$$\max_{\nu\ge1} |I_\nu^n| \le c \max_{\nu\ge1} |f_\nu|, \quad \text{где}$$

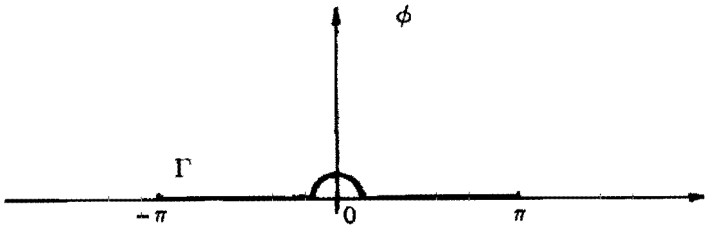
$$I_\nu^n = \int_{|z|=1} \sum_{\xi=1}^{\nu-1} M_{11}^{\nu-1-\xi}(TF_\xi)^{I} z^n\,dz \quad \text{или} \quad \int_{|z|=1} w_\nu^{II} z^n dz,$$

доказываются аналогично доказательству оценок функции Грина[3]. Остается оценить интегралы от $M_{11}^{\nu-1}\cdot w_1^I\cdot z^n$. Ряд, представляющий w_1^{II} /10/, экспоненциально быстро сходится при $|z| \ge 1-\delta$. Доказательство оценки

$$\max_{\nu\ge1} \Big| \int_{|z|=1+\delta} M_{11}^{\nu-1} w_1^I z^n dz \Big| \le c \max_{\nu\ge1} |f_\nu|$$

связано с оценкой интегралов

$$\gamma_\nu^n = \int_\Gamma \phi^{-s}\lambda_i^n(\phi)e^{i\nu\phi}\,d\phi, \quad \lambda_i(0) = 1. \qquad /11/$$



Контур Γ представлен на рисунке. Особенность обходится по малой дуге в верхней полуплоскости. В окрестности $\phi = 0$ $\lambda_i(\phi)$ имеет разложение /3/. В остальных точках $-\pi \le \phi \le \pi$, $\phi \ne 0$, $|\lambda_i(\phi)| < 1$. Положим $j = \nu + \gamma_i\cdot n$. При $|j| \le cn^{(1/2\mu_i)}$ справедлива оценка

$$|\gamma_\nu^n| \asymp n^{\frac{s-1}{2\mu_i}} \Big| \int_{\Gamma_\infty} x^{-s}\exp(-\beta_i x^{2\mu_i})\,dx \Big|. \qquad /12/$$

В исходном интеграле в качестве обходящей дуги берем $|\phi| = n^{(-1/2\mu_1)}$. После замены $\phi = n^{(-1/2\mu_1)}x$ она переходит в дугу единичной окружности. При $|x| > 1$ Γ_∞ идет по вещественной оси. Доказана ограниченность $|\gamma_\nu^n|$ при $s \le 1$, $|j| \le cn^{(1/2\mu_1)}$. Для $|j| > cn^{(1/2\mu_1)}$ оценки $|\gamma_\nu^n|$ при больших n строятся с помощью метода перевала[7]. Для $j < 0$ контур интегрирования деформируется в цепочку линий наискорейшего спуска, проходящих через точки перевала, расположенные в нижней полуплоскости. Контур протаскивается через особую точку и надо делать поправку на величину вычета при $\phi = 0$. Справедлива оценка $|\mathrm{Res}_\nu^n(0)| \le c|j|^{s-1} \le c$ при $s \le 1$. С помощью метода перевала получаем оценку интегралов по линиям наискорейшего спуска[3] :

$$x = |j|\cdot n^{-1/2\mu_1} \ge c,$$

$$|\tilde{\gamma}_\nu^n| \le b x^{-\frac{s+\mu_1-1}{(2\mu_1-1)}} n^{\frac{(s-1)}{2\mu_1}} \exp(-d x^{\frac{2\mu_1}{2\mu_1-1}}).$$

Отсюда следует ограниченность $|\gamma_\nu^n|$ при $s \le 1$, $|j| > cn^{1/2\mu_1}$. Теорема 1 доказана.

Решение р.к.з. с двумя границами также можно представить в виде интеграла. Приведем формулы для резольвенты, соответствующие /10/:

$$w_\nu^I = M_{11}^{\nu-1} w_1^I + \sum_{\xi=1}^{\nu-1} M_{11}^{\nu-1-\xi}(TF_\xi)^I, \quad 2 \le \nu \le N,$$

$$w_\nu^{II} = M_{22}^{\nu-N} w_N^{II} - \sum_{\xi=\nu}^{N-1} M_{22}^{\nu-1-\xi}(TF_\xi)^{II}, \quad 1 \le \nu \le N-1,$$

w_1^I, w_N^{II} определяются соотношениями

$$(E - K_1^{-1}K_2M_{22}^{-N+1}K_4^{-1}K_3M_{11}^{N-1})w_1^I = -K_1^{-1}K_2\sum_{\xi=1}^{N-1}M_{22}^{-\xi}(TF_\xi)^{II} +$$

$$+ K_1^{-1}\sum_{\xi=1}^{s1} B_\xi^I(TF_\xi)^I + B_\xi^{II}(TF_\xi)^{II} + K_1^{-1}K_2M_{22}^{-N+1}\times \qquad /13/$$

$$\times\{K_4^{-1}K_3\sum_{\xi=1}^{N-1}M_{11}^{N-1-\xi}(TF_\xi)^I + K_4^{-1}\sum_{\xi=1}^{s2}C_\xi^I(TF_{N-\xi})^I + C_\xi^{II}(TF_{N-\xi})^{II}\},$$

$$(E - K_4^{-1}K_3M_{11}^{N-1}K_1^{-1}K_2M_{22}^{-N+1})w_N^{II} = K_4^{-1}K_3\sum_{\xi=1}^{N-1}M_{11}^{N-1-\xi}(TF_\xi)^I +$$

$$+ K_4^{-1}(\sum_{\xi=1}^{s2}C_\xi^I(TF_{N-\xi})^I + C_\xi^{II}(TF_{N-\xi})^{II}) + K_4^{-1}K_3M_{11}^{N-1}\times$$

$$\times\{-K_1^{-1}K_2\sum_{\xi=1}^{N-1}M_{22}^{-\xi}(TF_\xi)^{II} + K_1^{-1}\sum_{\xi=1}^{s1}B_\xi^I(TF_\xi)^I + B_\xi^{II}(TF_\xi)^{II}\}.$$

Аналитические матрицы K_3, K_4 определяются аналогично K_1, K_2. Они зависят от постоянных матриц $C\ell_j$, входящих в условие /2/ на правой границе. Уравнение $\mathrm{Det}\, K_4(z) = 0$ определяет точки спектра правой краевой задачи. Справедлива

Теорема 2. Для того, чтобы правая р.к.з. с граничными условиями /2/ /при условии, что все $\gamma_i < 0$/ была устойчива в C, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1, 3. Условия 1, 2 совпадают с условиями теоремы 1.

3. В точках спектра на единичной окружности элементы K_4^{-1} могут иметь полюсы только первого порядка. Кроме того, требуется, чтобы элементы последних ℓ столбцов /ℓ -размерность блока S, которому отвечают $|\kappa_i(\psi_0)| = 1$/ матрицы $K_4^{-1}K_3$ не имели особенностей, $\ell = \ell(\psi_0)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Дополнительное ограничение на $K_4^{-1}K_3$ возникает по следующей причине. В случае правой р.к.з. $(Q - zI)^{-1}$ определяется соотношениями

$$w_\nu^I = \sum_{\xi=-\infty}^{\nu-1} M_{11}^{\nu-1-\xi}(TF_\xi)^I, \quad \nu \le N,$$

$$w_\nu^{II} = M_{22}^{\nu-N}w_N^{II} - \sum_{\xi=\nu}^{N-1} M_{22}^{\nu-1-\xi}(TF_\xi)^{II}, \quad \nu \le N-1,$$

$$K_4 w_N^{II} = K_3 w_N^I + \sum_{\xi=1}^{s2} C_\xi^I (TF_{N-\xi})^I + C_\xi^{II}(TF_{N-\xi})^{II},$$

$$w_N^I = \sum_{\xi=0}^{\infty} M_{11}^{\xi} (TF_{N-1-\xi})^I .$$

Ряд, представляющий w_N^I, не является экспоненциально сходящимся. Для доказательства устойчивости правой р.к.з. в С надо доказать равномерную по n ограниченность $\{\gamma_\nu^n\}$, $\nu \geq 1$, /см. /11// в метрике ℓ_1. Из /12/ получаем

$$\sum_{\nu \geq 1} |\gamma_\nu^n| \geq \sum_{|j| \leq cn^{1/2\mu_i}} |\gamma_\nu^n| > bn^{s/2\mu_i} .$$

Отсюда и из известных оценок разностной функции Грина следует, что $\{\gamma_\nu^n\}$, $\nu \geq 1$, ограничены в ℓ_1 равномерно по n, если и только если $s = 0$. Выделенные κ_i, $|\kappa_i(\psi_0)| = 1$, отвечают блоку S, расположенному в последних ℓ столбцах и нижних ℓ строках M_{11}. Отсюда и возникает дополнительное ограничение: элементы последних ℓ столбцов $K_4^{-1} K_3$ не должны иметь особенностей в точках

спектра z_0^*, $|z_0^*| = 1$. Естественно, $\ell = \ell(z_0^*)$. Если z_0^* не является определяющей точкой ($\ell = 0$), то никакого дополнительного ограничения нет.

Теорема 3. Пусть G - оператор перехода от слоя к слою р.к.з. /1/,/2/ с двумя границами. Если устойчивы в С соответствующие левая и правая р.к.з. и все с.з. характеристической матрицы в окрестности всех определяющих точек имеют разложение /3/ с γ_i постоянного знака, то найдутся положительные постоянные b и c такие, что

$$\| G^n \|_C \leq c, \quad n \leq \exp(bN) .$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1[/2/], только в соответствующих местах оценки в L_2 заменяются оценками в С.

Теорема 4. Если выполняются условия теоремы 3 и соответствующие /1/, /2/ левая и правая р.к.з. не имеют точек спектра на единичной окружности, то $\|G^n\|_C \leq c$ для всех $n \geq 0$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2[/2/]. Снова в соответствующих местах оценки в L_2 заменяются оценками в С.

Основная теорема. Пусть выполняются условия теоремы 3. В области устойчивости р.к.з. /1/, /2/ в С, при $n \leq e^{bN}$, "ϵ-тенью" является пограничный слой $|\nu - N| \leq c \ln N$. Если выполняются условия теоремы 4, р.к.з. /1/, /2/ устойчива в С при всех $n \geq 0$. Тогда оценка "ϵ-тени" $O(\ln N)$ верна для всех n. Более того, в этом случае удается доказать, что при $n \geq dn$ уклонение решения р.к.з. /1/, /2/ от решения левой р.к.з. /4/, /5/ Δ_ν^n становится экспоненциально малым по N. То есть на высоте $n = O(N)$ "ϵ-тень" исчезает.

Доказательство. Используя /6/, /10/, /13/, получаем

$$\Delta_\nu^n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = 1+\delta} \eta_\nu z^n dz,$$

где

$$\eta_\nu^I = M_{11}^{\nu-1} \eta_1^I, \qquad 2 \leq \nu \leq N-1,$$

$$\eta_\nu^{II} = M_{22}^{\nu-N} w_N^{II} + \sum_{\xi=N}^{\infty} M_{22}^{\nu-1-\xi} (TF_\xi)^{II}, \qquad 1 \leq \nu \leq N, \tag{/14/}$$

$$\eta_1^I = (E - K_1^{-1} K_2 M_{22}^{-N+1} K_4^{-1} K_3 M_{11}^{N-1})^{-1} (w_1^I + R_1) - w_1^I .$$

Положим

$$\tilde{M}_1 = \sum_{\xi=1}^{\infty} (K_1^{-1} K_2 M_{22}^{-N+1} K_4^{-1} K_3 M_{11}^{N-1})^{\xi},$$

$$\tilde{M}_2 = \sum_{\xi=1}^{\infty} (K_4^{-1} K_3 M_{11}^{N-1} K_1^{-1} K_2 M_{22}^{-N+1})^{\xi}.$$

Вектор η_1^I в /14/ удобно переписать в виде $\eta_1^I = \tilde{M}_1 (w_1^I + R_1) + R_1$. Осталось определить w_1^I, R_1 и w_N^{II}:

$$w_1^I = -K_1^{-1} K_2 \sum_{\xi=1}^{\infty} M_{22}^{-\xi} (TF_\xi)^{II} + K_1^{-1} \sum_{\xi=1}^{s1} B_\xi^I (TF_\xi)^I + B_\xi^{II} (TF_\xi)^{II},$$

$$R_1 = K_1^{-1} K_2 M_{22}^{-N+1} \{ \sum_{\xi=1}^{\infty} M_{22}^{-\xi} (TF_{N-1+\xi})^{II} + K_4^{-1} K_3 \sum_{\xi=1}^{N-1} M_{11}^{N-1-\xi} (TF_\xi)^I +$$

$$+ K_4^{-1}\sum_{\xi=1}^{s2} C_\xi^{I}(TF_{N-\xi})^{I} + C_\xi^{II}(TF_{N-\xi})^{II}\},$$

$$w_N^{II} = (E + \tilde M_2)R_2, \qquad /15/$$

где

$$R_2 = K_4^{-1}K_3\sum_{\xi=1}^{N-1} M_{11}^{N-1-\xi}(TF_\xi)^{I} + K_4^{-1}\sum_{\xi=1}^{s2} C_\xi^{I}(TF_{N-\xi})^{I} + C_\xi^{II}(TF_{N-\xi})^{II} +$$

$$+ K_4^{-1}K_3M_{11}^{N-1}\Big(-K_1^{-1}K_2\sum_{\xi=1}^{N-1} M_{22}^{-\xi}(TF_\xi)^{II} + K_1^{-1}\sum_{\xi=1}^{s1} B_\xi^{I}(TF_\xi)^{I} + B_\xi^{II}(TF_\xi)^{II}\Big).$$

По предположению K_1^{-1}, K_4^{-1} не имеют особенностей при $|z|>1$ и могут иметь полюса не выше первого порядка в точках единичной окружности. Из устойчивости задачи Коши в C следует, что элементы $M_{11}^{N}(z)$ ограничены при $|z|\ge 1$ равномерно по N. Так как $|Sp\, M_{22}^{-1}(z)|<d<1$ при $|z|\ge 1-\delta$, максимум модулей элементов $M_{22}^{-N}(z)$ оценивается сверху величиной ρ^N, $\rho=(1+d)/2$. Отсюда следует, что при $|z|\ge 1+\delta$ и достаточно больших N максимум модулей элементов $\tilde M_1$, $\tilde M_2$ оценивается сверху величиной $\delta^{-2}\rho^N(1-\delta^{-2}\rho^N)^{-1}$. Множители, не зависящие от δ, N, компенсируются за счет расхождения между d^N и ρ^N. Соответственно

$$\Big|\int\limits_{|z|=1+\delta} M_{11}^{\nu-1}\tilde M_1(w_1^{I}+R_1)z^n dz\Big|, \quad \Big|\int\limits_{|z|=1+\delta} M_{22}^{\nu-N}\tilde M_2R_2z^n dz\Big|$$

оценивается сверху величиной

$$c(1+\delta)^n(\delta^{-1}+\delta^{-2}\rho^N)\delta^{-2}\rho^N(1-\delta^{-2}\rho^N)^{-1}\|f\| < c\rho^{N/2}\|f\| \qquad /16/$$

при $n\le\delta^{-1}=\rho^{-N/8}$, $\|f\| = \max\limits_{\nu\ge 1}|f_\nu|$. Столь же просто /за счет множителя M_{22}^{-N+1} перед фигурной скобкой в /15// получаем, что при $n\le\delta^{-1}$

$$\Big|\int\limits_{|z|=1+\delta} M_{11}^{\nu-1}R_1z^n dz\Big| \le c\rho^{N/2}\|f\|.$$

Ширина "ϵ-тени" определяется

$$\int\limits_{|z|=1+\delta}\Big(M_{22}^{\nu-N}R_2 - \sum_{\xi=N}^{\infty} M_{22}^{\nu-1-\xi}(TF_\xi)^{II}\Big)z^n dz.$$

Чтобы оценить второе слагаемое, перетягиваем $|z|=1+\delta$ в единичную окружность:

$$\Big|\int\limits_{|z|=1} M_{22}^{\nu-N}\sum_{\xi=1}^{\infty} M_{22}^{-\xi}(TF_{N-1+\xi})^{II}z^n dz\Big| \le c\rho^{N-\nu}\cdot\|f\|. \qquad /17/$$

Оценка оставшихся интегралов

$$\int\limits_{|z|=1+\delta} M_{22}^{\nu-N}R_2z^n dz$$

сводится к оценке интегралов

$$\gamma_N^n = \int\limits_{\Gamma}\phi^{-s}\lambda_i^n(\phi)e^{iN\phi}d\phi,$$

рассмотренных при доказательстве теоремы 1 /см. /11/ на с.7 с $\nu=N$/. Если K_1^{-1} имеет полюса в определяющих точках на единичной окружности, то $s=1$. Полюса K_4^{-1} здесь не учитываются из-за дополнительного ограничения на элементы $K_4^{-1}K_3$ в теореме 2. На с.7,8 была доказана ограниченность интегралов γ_ν^n при $s\le 1$. Отсюда, из суммируемости γ_ν^n в ℓ_1 при $s=0$ /3/ и оценок /16/-/17/ следует, что при $n\le\delta^{-1}=\rho^{-N/8}$ уклонение решения р.к.з. /1/, /2/ от решения левой р.к.з. Δ_ν^n допускает оценку

$$|\Delta_\nu^n| \le c(\rho^{N-\nu}+\rho^{N/2}+e^{-bn})\cdot\|f\|. \qquad /18/$$

Основные асимптотические оценки строятся с точностью до величины $O(e^{-bn})$, так появляется последнее слагаемое в /18/. Из /18/ получаем оценку ширины "ϵ-тени":

$$|N-\nu| \le \frac{(q+\epsilon)\ln N}{|\ln\rho|} \quad \text{при} \quad \frac{(q+\epsilon)\ln N}{b} < n < \rho^{-N/8}.$$

На расстоянии $r2\cdot n$ от правой границы решение задачи /1/, /2/ не зависит от граничных условий на правой границе. Поэтому и для $n\le(q+\epsilon)\ln N/b$ "ϵ-тень" имеет ширину $O(\ln N)$.

Если K_1 и K_4 не вырождаются при $|z|\ge 1$, то ряды $\tilde M_1$, $\tilde M_2$ экспоненциально быстро сходятся при $|z|=1$ и контур Γ в интеграле, представляющем Δ_ν^n, можно перетянуть в $|z|=1-\sigma$, σ выбирается следующим образом. В окрестности $z=1$ выделенные с.з. имеют представление $\kappa_i = z^{\omega_i}$, $\omega_i = \gamma_i^{-1} + O(z-1)$. Положим $\gamma = \min|\gamma_i|$, $i = r1\cdot k - \ell + 1, \ldots, r1\cdot k$. При достаточно малом δ /не зависящем от N/ $|\omega_i(z)| < 2/\gamma$, $|z-1| < \delta$. Пусть $0<d<1$ такое, что выделенные $|\kappa_i| < d$ на дуге $\{|z|=1\} \cap \{|z-1| > \delta\}$, а остальные с.з. M_{11}, M_{22}^{-1} по модулю меньше d всюду на $|z|=1$. Из непрерывности с.з. следует, что $\exists \sigma > 0$ / $\sigma = \sigma(\delta)$, но не зависит от N / такое, что выделенные $|\kappa_i| < (1+d)/2$ на дуге $\{|z| = 1-\sigma\} \cap \{|z-1| > \delta\}$, а остальные с.з. M_{11}, M_{22}^{-1} по модулю меньше $(1+d)/2$ всюду на $|z| = 1-\sigma$. На оставшейся дуге $\{|z| = 1-\sigma\} \cap \{|z-1| \le \delta\}$ выделенные $|\kappa_i| < 1 + (5\sigma/2\gamma)$. Отсюда получаем, что при $|z| = 1-\sigma$ модули элементов M_{11}^{ξ}, $M_{22}^{-\xi}$ оцениваются сверху величинами $c\exp(3\sigma\xi/\gamma)$ и $\exp(-b\xi)$ соответственно. Из этих оценок и интегрального представления Δ_ν^n /13/ следует

$$|\Delta_\nu^n| \le c\exp(-\sigma n + \frac{3\sigma N}{\gamma})\,\|f\| < c\exp(-\frac{\sigma N}{\gamma})\,\|f\|.$$

Последнее неравенство справедливо при $n > 4N/\gamma$. Тем самым доказано, что на высоте $n = O(N/\gamma)$ "ϵ-тень" исчезает. Основная теорема доказана.

В работе /8/ была получена оценка области влияния "неправильных граничных условий" порядка $O(\ln N)$ для одного уравнения, отличным от настоящей работы методом.

Приношу благодарность Н.С.Бахвалову за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. - ДАН СССР, 1958, 122:4, с.555.
2. Сердюкова С.И. - ЖВМ и МФ, 1975, №5, с.1333.
3. Сердюкова С.И. - ЖВМ и МФ, 1967, №3, с.497.
4. Kreiss H.-O. - Math. of Comp., 1968, 22, 104, p.702.
5. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators, Berlin-Heidelberg-New York, 1966, Ch.2, p.68.
6. Сердюкова С.И. Препринт ОИЯИ Р5-88-791, Дубна, 1988.
7. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
8. Kreiss H.-O., Lundgvist E. - Math. of Comp., 1968, v.22, No.101, p.1.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 ноября 1988 года.

Сердюкова С.И. Р11-88-810

Оценка "тени" дополнительных граничных условий для систем разностных уравнений с наклонными характеристиками постоянного знака

Рассматриваются системы разностных уравнений

$$u_\nu^{n+1} = \sum_{\ell=-r1}^{r2} A_\ell u_{\nu+\ell}^n, \quad n \ge 0, \quad 1 \le \nu \le N-1,$$

с наклонными характеристиками, выходящими из левой границы ($\nu + \gamma_i n = c$, $\gamma_i < 0$). Предполагается, что эта система аппроксимирует непрерывную гиперболическую систему. Порядок аппроксимации есть $O(h^q)$. Недостающие $u_{N+\ell}^{n+1}$ на правой границе находятся из граничных условий вида

$$u_{N+\ell}^{n+1} = \sum_{\xi=1}^{s2} B_{\xi\ell} u_{N-\xi}^{n+1}, \quad \ell = 0, \ldots, r2-1.$$

При решении соответствующей непрерывной задачи граничные условия на правой границе не требуются. В предлагаемой работе оценивается ширина "ϵ-тени" - области, вне которой решение рассматриваемой разностной краевой задачи отличается от решения соответствующей левой разностной краевой задачи на величину $O(h^{q+\epsilon})$. В предположении устойчивости в С доказывается, что "ϵ-тенью" является пограничный слой $|\nu - N| = O(\ln N)$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Serdjukova S.I. P11-88-810

The Estimation of "the Shadow" of the Additional Boundary Conditions for the Difference Equation Systems with the Slope Characteristics of a Constant Sign

We consider the systems

$$u_\nu^{n+1} = \sum_{\ell=-r1}^{r2} A_\ell u_{\nu+\ell}^n, \quad n \ge 0, \quad 1 \le \nu \le N-1,$$

with the slope characteristics outgoing from the left boundary ($\nu + \gamma_i n = c$, $\gamma_i < 0$). This system approximates a continuous hyperbolic system with the accuracy $O(h^q)$. The lacking $u_{N+\ell}^{n+1}$ are found from the additional boundary conditions

$$u_{N+\ell}^{n+1} = \sum_{\xi=1}^{s2} B_{\ell\xi} u_{N-\xi}^{n+1}, \quad \ell = 0, \ldots, r2-1.$$

The corresponding continuous problem needs no conditions on the right boundary. Here we estimate the size of "ϵ-shadow", the region, outside of which the solution of the considered problem with two boundaries differs from the solution of the corresponding left difference boundary value problem by the quantity of $O(h^{q+\epsilon})$. We prove in the C-stability assumption that "the ϵ-shadow" is the boundary layer $|\nu - N| = O(\ln N)$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988