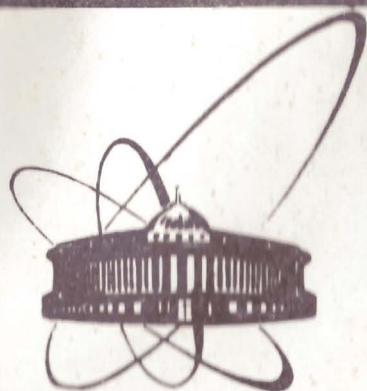


88-787



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

E 601

P11-88-787

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек*

О СИСТЕМАХ ПРОГРАММ
НА ФОРТРАНЕ ЭВМ ЕС-1061(60)
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ
ЛЮБЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ
ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ,
А ТАКЖЕ ПОЛНОГО СПЕКТРА
ТАКИХ МАТРИЦ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Направлено в "Журнал вычислительной
математики и математической физики"

* Университет, Пхеньян, КНДР

1988

I. Введение

Настоящая работа посвящена программной реализации на ЭВМ ЕС-106I(60) новых алгоритмов [1,2] вычисления собственных значений и соответствующих им собственных векторов трехдиагональных матриц.

В [1] были получены следующие множества корректных ускоренных методов вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида

$$C = C = \begin{bmatrix} q_1 & \zeta_2 & & \\ p_2 & q_2 & \zeta_3 & \\ & p_{n-1} & q_{n-1} & \zeta_n \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix} \quad (I.1)$$

$$(C - \lambda E)U(\lambda) = 0; \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_{m-1}| > |\lambda_m| \geq 0 \quad (I.1')$$

на основе стратегии d -смещений (=сдвигов)

$$\tilde{C} = C + dE. \quad (I.2)$$

I. $M(A(W-d))$ -множество ускоренных алгоритмов:

1. (AWd) -метод. Если $|P_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= (P_i \zeta_i) / ((q_{i-1}^{(k)} - W)(q_i^{(k)} - W)); \quad Y_1 = Y_{m+1} = 0; \quad i = 2, 3, \dots, m \\ \lambda_{i+1}^{(k)} &= 1 - Y_i / \lambda_i^{(k)}; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1; \quad \lambda_{m+2} = 0; \quad i = 2, 3, \dots, m \\ \lambda_i^{(k)} &= (q_i^{(k)} - W) \cdot \lambda_{i+1}^{(k)}; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ P_i^{(k)} &= (\lambda_i^{(k)} / \lambda_{i-1}^{(k)}) \cdot P_i; \quad i = 2, 3, \dots, m \\ q_i^{(k)} &= [\lambda_i^{(k)} + (q_{i+1}^{(k)} - W)] - \lambda_{i+1}^{(k)}; \quad (q_{m+1}^{(k)} - W) = 0 = \lambda_{m+1}^{(k)}; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{(k)} = [q_i^{(k)} + \sum_{s=1}^k W] - d; \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (I.3)$$

Если $|P_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{ \begin{aligned} P_n^{(k^*)} &= 0, \quad Y_n = 0, \quad \lambda_{n+1}^{(k^*)} = 1, \quad \lambda_n^{(k^*)} = q_n^{(k^*)} - W, \quad q_n^{(k^*)} = \lambda_n^{(k^*)} \end{aligned} \right\}_{n=i^*}^m, \quad \text{для всех } k \geq k^* \quad (I.4)$$

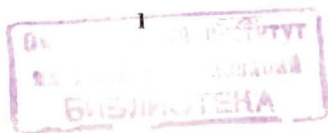
2. (ZWd) -метод. Если $|P_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= (P_i \zeta_i) / ((q_{i-1}^{(k)} - W)(q_i^{(k)} - W)); \quad Y_1 = Y_{m+1} = 0; \quad i = 2, 3, \dots, m \\ \zeta_i^{(k)} &= Y_i / (1 - \lambda_{i-1}^{(k)}); \quad \zeta_1 = 0 = \zeta_{m+1}; \quad i = 2, 3, \dots, m \\ \lambda_i^{(k)} &= (q_i^{(k)} - W)(1 - \lambda_{i-1}^{(k)}); \quad i = 1, 2, \dots, m \\ P_i^{(k)} &= (\lambda_i^{(k)} / \lambda_{i-1}^{(k)}) \cdot P_i; \quad i = 2, 3, \dots, m \\ q_i^{(k)} &= \lambda_i^{(k)} + (q_{i+1}^{(k)} - W) - \lambda_{i+1}^{(k)}; \quad (q_{m+1}^{(k)} - W) = 0 = \lambda_{m+1}^{(k)}; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{(k)} = (q_i^{(k)} + \sum_{s=1}^k W) - d; \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (I.5)$$

Если $|P_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{ \begin{aligned} Y_n^{(k^*)} &= 0, \quad \lambda_n^{(k^*)} = (q_n^{(k^*)} - W), \quad P_n^{(k^*)} = 0; \quad q_n^{(k^*)} = \lambda_n^{(k^*)} \end{aligned} \right\}_{n=i^*}^m, \quad \text{для всех } k \geq k^* \quad (I.6)$$

3. (TWd) -метод. Если $|T_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то



$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_i^{(k)} &= (\bar{q}_i^{(k)} - \bar{W} - \bar{T}_i^{(k)}) + \bar{T}_{i+1}^{(k)}; \quad \bar{T}_{m+1}^{(k)} = 0; \quad i=1, 2, \dots, m \\ \bar{T}_i^{(k)} &= ((\bar{q}_i^{(k)} - \bar{W}) - \bar{T}_i^{(k)}) / (\bar{q}_{i-1}^{(k)} - \bar{W} - \bar{T}_{i-1}^{(k)}); \quad \bar{T}_1^{(k)} = 0; \quad i=2, 3, \dots, m \\ \lambda_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{q}_i^{(k)} + \sum_{n=1}^k \bar{W}) - d; \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (I.7)$$

Если $|\bar{T}_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{ \bar{q}_n = \bar{q}_n - \bar{W}, \bar{T}_n = 0 \right\}_{n=i^*}^m \text{ для всех } k \geq k^* \text{ , где} \quad (I.8)$$

$$\bar{T}_i = \bar{P}_i \bar{z}_i / (\bar{q}_{i-1} - \bar{T}_{i-1}); \quad \bar{T}_1 = 0 = \bar{T}_{m+1}; \quad i=2, 3, \dots, m \text{ и } \bar{W} = 0 \quad (I.9)$$

4. $[(T-\lambda)_n Wd \text{-метод}]$. Если $|\bar{P}_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k=1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_i^{(k)} &= \frac{\bar{P}_i^{(k)} \bar{z}_i}{\bar{q}_{i-1}^{(k)} - \bar{W} - \bar{T}_{i-1}^{(k)}}; \quad \bar{T}_1^{(k)} = \bar{T}_{m+1}^{(k)} = 0; \quad i=2, 3, \dots, m \\ \bar{\lambda}_i^{(k)} &= (\bar{q}_i^{(k)} - \bar{W} - \bar{T}_i^{(k)}) / \bar{q}_{i-1}^{(k)}; \quad i=1, 2, \dots, m \\ \bar{P}_i^{(k)} &= (\bar{\lambda}_i^{(k)} / \bar{\lambda}_{i-1}^{(k)}) \cdot \bar{P}_i^{(k)}; \quad i=2, 3, \dots, m \\ \bar{q}_i^{(k)} &= [\bar{\lambda}_i^{(k)} + (\bar{q}_{i-1}^{(k)} - \bar{W})] - \bar{\lambda}_{i-1}^{(k)}; \quad (\bar{q}_{m+1}^{(k)} - \bar{W}) = 0 = \bar{\lambda}_{m+1}^{(k)}; \quad i=1, 2, \dots, m \\ \lambda_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{q}_i^{(k)} + \sum_{n=1}^k \bar{W}) - d; \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (I.10)$$

Если $|\bar{P}_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{ \bar{T}_n = 0, \bar{P}_n = 0, \bar{\lambda}_n = (\bar{q}_n - \bar{W}) / \bar{q}_{n-1} \right\}_{n=i^*}^m \text{ для всех } k \geq k^* \quad (I.11)$$

5. $(\lambda_n Wd \text{-метод})$. Если $|\bar{P}_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k=1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_i^{(k)} &= (\bar{q}_i^{(k)} - \bar{W}) / (\bar{q}_{i-1}^{(k)} - \bar{T}_{i-1}^{(k)}); \quad \bar{\lambda}_1^{(k)} = (\bar{q}_1^{(k)} - \bar{W}) / \bar{q}_0^{(k)}; \quad i=2, 3, \dots, m \\ \bar{P}_i^{(k)} &= (\bar{\lambda}_i^{(k)} / \bar{\lambda}_{i-1}^{(k)}) \cdot \bar{P}_i^{(k)}; \quad i=2, 3, \dots, m \\ \bar{q}_i^{(k)} &= [\bar{\lambda}_i^{(k)} + (\bar{q}_{i-1}^{(k)} - \bar{W})] - \bar{\lambda}_{i-1}^{(k)}; \quad (\bar{q}_{m+1}^{(k)} - \bar{W}) = 0 = \bar{\lambda}_{m+1}^{(k)}; \quad i=1, 2, \dots, m \\ \lambda_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{q}_i^{(k)} + \sum_{n=1}^k \bar{W}) - d; \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (I.12)$$

Если $|\bar{P}_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{ \bar{\lambda}_n = \bar{q}_n - \bar{W}, \bar{P}_n = 0, \bar{q}_n = \bar{\lambda}_n \right\}_{n=i^*}^m \text{ для всех } k \geq k^* \quad (I.13)$$

II. $m[G(W-d)]$ - множество ускоренных алгоритмов:

I. $(GWd \text{-метод})$. Если $|\bar{P}_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k=1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_i^{(k)} &= (\bar{P}_i^{(k)} \bar{z}_i) / [(\bar{q}_{i-1}^{(k)} - \bar{W})(\bar{q}_i^{(k)} - \bar{W})]; \quad \bar{Y}_1^{(k)} = \bar{Y}_{m+1}^{(k)} = 0; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{G}_{j-1}^{(k)} &= 1 - \bar{q}_{j+1}^{(k)} / \bar{G}_j^{(k)}; \quad \bar{G}_m^{(k)} = \bar{G}_{m+1}^{(k)} = 1; \quad j=m-1, m-2, \dots, 1 \\ \bar{\lambda}_j^{(k)} &= (\bar{q}_j^{(k)} - \bar{W}) \cdot \bar{G}_{j-1}^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \\ \bar{P}_j^{(k)} &= (\bar{\lambda}_{j-1}^{(k)} / \bar{\lambda}_j^{(k)}) \cdot \bar{P}_j^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{q}_j^{(k)} &= \bar{\lambda}_j^{(k)} + (\bar{q}_{j-1}^{(k)} - \bar{W}) - \bar{\lambda}_{j-1}^{(k)}; \quad (\bar{q}_0^{(k)} - \bar{W}) = 0 = \bar{\lambda}_0^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \\ \tilde{\lambda}_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{q}_j^{(k)} + \sum_{n=1}^k \bar{W}) - d; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \end{aligned} \right\} \quad (I.14)$$

Если $|\bar{P}_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \bar{G}_{n-1}^{(k)} = 1, \bar{\lambda}_n^{(k)} = \bar{q}_n^{(k)} - \bar{W}, \bar{P}_n^{(k)} = 0, \bar{q}_n^{(k)} = \bar{\lambda}_n^{(k)} \right\}_{n=j^*}^m \text{ для всех } k \geq k^* \quad (I.15)$$

2. $(\bar{q}_m Wd \text{-метод})$. Если $|\bar{P}_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k=1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_j^{(k)} &= (\bar{P}_j^{(k)} \bar{z}_j) / [(\bar{q}_{j-1}^{(k)} - \bar{W})(\bar{q}_j^{(k)} - \bar{W})]; \quad \bar{Y}_1^{(k)} = \bar{Y}_{m+1}^{(k)} = 0; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{S}_{j-1}^{(k)} &= \bar{Y}_j^{(k)} / (1 - \bar{S}_j^{(k)}); \quad \bar{S}_m^{(k)} = 0 = \bar{S}_0^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{\lambda}_j^{(k)} &= (\bar{q}_j^{(k)} - \bar{W}) (1 - \bar{S}_j^{(k)}); \quad j=m, m-1, \dots, 1 \\ \bar{P}_j^{(k)} &= (\bar{\lambda}_{j-1}^{(k)} / \bar{\lambda}_j^{(k)}) \cdot \bar{P}_j^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{q}_j^{(k)} &= \bar{\lambda}_j^{(k)} + (\bar{q}_{j-1}^{(k)} - \bar{W}) - \bar{\lambda}_{j-1}^{(k)}; \quad (\bar{q}_0^{(k)} - \bar{W}) = 0 = \bar{\lambda}_0^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \\ \tilde{\lambda}_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{q}_j^{(k)} + \sum_{n=1}^k \bar{W}) - d; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \end{aligned} \right\} \quad (I.16)$$

Если $|\bar{P}_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \bar{S}_{n-1}^{(k)} = 0, \bar{\lambda}_n^{(k)} = (\bar{q}_n^{(k)} - \bar{W}), \bar{P}_n^{(k)} = 0, \bar{q}_n^{(k)} = \bar{\lambda}_n^{(k)} \right\}_{n=j^*}^m \text{ для всех } k \geq k^* \quad (I.17)$$

3. $(\bar{q}_m Wd \text{-метод})$. Если $|\bar{F}_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k=1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_j^{(k)} &= (\bar{q}_j^{(k)} - \bar{W} - \bar{F}_j^{(k)}) / \bar{F}_{j-1}^{(k)}; \quad \bar{F}_0^{(k)} = \bar{F}_m^{(k)} = 0; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \\ \bar{F}_{j-1}^{(k)} &= (\bar{q}_{j-1}^{(k)} - \bar{W} - \bar{F}_{j-1}^{(k)}) / (\bar{q}_j^{(k)} - \bar{W} - \bar{F}_j^{(k)}); \quad \bar{F}_m^{(k)} = 0; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \tilde{\lambda}_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{q}_j^{(k)} + \sum_{n=1}^k \bar{W}) - d; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \end{aligned} \right\} \quad (I.18)$$

Если $|\bar{F}_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \bar{F}_{n-1}^{(k)} = 0, \bar{q}_n^{(k)} = \bar{q}_n^{(k)} - \bar{W} \right\}_{n=j^*}^m \text{ для всех } k \geq k^* \text{ , где} \quad (I.19)$$

$$\bar{F}_{j-1}^{(k)} = (\bar{P}_j^{(k)} \bar{z}_j) / (\bar{q}_j^{(k)} - \bar{F}_j^{(k)}); \quad \bar{F}_0^{(k)} = 0 = \bar{F}_m^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \text{ и } \bar{W} = 0 \quad (I.20)$$

4. $[(T-\lambda)_m Wd \text{-метод}]$. Если $|\bar{P}_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k=1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{i-1}^{(k)} &= (\bar{P}_i^{(k)} \bar{z}_i) / [(\bar{q}_i^{(k)} - \bar{W}) - \bar{F}_i^{(k)}]; \quad \bar{F}_m^{(k)} = 0 = \bar{F}_0^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{\lambda}_j^{(k)} &= [(\bar{q}_j^{(k)} - \bar{W}) - \bar{F}_j^{(k)}]; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \\ \bar{P}_j^{(k)} &= (\bar{\lambda}_{j-1}^{(k)} / \bar{\lambda}_j^{(k)}) \cdot \bar{P}_j^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{q}_j^{(k)} &= \bar{\lambda}_j^{(k)} + (\bar{q}_{j-1}^{(k)} - \bar{W}) - \bar{\lambda}_{j-1}^{(k)}; \quad (\bar{q}_0^{(k)} - \bar{W}) = 0 = \bar{\lambda}_0^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \\ \tilde{\lambda}_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{q}_j^{(k)} + \sum_{n=1}^k \bar{W}) - d; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \end{aligned} \right\} \quad (I.21)$$

Если $|\bar{P}_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \bar{F}_{n-1}^{(k)} = 0, \bar{\lambda}_n^{(k)} = (\bar{q}_n^{(k)} - \bar{W}), \bar{P}_n^{(k)} = 0, \bar{q}_n^{(k)} = \bar{\lambda}_n^{(k)} \right\}_{n=j^*}^m \text{ для всех } k \geq k^* \quad (I.22)$$

5. $(\lambda_m Wd \text{-метод})$. Если $|\bar{P}_i^{(k)}| > \varepsilon$ для любых $k=1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_{j-1}^{(k)} &= (\bar{q}_{j-1}^{(k)} - \bar{W}) - (\bar{P}_j^{(k)} \bar{z}_j) / \bar{\lambda}_j^{(k)}; \quad \bar{\lambda}_m^{(k)} = (\bar{q}_m^{(k)} - \bar{W}); \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{P}_j^{(k)} &= (\bar{\lambda}_{j-1}^{(k)} / \bar{\lambda}_j^{(k)}) \cdot \bar{P}_j^{(k)}; \quad \bar{P}_1^{(k)} = 0; \quad j=m, m-1, \dots, 2 \\ \bar{q}_j^{(k)} &= \bar{\lambda}_j^{(k)} + (\bar{q}_{j-1}^{(k)} - \bar{W}) - \bar{\lambda}_{j-1}^{(k)}; \quad (\bar{q}_0^{(k)} - \bar{W}) = 0 = \bar{\lambda}_0^{(k)}; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \\ \tilde{\lambda}_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{q}_j^{(k)} + \sum_{n=1}^k \bar{W}) - d; \quad j=m, m-1, \dots, 1 \end{aligned} \right\} \quad (I.23)$$

Если $|\tilde{P}_i| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то $\{\tilde{\lambda}_{n-1}^{(k^*)} = (\tilde{q}_{n-1}^{(k^*)} - \tilde{W}), \tilde{P}_n = 0, \tilde{q}_n = \tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{j^*}$, для всех $k \geq k^*$ (I.24)

III^o. $M[(G, \Lambda), (W-d)]$ - множество ускоренных алгоритмов:

I. $\{GB(G), Wd$ -метод}. Если $|\tilde{P}_i| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i^{(k)} &= (\tilde{P}_i \tilde{c}_i) / ((\tilde{q}_i - \tilde{W})(\tilde{q}_{i-1} - \tilde{W})); \tilde{q}_1 = 0 = \tilde{q}_{m+1}; i = 2, 3, \dots, m \\ \tilde{G}_j &= 1 - \tilde{q}_{i+1}^{(k)} / \tilde{G}_i^{(k)}; \tilde{G}_m = \tilde{G}_{m-1} = 1; j = m-1, m-2, \dots, 1 \\ \tilde{B}_{ii}(G) &= \{1 + (1 - \tilde{G}_{i-2}) \cdot \tilde{B}_{i,i-1}(G)\} \cdot \tilde{G}_{i-1}^{(k)}; \tilde{B}_{ii} = \tilde{G}_0^{(k)}; i = 2, 3, \dots, m \\ \tilde{\lambda}_i &= (\tilde{q}_i - \tilde{W}) \{1 - \tilde{G}_{i-1} + \tilde{B}_{ii}^{(k)}(G)\}; i = 1, 2, \dots, m \\ \tilde{P}_i^{(k)} &= (\tilde{\lambda}_i / \tilde{\lambda}_{i-1}) \cdot \tilde{P}_i; i = 2, 3, \dots, m \\ \tilde{q}_i^{(k)} &= \tilde{\lambda}_i + (\tilde{q}_{i+1} - \tilde{W}) - \tilde{\lambda}_{i+1}; (\tilde{q}_{m+1} - \tilde{W}) = 0 = \tilde{\lambda}_{m+1}; i = 1, 2, \dots, m \\ \tilde{\lambda}_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{q}_i^{(k)} + \sum_{n=1}^k \tilde{W}) - d; i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (I.25)$$

Если $|\tilde{P}_i| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\{\tilde{B}_{ii}^{(k^*)}(G) = \tilde{G}_0^{(k^*)}, \tilde{\lambda}_n = (\tilde{q}_n - \tilde{W}), \tilde{P}_n = 0, \tilde{q}_n = \tilde{\lambda}_n\}_{n=i^*}^m, \text{ для всех } k \geq k^* \quad (I.26)$$

2. $\{[AB(\Lambda)], Wd$ -метод}. Если $|\tilde{P}_i| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i^{(k)} &= (\tilde{P}_i \tilde{c}_i) / ((\tilde{q}_{j-1} - \tilde{W})(\tilde{q}_i - \tilde{W})); \tilde{q}_i = 0 = \tilde{q}_{m+1}; j = m, m-1, \dots, 2 \\ \tilde{\Lambda}_{i+1} &= 1 - \tilde{q}_{i+1}^{(k)} / \tilde{\Lambda}_i^{(k)}; \tilde{\Lambda}_1 = \tilde{\Lambda}_m = 1; i = 2, 3, \dots, m \\ \tilde{B}_{ii}(\Lambda) &= \{1 + (1 - \tilde{\Lambda}_{i-2}) \cdot \tilde{B}_{i,i-1}(\Lambda)\} \cdot \tilde{\Lambda}_{i-1}^{(k)}; \tilde{B}_{ii} = \tilde{\Lambda}_0^{(k)}; j = m-1, \dots, 1 \\ \tilde{\lambda}_j &= (\tilde{q}_j - \tilde{W}) \{1 - \tilde{\Lambda}_{j+1} + \tilde{B}_{jj}^{(k)}(\Lambda)\}; j = m, m-1, \dots, 1 \\ \tilde{P}_j^{(k)} &= (\tilde{\lambda}_{j-1} / \tilde{\lambda}_j) \cdot \tilde{P}_j; j = m, m-1, \dots, 2 \\ \tilde{q}_j^{(k)} &= \tilde{\lambda}_j + (\tilde{q}_{j-1} - \tilde{W}) - \tilde{\lambda}_{j-1}; (\tilde{q}_0 - \tilde{W}) = 0 = \tilde{\lambda}_0; j = m, m-1, \dots, 1 \\ \tilde{\lambda}_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{q}_j^{(k)} + \sum_{n=1}^k \tilde{W}) - d; i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (I.27)$$

Если $|\tilde{P}_i| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\{\tilde{B}_{ii}^{(k^*)}(\Lambda) = \tilde{\Lambda}_0^{(k^*)}, \tilde{\lambda}_n = (\tilde{q}_n - \tilde{W}), \tilde{P}_n = 0, \tilde{q}_n = \tilde{\lambda}_n\}_{n=j^*}^m, \text{ для всех } k \geq k^* \quad (I.28)$$

При этом в [I] было показано, что величины $\tilde{P}_i^{(k)}$ и $\tilde{T}_i^{(k)}$ в $T_\Lambda Wd$ -методе (I.7)+(I.9) связаны соотношением

$$\tilde{P}_i^{(k)} = \begin{cases} [(\tilde{q}_i - \tilde{W}) - \tilde{T}_i^{(k)}] \cdot \tilde{T}_i^{(k)} \cdot \tilde{c}_i^{-1}, & \text{если } \tilde{c}_i \neq 0 \\ [(\tilde{q}_i - \tilde{W}) - \tilde{T}_i^{(k)}] \cdot \tilde{P}_i / [(\tilde{q}_{i-1} - \tilde{W}) - \tilde{T}_{i-1}^{(k)}], & \text{если } \tilde{c}_i = 0 \end{cases} \quad (I.29)$$

а в $T_G Wd$ -методе (I.18)+(I.20) величины $\tilde{P}_i^{(k)}$ и $\tilde{F}_i^{(k)}$ соотношением

$$\tilde{P}_i^{(k)} = \begin{cases} [(\tilde{q}_{i-1} - \tilde{W}) - \tilde{F}_{i-1}^{(k)}] \cdot \tilde{F}_{i-1}^{(k)} \cdot \tilde{c}_i^{-1}, & \text{если } \tilde{c}_i \neq 0 \\ [(\tilde{q}_{i-1} - \tilde{W}) - \tilde{F}_{i-1}^{(k)}] \cdot \tilde{P}_i / [(\tilde{q}_i - \tilde{W}) - \tilde{F}_i^{(k)}], & \text{если } \tilde{c}_i = 0 \end{cases} \quad (I.30)$$

Указанные выше ускоренные алгоритмы $M[\Lambda, (W-d)]$ -множества методов и $\{GB(G), Wd$ -метода} обладают [I] скоростью сходимости не хуже чем

$$\tilde{P}_i^{(k)}(W) = \prod_{n=1}^k \left[\frac{\tilde{\lambda}_i^{(n)}(W)}{\tilde{\lambda}_i^{(n)}(W)} \right] \cdot \tilde{P}_i^{(0)}(W); i = 2, 3, \dots, m, \quad (I.31)$$

а алгоритмов $M[G, (W-d)]$ -множества методов и $\{[AB(\Lambda)], Wd$ -метода} - скоростью сходимости не хуже чем

$$\tilde{P}_j^{(k)}(\tilde{W}) = \prod_{n=1}^k \left[\frac{\tilde{\lambda}_j^{(n)}(\tilde{W})}{\tilde{\lambda}_j^{(n)}(\tilde{W})} \right] \cdot \tilde{P}_j^{(0)}(\tilde{W}); j = m, m-1, \dots, 2 \quad (I.32)$$

В указанных выше ускоренных алгоритмах, если собственные значения матрицы $\tilde{C}(d)$ (I.2) удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_1(d)| > |\lambda_2(d)| > \dots > |\lambda_{n-1}(d)| > |\lambda_n(d)| > 0 \\ (0 < |\tilde{\lambda}_1(d)| < |\tilde{\lambda}_2(d)| < \dots < |\tilde{\lambda}_m(d)| < |\tilde{\lambda}_{m+1}(d)|) \end{aligned} \right\}, \quad (I.33)$$

то итерационные ускоряющие коэффициенты $\tilde{W}_i^{(k)}$ и $\tilde{W}_j^{(k)}$ могут быть [II] взяты всюду в перечисленных выше методах, кроме $\{T_\Lambda Wd$ -метода (I.7)+(I.9) и $\{T_G Wd$ -метода (I.18)+(I.20)}, где они встречаются соответственно в виде

$$\tilde{W}_i^{(k)} = \tilde{q}_i^{(k)}(W) - \tilde{P}_i^{(k)}(W) \cdot \tilde{c}_i / \tilde{q}_{j-1}^{(k)}(W), \quad (I.34)$$

$$\tilde{W}_j^{(k)} = \tilde{q}_j^{(k)}(\tilde{W}) - \tilde{P}_j^{(k)}(\tilde{W}) \cdot \tilde{c}_j / \tilde{q}_i^{(k)}(\tilde{W}). \quad (I.35)$$

В $\{T_\Lambda Wd$ -методе (I.7)+(I.9) и $\{T_G Wd$ -методе (I.18)+(I.20)}, учитывая (I.29)+(I.30) и (I.34)+(I.35), $\tilde{W}_i^{(k)}$ и $\tilde{W}_j^{(k)}$ могут быть взяты в виде

$$\tilde{W}_i^{(k)} = \tilde{q}_i^{(k)}(W) - [\tilde{q}_i^{(k)}(W) - \tilde{W}_i^{(k)} - \tilde{T}_i^{(k)}(W)] \cdot \tilde{T}_i^{(k)}(W) / \tilde{q}_{i-1}^{(k)}(W); \tilde{W}_i^{(k)} = 0; k = 2, 3, \dots, 2 \leq i \leq m, \quad (I.36)$$

$$\tilde{W}_j^{(k)} = \tilde{q}_j^{(k)}(\tilde{W}) - [\tilde{q}_j^{(k)}(\tilde{W}) - \tilde{W}_j^{(k)} - \tilde{F}_j^{(k)}(\tilde{W})] \cdot \tilde{F}_j^{(k)}(\tilde{W}) / \tilde{q}_i^{(k)}(\tilde{W}); \tilde{W}_j^{(k)} = 0; k = 2, 3, \dots, 2 \leq j \leq m. \quad (I.37)$$

При этом имеют место [II] асимптотические равенства

$$\left\{ \frac{\tilde{P}_i^{(k)}(W)}{\tilde{P}_i^{(k-1)}(W)} \right\}_{j=2}^m \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0, \quad \left\{ \frac{\tilde{P}_j^{(k)}(\tilde{W})}{\tilde{P}_j^{(k-1)}(\tilde{W})} \right\}_{j=2}^m \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0. \quad (I.38)$$

В [II] отмечали также, что при вычислении собственных значений матрицы \tilde{C} (I.2) (в соответствии с принципом фиксации [II], или, что то же самое [8], исчерпания) во всех, приведенных выше, двенадцати ускоренных методах ускоряющие коэффициенты \tilde{W} (соответственно \tilde{W}) включаются в процесс вычислений последовательно, т.е.

$$W = \sum_{n=1}^{(N_{i-1}+2)} W_{n-1+2} + \left\{ \sum_{i=2}^{i-1} W^{(N_{i-1}+1)} = W + \dots + W \right\}, i = 2, 3, \dots, m, \quad (I.39)$$

$$\tilde{W} = \sum_{n=1}^{(N_{i-1}+1)} \tilde{W}_i + \left\{ \sum_{j=2}^{j-1} \tilde{W} = \tilde{W} + \tilde{W} + \dots + \tilde{W} \right\}; i = 2, \dots, m, \text{ где} \quad (I.40)$$

$$\sum_{j=2}^k = \begin{cases} 0, & \text{при } k < 2 \\ \sum_{j=2}^k W, & \text{при } k \geq 2 \end{cases}$$

Кроме того, в [II] замечено, что на первых шагах вычислений для матриц, порядки которых $m \geq 200$, включать в итерационные процедуры ускоря-

щие смещения $\tilde{W}^{(1)}$ и $\tilde{W}^{(2)}$ лучше после того, когда первые 20+30 итераций будут выполнены без них. На теоретическом обосновании принципа выбора начального ζ -смещения мы останавливались в [9]. Однако в приложениях более эффективны другие способы, на которых мы остановимся при непосредственном описании программ.

В [2] были получены следующие алгоритмы для вычисления собственных векторов, соответствующих любому собственному значению λ трехдиагональной матрицы независимо от её структуры [2]. Эти алгоритмы справедливы (в том числе) и для матриц простой структуры типа $C(I.I)+(I.2)$.

I. Если λ - любое вещественное собственное значение вещественной трехдиагональной матрицы $C(I.I)+(I.I)'$ с ненулевыми внедиагональными элементами, то собственный вектор, соответствующий данному собственному значению, определяется в виде $X^{(1)}$

$$U_i(\lambda) = \cos t_\lambda U_i'(\lambda), \text{ где } \quad (I.4I)$$

$$\cos t_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^m [U_i'(\lambda)]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$U_i'(\lambda) = \begin{cases} -\frac{P_i}{\tilde{L}_i} U_{i-1}'(\lambda), & \text{если } 0 < \tilde{L}_i(\lambda) < \infty \text{ и } U_{i-1}'(\lambda) \neq 0, \\ -\frac{P_i}{\tilde{L}_i} U_i'(\lambda), & \text{если } \tilde{L}_i(\lambda) = 0 \text{ либо } U_{i-1}'(\lambda) = 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{L}_i(\lambda) = \infty, \text{ где } U_i'(\lambda) = 1, i = 2, 3, \dots, m. \end{cases} \quad (I.4I)'$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \tilde{L}_i(\lambda) &= q_i(\lambda) - p_i \zeta_i / \tilde{L}_i(\lambda); \quad \tilde{L}_m(\lambda) = q_m(\lambda); \quad i = m, m-1, \dots, 2, \\ (\tilde{L}_i(\lambda) = 0) &\rightarrow [\tilde{L}_i(\lambda) = \infty, \tilde{L}_i(\lambda) = q_i(\lambda); \text{ но } \tilde{L}_i(\lambda) \tilde{L}_{i+1}(\lambda) = -p_i \zeta_i]. \end{aligned} \right\} \quad (I.42)$$

2. Если $(\lambda = a + ib)$ - любое комплексное собственное значение вещественной трехдиагональной матрицы $C(I.I)+(I.I)'$ с ненулевыми внедиагональными элементами, то $X^{(2)}$

$$U_i(\lambda) = \cos t_\lambda \cdot U_i'(\lambda), \text{ где } \quad (I.43)$$

$$\cos t_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^m [U_i'(\lambda)]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left. \begin{aligned} U_i'(\lambda) &= X_n(\lambda) + i Y_n(\lambda), \\ \tilde{L}_n(\lambda) &= A_n(\lambda) + i B_n(\lambda); \quad n = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (I.44)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} \text{Если } 0 < |A_n(\lambda)|, |B_n(\lambda)| < \infty, \text{ то} \\ X_n(\lambda) &= -p_n [A_n(\lambda) X_{n-1}(\lambda) + B_n(\lambda) Y_{n-1}(\lambda)] / (A_n^2(\lambda) + B_n^2(\lambda)); \quad X_1(\lambda) = 1, \\ Y_n(\lambda) &= -p_n [A_n(\lambda) Y_{n-1}(\lambda) - B_n(\lambda) X_{n-1}(\lambda)] / (A_n^2(\lambda) + B_n^2(\lambda)); \quad Y_1(\lambda) = 0; \quad n = 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (I.43)'$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Если } A_n(\lambda) = 0 = B_n(\lambda), \text{ то} \\ X_n(\lambda) &= -p_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1}(\lambda) \\ Y_n(\lambda) &= -p_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} Y_{i-1}(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (I.45)$$

^{X)} В работе [2] получены также другие методы, эквивалентные приведенным здесь.

$$\text{Если } A_n(\lambda) = \infty = B_n(\lambda), \text{ то} \quad (I.46)$$

$$X_n(\lambda) = 0, \quad Y_n(\lambda) = 0.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A_m(\lambda) &= q_m - a; \quad B_m(\lambda) = -b, \\ A_{n-1}(\lambda) &= (q_{n-1} - a) - p_n \zeta_n A_n(\lambda) / (A_n^2(\lambda) + B_n^2(\lambda)), \quad n = m, m-1, \dots, 2, \\ B_{n-1}(\lambda) &= -(b - p_n \zeta_n B_n(\lambda) / (A_n^2(\lambda) + B_n^2(\lambda))), \quad n = m, m-1, \dots, 2. \end{aligned} \right\} \quad (I.47)$$

$$\left. \begin{aligned} [A_n(\lambda) = 0 = B_n(\lambda)] \rightarrow [A_n(\lambda) = \infty = B_n(\lambda), A_n(\lambda) = q_n - a, B_n(\lambda) = -b], \\ \text{но } (A_n(\lambda) + i B_n(\lambda))(A_n(\lambda) + i B_n(\lambda)) = -p_n \zeta_n \end{aligned} \right\} \quad (I.48)$$

3. Пусть $(I.I)C$ - вещественная трехдиагональная матрица общего вида, элементы которой удовлетворяют любому из условий

- A. $\{ \{ \zeta_k \neq 0 \}_{k=2}^m \text{ и } \{ p_k \neq 0 \}_{k=2}^m \}$.
- B. $\{ \zeta_s = 0 \}$ для любых s из интервала $2 \leq s \leq m$.
- C. $\{ (\zeta_{k_1} = 0 \text{ и } p_{k_1} \neq 0) \text{ либо } (p_{k_1} = 0 \text{ и } \zeta_{k_1} \neq 0) \}$, $\{ (\zeta_{k_2} = 0 \text{ и } p_{k_2} \neq 0) \text{ либо } (p_{k_2} = 0 \text{ и } \zeta_{k_2} \neq 0) \}, \dots, \{ (\zeta_{k_m} = 0 \text{ и } p_{k_m} \neq 0) \text{ либо } (p_{k_m} = 0 \text{ и } \zeta_{k_m} \neq 0) \}$, где $2 \leq k_1 < \dots < k_m \leq m$.

Пусть также λ_j - любое (в том числе кратное или комплексное) собственное значение при любых i и j , удовлетворяющих условиям $i \in [K_i, K_{i+1}] \subset [S_i, S_{i+1}]$, и $j \neq i'$ при i' из интервала $i' \in [S_i', S_{i'+1}'] \subset [S_{i'}, S_{i'+1}']$ такое, что $\lambda_i = \lambda_{i'}$, а также $K_{i'}$ и $K_{i'2}$ - номера соответствующих нулевых наддиагональных и поддиагональных элементов матриц $C(I.I)$, где $[K_i, K_{i+1}]$ и $[S_i, S_{i+1}]$ - целочисленные интервалы

$$\{1, S_1-1\}, \{S_1, S_2-1\}, \dots, \{S_i, S_{i+1}-1\}, \dots, \{S_{m-1}, S_m-1\}, \{S_m, m\},$$

$$\{S_i, K_{i+1}\}, \{K_i, K_{i+1}\}, \dots, \{K_i, K_{i+1}\}, \dots, \{K_{m-1}, K_m\}, \{K_m, S_{i+1}\}, \quad \text{и}$$

$$\{2 \leq S_1' \leq S_2' \leq \dots \leq S_m' \leq m\} \text{ и } \{S_i+1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq S_{i+1}'\},$$

построенные с учетом условий B) и C).

Тогда собственные и присоединенные (=циклические) [6] векторы, соответствующие данному λ_j с номером j из интервала $j \in [K_i, K_{i+1}]$ при любых i , находятся как решения соответствующих систем уравнений с трехдиагональными матрицами (в общем случае меньшей размерности, чем размерность исходной матрицы $C(I.I)$) в виде:

I. Если для некоторого $K_{i'}$ выполняются условие $\zeta_{K_{i'}} = 0$ и при этом оказывается, что $[K_{i'} < K_i$ и $\{ \zeta_i \neq 0 \}_{i=K_{i'+1}}^{K_i}$, и для некоторого $K_{i'2}$ выполняется условие $p_{K_{i'2}} = 0$ и при этом оказывается, что $[K_{i'2} < K_{i'}$ и $\{ p_i \neq 0 \}_{i=K_{i'+1}}^{K_{i'2}}$, то:

$$\text{I. Если } j' \notin [K_{i'}, K_{i'+1}] \text{ и } j' \notin [K_{i'2}, K_{i'+1}] \text{, то}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= 0, \text{ если } j' \notin [K_{i-1}, i-1] \\ \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}}, \text{ если } j' \in [K_{i-1}, i-1] \\ \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c}_{K_i} U_{K_i}(\lambda_j) \end{bmatrix} \\ \hat{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= \begin{bmatrix} -P_{K_{i+1}} U_{K_{i+1}}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (I.49)$$

2. Если $j' \in [K_{i-1}, K_{i-1}]$ и $j' \notin [K_{i+1}, K_{i+1}]$, то

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}}, \text{ где } \lambda_{j'} = \lambda_j, j' \in [K_{i+1}, i-1] \\ \hat{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= \begin{bmatrix} -P_{K_{i+1}} U_{K_{i+1}}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (I.50)$$

3. Если $j' \in [K_{i+1}, K_{i+1}]$ и $j' \in [K_{i-1}, K_{i-1}]$ (или $j' \in [K_{i+1}, K_{i-1}]$), а $j' \in [\tilde{K}_{i-1}, \tilde{K}_{i-1}]$ и $j' \notin [\tilde{K}_{i+1}, K_{i+1}]$ при $K_{i+1} \leq \tilde{K}_{i-1} < \tilde{K}_{i+1} < K_{i+1}$, то

$$\left. \begin{aligned} U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= 0 \\ \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= 0 \\ \hat{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= \begin{bmatrix} -P_{\tilde{K}_{i+1}} U_{\tilde{K}_{i+1}}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (I.51)$$

II°. Если же $K_{i-1} = K_i$ и $K_{i+1} < K_{i+1}$, то:

I. Если $j' \notin [\tilde{K}_{i-1}, i-1]$ и $j' \notin [K_{i+1}, K_{i+1}]$, где здесь и всюду далее в пункте II° $\tilde{K}_{i-1} < (K_{i-1} = K_i)$ такое, что существует $\tilde{c}_{\tilde{K}_{i-1}} \neq 0$ а $\{\tilde{c}_s = 0\}_{s=\tilde{K}_{i-1}+1}^{K_i}$, то

$$\left. \begin{aligned} U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} &= 0 \\ \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} &= 0 \\ \hat{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} &= \begin{bmatrix} -P_{K_{i+1}} U_{K_{i+1}}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (I.52)$$

2. Если $j' \notin [\tilde{K}_{i-1}, i-1]$ и $j' \in [\tilde{K}_{i+1}, \tilde{K}_{i+1}] \in [K_{i+1}, K_{i+1}]$ при $(K_{i+1} \leq \tilde{K}_{i+1} < \tilde{K}_{i+1} < K_{i+1})$, то

$$\left. \begin{aligned} U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} &= 0 \\ \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} &= 0 \\ \hat{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} &= \begin{bmatrix} -P_{\tilde{K}_{i+1}} U_{\tilde{K}_{i+1}}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (I.53)$$

3. Если $j' \in [\tilde{K}_{i-1}, i-1]$ и $\tilde{c}_{K_i} = 0$ и $\{\tilde{c}_s \neq 0\}_{s=K_i+1}^{\tilde{K}_{i+1}} (S_i \leq K_i < \tilde{K}_{i+1})$, то

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} &= U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} \\ \hat{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{\tilde{K}_{i-1}}^{K_i} &= \begin{bmatrix} -\tilde{c}_{K_i} U_{K_i}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (I.54)$$

III°. Если же $K_{i-1} < K_i$ и $K_{i+1} = K_{i+1}$, то:

I. Если $j' \in [K_{i-1}, i-1]$, то

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= 0 \\ \hat{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c}_{K_i} U_{K_i}(\lambda_j) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (I.55)$$

2. Если $j' \in [K_{i+1}, i-1]$, то

$$\tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} = U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} \quad (I.56)$$

IV°. Если же $K_{i-1} = K_i$ и $K_{i+1} = K_{i+1}$, а также существует такое $\tilde{K}_{i-1} < (K_{i-1} = K_i)$, что $\tilde{c}_{\tilde{K}_{i-1}} \neq 0$, а $\{\tilde{c}_s = 0\}_{s=\tilde{K}_{i-1}+1}^{K_i}$, то:

I. Если $j' \in [\tilde{K}_{i-1}, i-1]$, то

$$\tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} = U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} \quad (I.57)$$

2. Если $j' \notin [\tilde{K}_{i-1}, i-1]$, то

$$\tilde{C}(\lambda_j) U(\lambda_j) \Big|_{K_{i-1}}^{K_{i+1}} = 0 \quad (I.58)$$

Здесь обозначили

$$\left. \begin{aligned} C(\lambda) U(\lambda) \Big|_i^j &\equiv \begin{bmatrix} q_{i-1}^{(j)} \tilde{c}_{i-1} & & \\ P_{i-1} & q_{i-1}^{(j)} \tilde{c}_{i-1} & \\ & P_i & q_i^{(j)} \tilde{c}_i \\ & & P_i & q_i^{(j)} \tilde{c}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i(\lambda) \\ U_{i-1}(\lambda) \\ U_i(\lambda) \\ U_i(\lambda) \end{bmatrix} \\ U(\lambda) \Big|_i^j &\equiv (U_i(\lambda), U_{i-1}(\lambda), \dots, U_j(\lambda))^T \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c}_i U_i(\lambda) \end{bmatrix} &\equiv (0, \dots, 0, (-\tilde{c}_i U_i(\lambda)))^T \\ \begin{bmatrix} -P_i U_i(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} &\equiv ((-P_i U_i(\lambda)), 0, \dots, 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (I.59)$$

и T- знак транспонирования. А также полагаются равными нулю все неуказанные (в соответствующих интервалах каждого из построенных матричных процессов) компоненты собственных и присоединенных векторов.

2. Описание системы программ на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления полного спектра вещественных трехдиагональных матриц простой^{х)} структуры, а также собственных и присоединенных (циклических) векторов любых вещественных трехдиагональных матриц

Алгоритмы §I настоящей работы нахождения всех вещественных собственных значений вещественных трехдиагональных матриц простой структуры общего вида $C(I, I) + (I, I)'$ реализуются в подпрограммах DGA1M1, DGA1M2, DGA1M3, DGA1M4, DGA1M5, DIMGA1, DIMGA2, DIMGA3, DIMGA4, DIMGA5, DGBGW1 и DLBLWD.

х) Напомним (см., например, [6, 7, 11]), что в случае квадратных матриц простой структуры число собственных векторов равно размерности матрицы, а в случае дефектных (= не простой структуры) матриц число собственных векторов меньше размерности матрицы. В описываемой ниже системе программ для вычисления полного спектра трехдиагональных матриц нами в основном использованы алгоритмы [1], приведенные в §I настоящей работы. При этом в программы уже включены незначительные модификации этих алгоритмов (на них мы подробнее остановимся в следующей работе), которые позволили вычислять и кратные собственные значения трехдиагональных матриц простой структуры.

В подпрограмме DGAIM1 для вычисления собственных значений используется алгоритм (I.3)+(I.4), в DGAIM2 — (I.5)+(I.6), в DGAIM3 — (I.10)+(I.11), в DGAIM4 — (I.12)+(I.13), в DGAIM5 — (I.7)+(I.9), в DIMGA1 — (I.14)+(I.15), в DIMGA2 — (I.16)+(I.17), в DIMGA3 — (I.21)+(I.22), в DIMGA4 — (I.23)+(I.24), в DIMGA5 — (I.18)+(I.20), в DGBGWD — (I.25)+(I.26) и в DLBLWD — (I.27)+(I.28). В подпрограммах DGAIM5 и DIMGA5 ускоряющие сходимость итерационные коэффициенты $\tilde{W}_j^{(k)}$ и $\tilde{W}_j^{(k)}$ выбираются в виде (I.36) и (I.37) соответственно, а для ускорения сходимости в подпрограммах DGAIM1 + DGAIM4, DGBGWD — \tilde{W} (I.34) и в подпрограммах DIMGA1 + DIMGA4, DLBLWD — \tilde{W} (I.35).

Подпрограммы используют арифметику с двойной точностью.

В [I] показано, что все приведенные выше алгоритмы вычисления собственных значений корректны (т.е. устойчивы и на ЭВМ осуществимы до конца без срывов), если обеспечить отличие от нуля всех главных верхних (либо соответственно нижних) угловых миноров у исходной матрицы C (I.1). Для этого достаточно, как отмечали в [9], выбрать начальное d -смещение таким, чтобы \tilde{C} (I.2) была бы с диагональным преобладанием, поскольку диагональное преобладание есть достаточное условие положительной определенности и, следовательно, отличия от нуля всех главных угловых миноров. Однако, как известно, отличными от нуля главные угловые миноры могут быть не только у матриц с диагональным преобладанием. Поэтому на практике оказалась более эффективной другая стратегия выбора начального d -смещения, по сути аналогичная стратегии выбора \tilde{W}_j и \tilde{W}_j — итеративных ускоряющих смещений. А именно. Если в соответствующих (перечисленных выше) методах появляются равенства $\{\lambda_{i+1} = c, \lambda_i = 0\}, \{c_{i+1} = c, \lambda_i = 0\}, \{c_i = 1, s_i = 1\}, \{c_i = q_i, r_i = q_i\}$ при любых i для исходной матрицы C (I.1), то итерационным образом в нее добавляется единичная матрица, т.е. $\tilde{C} = C + E$, до тех пор пока для матрицы \tilde{C} (при всех i) (в соответствующих методах) не окажется отмеченных выше равенств.

Все собственные и связанные с ними циклические векторы матрицы C (I.1) вычисляются в подпрограммах DBEKT0 и SBEKT0. В подпрограмме DBEKT0 нами использованы алгоритмы (I.41)+(I.42) и (I.43)+(I.48). Следовательно, DBEKT0 может вычислять лишь корневые [6] векторы только трехдиагональных матриц с ненулевыми внедиагональными элементами. В подпрограмме SBEKT0 использованы алгоритмы (I.51)+(I.60) в комбинации с некоторыми модулями из DBEKT0. Следовательно, подпрограмма SBEKT0 может быть использована для вычисления корневых векторов трехдиагональных матриц общего вида.

В DBEKT0 включены три основные подпрограммы DBTM1, DBTM2 и MEMOP. В DBTM1 реализованы алгоритмы (I.41)+(I.42) и (I.43)+(I.48).

DBTM2 вычисляет присоединенные векторы для кратных собственных значений, используя алгоритм (C-AE) $\tilde{U}(k) = \tilde{U}(k)$ [6]. В MEMOP использован алгоритм немонотонной прогонки [4] для уточнения^{x)} собственных векторов, вычисленных подпрограммой DBTM1.

В SBEKT0 включены пять подпрограмм: SVTM1 использует алгоритмы (I.41)+(I.42) и (I.43)+(I.48), SVTM2 и SVTM3 — алгоритмы (I.58) и (I.49), а подпрограммы SNEMP1 и SNEMP2 — алгоритмы (I.49)₃ и (I.49)₄ соответственно.

Обращение к подпрограммам вычисления всех собственных значений:

```
CALL DGAIM1(M, P, R, Q, IERR, NP)
CALL DGAIM2(M, P, R, Q, IERR, NP)
CALL DGAIM3(M, P, R, Q, IERR, NP)
CALL DGAIM4(M, P, R, Q, IERR, NP)
CALL DGAIM5(M, P, R, Q, IERR, A, B, NP)
```

(2.1)

```
CALL DIMGA1(M, P, R, Q, IERR, NP)
CALL DIMGA2(M, P, R, Q, IERR, NP)
CALL DIMGA3(M, P, R, Q, IERR, NP)
CALL DIMGA4(M, P, R, Q, IERR, NP)
CALL DIMGA5(M, P, R, Q, IERR, A, B, NP)
```

(2.2)

```
CALL DGBGWD(M, P, R, Q, IERR, A, NP)
CALL DLBLWD(M, P, R, Q, IERR, A, NP)
```

(2.3)

Здесь:

M — порядок исходной квадратной вещественной трехдиагональной матрицы C (I.1) простой структуры.

P, R, Q — одномерные массивы размерности M , содержащие поддиагональные, наддиагональные и диагональные элементы исходной матрицы C (I.1) соответственно (на входе). При этом (над)поддиагональные элементы матрицы C (I.1) помещаются в соответствующем массиве начиная со второй ячейки. Содержимое ячеек $P(i)$ и $R(i)$ — несущественно. На выходе из подпрограмм в Q содержатся все собственные значения, P — не сохраняется а R — сохраняется.

A, B — одномерные рабочие массивы размерности M .

NP — целый одномерный рабочий массив размерности M .

$IERR$ — целая переменная для сообщения об ошибках: I^0 . Если на выходе $IERR \neq 0$, то вычисления неудовлетворительные, т.к. при

^{x)} Отметим, что если собственные значения получены с использованием одного из приведенных выше в §I методов, то подпрограмма DBTM1 уже дает собственные векторы с точностью не хуже, чем известные стандартные программы.

вычислении одного из собственных значений сделано более чем 30 итераций, но необходимая точность не достигнута. 2°. Если $1ERR=0$, то все собственные значения найдены с удовлетворительной точностью. Печать выходной информации не предусмотрена.

Обращение к подпрограммам вычисления всех собственных векторов:

```
CALL DВЕКТО (M, P, R, Q, AL, BL, U, INDEX, B, C, MI, NI) }
CALL СВЕКТО (M, P, R, Q, AL, BL, U, INDEX, B, NS, NP) }
```

(2.4)

Здесь:

- M – порядок исходной квадратной вещественной трехдиагональной матрицы $\Phi(I, I)$ произвольной структуры, а массивы P, R, Q на входе имеют такой же смысл, как и выше.
- AL, BL – одномерные массивы размерности M , содержащие (на входе) действительные и соответственно мнимые части всех (в том числе и одинаковых в случае кратности) собственных значений.
- B, C, MI, NI, NS, NP – вещественные и (соответственно) целые одномерные рабочие массивы размерности M .
- U – двумерный вещественный массив размерности $[M \times M]$, содержащий (в столбцах) на выходе из подпрограммы собственные и соответствующие им присоединенные (=циклические) векторы. Чтобы в массиве U найти собственные векторы, отвечающие данному λ , и соответствующие им присоединенные векторы, необходимо проанализировать также массивы, содержащие собственные значения и массив $INDEX$. Массив целых переменных $INDEX$ размерности M на выходе из подпрограммы содержит целые нули и единицы. Единица является признаком собственного а нуль – признаком присоединенного векторов. Если в j -ячейке массива единица, т.е. $INDEX(j)=1$, то j -столбец массива U содержит $U(j)$ – собственный вектор, соответствующий вещественному собственному значению λ_j . В случае комплексного $\lambda_j = a + ib$ собственного значения мнимая часть $\gamma(\lambda_j)$ собственного вектора $U(\lambda_j) = \chi(\lambda_j) + i \gamma(\lambda_j)$ содержится в $j+1$ ячейке массива U . При этом сопряженный собственный вектор $U(\bar{\lambda}_j) = \chi(\lambda_j) - i \gamma(\lambda_j)$ в массиве U не хранится, а выбирается самим пользователем в соответствии с данным выше определением.

Замечание 1. Пусть \mathcal{C} – сумма единиц в массиве $INDEX$, тогда \mathcal{C} есть число циклических подпространств, прямой суммой которых является все пространство R_n [6],

$$R_n = \sum_{j=1}^{\mathcal{C}} R_{\lambda_{k_j}} = \sum_{i=1}^{\mathcal{C}} \sum_{p=1}^{\ell_j} \tilde{R}_{\lambda_{k_i}}$$

где $R_{\lambda_{k_j}}$ – корневые подпространства, $\tilde{R}_{\lambda_{k_i}}$ – циклические подпространства, а $k_1, k_2, \dots, k_{\mathcal{C}}$ – алгебраические кратности для всех различных собственных значений $\lambda_{k_1} \neq \lambda_{k_2} \neq \dots \neq \lambda_{k_{\mathcal{C}}}$. Тогда $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{\mathcal{C}} \ell_j$, где ℓ_j – число

циклических подпространств в корневом $R_{\lambda_{k_j}}$ –пространстве. Зная теперь $\mathcal{C}, \ell, \{\ell_j\}$ и анализируя массивы $INDEX$ и массив собственных значений, пользователь может определить, сколько ящиков Жордана соответствует данному λ_{k_j} и какова их размерность.

Замечание 2. При обращении к подпрограмме $СВЕКТО$ следует иметь в виду, что в AL -, BL -массивах должны (на входе) задаваться все собственные значения, расположенные в естественной последовательности (т.е. без дополнительного упорядочения). Естественный порядок расположения последовательности собственных значений обеспечивают, например, методы $\$I, LR(RL)$ -, $QR(QL)$ - методы и метод бисекций и т. д. На подпрограмму $ДВЕКТО$ указанное ограничение на порядок задания собственных значений не распространяется.

Замечание 3. В следующей работе будут описаны версии указанных подпрограмм $ДВЕКТО$ и $СВЕКТО$, в которых массив U размерностью $[M \times M]$, будет заменен на массив \tilde{U} размерностью $[M \times N; N \leq M]$.

3. Приложения

В настоящем параграфе приводятся примеры тестовых расчетов с использованием описанных выше новых программ и даются таблицы сравнения результатов вычислений с результатами основных стандартных программ [5]. Расчеты проводились для четырех следующих матриц C_1, C_3, C_5, C_6 :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \{q_i = q = 2; \mathcal{C}_n = \mathcal{C} = -1; p_n = p = -1\}_{i=1, n=2}^m \\ C_3 &= \{q_i = q = 1; \mathcal{C}_n = \mathcal{C} = -1; p_n = p = -1\}_{i=1, n=2}^m \\ C_5 &= \{q_i = 3 - \frac{1}{i}; \mathcal{C}_n = 2 - \frac{1}{n}; p_n = 1 - \frac{1}{n}\}_{i=1, n=2}^m \\ C_6 &= \{q_i = 2 + \frac{1}{i}; \mathcal{C}_n = 1 + \frac{1}{n}; p_n = 1.1 + \frac{1}{n}\}_{i=1, n=2}^m \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где $\{q_i\}_{i=1}^m$ – диагональные, $\{\mathcal{C}_i\}_{i=2}^m$ – наддиагональные а $\{p_i\}_{i=2}^m$ – поддиагональные элементы матриц $\Phi(I, I)$. Известно [3], что собственные значения симметричных матриц C_1, C_3 могут быть найдены по формуле

$$\lambda_k = q - 2\sqrt{p} \mathcal{C} \cos(k\theta); k=1, 2, \dots, m; \theta = \frac{\pi}{m+1}, \quad (3.2)$$

а собственные векторы матриц C_3, C_1 – по формуле [4]

$$U_i(\lambda_j) = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin\left(\frac{\pi}{m+1} i \cdot j\right); i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

Ниже в таблицах I+4 приводятся основные результаты численных расчетов с матрицами $C_1 + C_6$ соответственно. В таблице 5 помещен подсчет числа различных арифметических операций, используемых методами. Из библиотеки [5] нами были при этом выбраны стандартные подпрограммы: $DMTQL2, DCMLR2, DESRG1, DMTQL1$ и $DNQR$.

Подпрограмма $DMTQL2$ вычисляет собственные значения и собственные векторы симметричных вещественных трехдиагональных матриц на основе QL – алгоритма а $DMTQL1$ – только собственные значения, $DCMLR2$ – соб-

ственные значения и собственные векторы комплексной матрицы в верхней форме Хессенберга на основе модифицированного LR-алгоритма. DESRG1 вычисляет собственные значения и собственные векторы только вещественной матрицы общего вида на основе также модифицированного LR-алгоритма а DNGR - собственные значения вещественной матрицы в верхней форме Хессенберга, используя QR-алгоритм. Собственные векторы нами были вычислены по подпрограмме DVEKTO.

Замечание 4. Мы не включили в таблицы результаты расчетов по стандартным программам с использованием методов бисекций и прямых (обратных) итераций по той причине, что в случае вычисления всех собственных значений и всех собственных (присоединенных) векторов эти программы, как известно [10], менее эффективны, чем программы, использующие QR-метод. В следующей работе будут приведены результаты численных расчетов для матриц любой структуры с использованием программы SVEKTO.

Пояснения к таблицам. В первом столбце каждой из таблиц I+3 указывается тестовая матрица, во втором - M - ее размерность, в третьем - название подпрограммы, в четвертом - N - полное число итераций по достижении всеми собственными значениями нужной точности, в пятом - $\{ \Delta S = \sum_{i=1}^m \lambda_i - \sum_{i=1}^m \lambda_i \}$, в шестом - максимум модуля скалярного произведения различных собственных векторов, в седьмом - $\Delta = \max_i |(C - \lambda_i E) U(\lambda_i)|$, в восьмом - полное время, затраченное на вычисление всех λ и всех $U(\lambda)$. В таблице 4 приведены результаты для матрицы C1. При этом в столбцах таблицы 4 помещена информация аналогичная таблицам I+3 и добавлен только столбец $t_{\lambda, u(\lambda)}$ - время вычисления всех собственных значений.

З а к л ю ч е н и е

В заключение отметим, что в работе описана система новых эффективных подпрограмм для вычисления всех собственных значений вещественной трехдиагональной матрицы простой структуры и всех корневых векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида. При этом (как следует из анализа таблиц I+5, при требовании одинаковой точности на собственные значения) программы дают результаты:

1) Время вычисления всех собственных значений приблизительно в 2 раза меньше, чем в QR(QL) - алгоритме для симметричных вещественных трехдиагональных матриц.

2) $\frac{t_{\lambda, u(\lambda)}}{t_{\lambda, u(\lambda)}} = k \approx 1 + \frac{M}{S}$, где $t_{\lambda, u(\lambda)}$ - полное время (в секундах) лучших из методов §I и $t_{\lambda, u(\lambda)}$ - аналогичное время с использованием QR(QL) - алгоритма.

3) Среднее число итераций на одно собственное значение в методах §I не превосходит 4, а в QR(QL) - алгоритме (согласно [7,8]) не превосходит 5.

Таблица I

M	Подпр.	N	ΔS	$\max_{i,j} U(\lambda_i)U(\lambda_j) $	$\max_i \Delta_i $	$t_{\lambda, u(\lambda)}$	
100	DGAIM1	302	0.50804E-II	0.71429E-IO	0.32514E-IO	I.93948	
	DGAIM2	302	0.47038E-II	0.45240E-IO	0.19881E-IO	I.91190	
	DGAIM3	301	0.24265E-II	0.26613E-IO	0.11710E-IO	I.65686	
	DGAIM4	302	0.23626E-II	0.25701E-IO	0.11307E-IO	I.55350	
	DGAIM5	372	0.49631E-II	0.51000E-IO	0.22414E-IO	I.36633	
	DIMGAI	302	0.21920E-II	0.25501E-IO	0.11201E-IO	I.77950	
	DIMGAI2	304	0.22169E-II	0.25501E-IO	0.11201E-IO	I.83058	
	DIMGAI3	302	0.22204E-II	0.25701E-IO	0.11307E-IO	I.60611	
	DIMGAI4	304	0.21387E-II	0.24821E-IO	0.10900E-IO	I.53456	
	DIMGAI5	375	0.47429E-II	0.50488E-IO	0.22165E-IO	I.42029	
	DGBGWD	305	0.23626E-II	0.25158E-IO	0.11000E-IO	I.89566	
	DLBLWD	304	0.22347E-II	0.26046E-IO	0.11307E-IO	I.89868	
	DMTQL2			0.56133E-I2	0.47219E-I4	0.30868E-09	II.2298
	DCMLR2			0.24123E-II	0.58934E+06	0.87289E+02	5I.1810
	DESRG1			0.77343E-II	0.65719E-08	0.13449E-09	29.2428
10	DGAIM1	32	0.26867E-I3	0.29087E-I3	0.39080E-I3	0.01906	
	DGAIM2	32	0.46629E-I3	0.51193E-I3	0.70374E-I3	0.01916	
	DGAIM3	32	0.28200E-I3	0.28049E-I3	0.39080E-I3	0.01713	
	DGAIM4	33	0.28422E-I3	0.28049E-I3	0.39080E-I3	0.01716	
	DGAIM5	41	0.59730E-I3	0.67335E-I3	0.92426E-I3	0.01826	
	DIMGAI	32	0.25535E-I3	0.29087E-I3	0.39080E-I3	0.02081	
	DIMGAI2	33	0.26645E-I3	0.30227E-I3	0.42494E-I3	0.02110	
	DIMGAI3	32	0.26867E-I3	0.28049E-I3	0.39080E-I3	0.01898	
	DIMGAI4	32	0.26867E-I3	0.28049E-I3	0.39080E-I3	0.01823	
	DIMGAI5	45	0.64615E-I3	0.73591E-I3	0.10188E-I2	0.02010	
	DGBGWD	37	0.23537E-I3	0.66481E-II	0.10146E-IO	0.02611	
	DLBLWD	35	0.25313E-I3	0.31446E-IO	0.29171E-IO	0.02525	
	DMTQL2			0.97700E-I4	0.48919E-I5	0.13931E-09	0.02585
	DCMLR2			0.22649E-I3	0.17654E-07	0.18434E-09	0.09415
	DESRG1			0.77494E-I3	0.70212E-IO	0.60762E-IO	0.05809

Таблица 2

M	Подпр.	N	ΔS	$\frac{\max\{U(\lambda_1), U(\lambda_2)\}}{U_0}$	$\frac{\max\{A_1\}}{A_0}$	$t_{\lambda, U(\lambda)}$	
100	DGAIM1	308	0.56843E-II	0.99891E 00	0.88432E-09	2.27597	
	DGAIM2	316	0.57980E-II	0.99891E 00	0.97081E-09	2.60570	
	DGAIM3	316	0.57980E-II	0.99891E 00	0.70737E-09	1.98815	
	DGAIM4	320	0.29559E-II	0.99891E 00	0.99680E-09	1.92342	
	DGAIM5	381	0.63665E-II	0.99891E 00	0.64564E-09	1.75896	
	DIMGA1	321	0.23874E-II	0.99891E 00	0.97290E-09	2.31784	
	DIMGA2	321	0.24443E-II	0.99891E 00	0.83213E-09	2.33876	
	DIMGA3	326	0.23306E-II	0.99891E 00	0.78350E-09	2.22141	
	DIMGA4	326	0.23306E-II	0.99891E 00	0.78350E-09	2.05606	
	DIMGA5	373	0.52864E-II	0.99891E 00	0.72517E-09	1.93464	
	DGBGWD	321	0.32401E-II	0.99891E 00	0.97064E-09	2.27721	
	DLBLWD	321	0.25011E-II	0.99891E 00	0.66170E-08	3.15645	
	DMTQL2						
C5	DCMLR2		0.31832E-II	0.11928E+31	0.50619E+16	47.8412	
	DESRG1		0.12392E-10	0.41631E+27	0.60410E+04	35.9756	
10	DGAIM1	34	0.31974E-I3	0.88732E 00	0.34610E-II	0.01977	
	DGAIM2	34	0.67502E-I3	0.88732E 00	0.79682E-II	0.02013	
	DGAIM3	34	0.35527E-I3	0.88732E 00	0.40689E-II	0.01766	
	DGAIM4	33	0.35527E-I3	0.88732E 00	0.32888E-II	0.01731	
	DGAIM5	42	0.71054E-I3	0.88732E 00	0.98981E-II	0.01873	
	DIMGA1	35	0.31974E-I3	0.88732E 00	0.29544E-II	0.02171	
	DIMGA2	34	0.28422E-I3	0.88732E 00	0.24837E-II	0.02126	
	DIMGA3	35	0.31974E-I3	0.88732E 00	0.29544E-II	0.01952	
	DIMGA4	35	0.31974E-I3	0.88732E 00	0.29544E-II	0.01855	
	DIMGA5	45	0.63949E-I3	0.88732E 00	0.83128E-II	0.02023	
	DGBGWD	39	0.39080E-I3	0.88732E 00	0.28453E-09	0.02670	
	DLBLWD	37	0.31974E-I3	0.88732E 00	0.42369E-09	0.02686	
	DMTQL2						
	DCMLR2			0.14211E-I3	0.33430E+02	0.20694E-08	0.07243
	DESRG1			0.20606E-I2	0.34984E+02	0.33990E-08	0.07380

Таблица 3

M	Подпр.	N	ΔS	$\frac{\max\{U(\lambda_1), U(\lambda_2)\}}{U_0}$	$\frac{\max\{A_1\}}{A_0}$	$t_{\lambda, U(\lambda)}$	
100	DGAIM1	313	0.49596E-II	0.89694E 00	0.26849E-II	2.03775	
	DGAIM2	315	0.50484E-II	0.89694E 00	0.87672E-09	2.18845	
	DGAIM3	315	0.45048E-II	0.89694E 00	0.83155E-09	1.66522	
	DGAIM4	315	0.21103E-II	0.89694E 00	0.52946E-09	1.79831	
	DGAIM5	373	0.47571E-II	0.89694E 00	0.39364E-08	1.60191	
	DIMGA1	310	0.22666E-II	0.89694E 00	0.17971E-09	1.95439	
	DIMGA2	310	0.23235E-II	0.89694E 00	0.16871E-10	1.98724	
	DIMGA3	310	0.22240E-II	0.89694E 00	0.23045E-09	1.74216	
	DIMGA4	310	0.22240E-II	0.89694E 00	0.23045E-09	1.65480	
	DIMGA5	373	0.47280E-II	0.89694E 00	0.14909E-II	1.55559	
	DGBGWD	318	0.22844E-II	0.89694E 00	0.12081E-06	4.56360	
	DLBLWD	310	0.23697E-II	0.89694E 00	0.16571E-07	2.51735	
	DMTQL2						
	DCMLR2			0.25366E-II	0.95206E+15	0.30517E+08	38.9731
	DESRG1			0.13749E-10	0.48305E+02	0.17598E-07	30.8082
10	DGAIM1	32	0.35527E-I3	0.17029E 00	0.26548E-I3	0.01905	
	DGAIM2	32	0.63949E-I3	0.17029E 00	0.27978E-I3	0.01938	
	DGAIM3	32	0.35527E-I3	0.17029E 00	0.17888E-I3	0.01753	
	DGAIM4	32	0.31974E-I3	0.17029E 00	0.13642E-I3	0.01696	
	DGAIM5	41	0.71054E-I3	0.17029E 00	0.38802E-I3	0.01848	
	DIMGA1	35	0.31974E-I3	0.17029E 00	0.16487E-I3	0.02124	
	DIMGA2	35	0.31974E-I3	0.17029E 00	0.16487E-I3	0.02094	
	DIMGA3	35	0.28422E-I3	0.17029E 00	0.15946E-I3	0.01907	
	DIMGA4	35	0.28422E-I3	0.17029E 00	0.15946E-I3	0.01845	
	DIMGA5	46	0.63949E-I3	0.17029E 00	0.35374E-I3	0.01988	
	DGBGWD	36	0.35527E-I3	0.17029E 00	0.50417E-10	0.02602	
	DLBLWD	37	0.28422E-I3	0.17029E 00	0.11104E-09	0.02570	
	DMTQL2						
	DCMLR2			0.39080E-I3	0.26914E+01	0.11844E-08	0.06514
	DESRG1			0.15987E-I2	0.17683E 00	0.78615E-09	0.06688

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н. Н. Говоруну за поддержку настоящих исследований.

Л и т е р а т у р а

- 1 . Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, РИИ-453-88, Дубна, 1988.
- 2 . Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, РИИ-736-88, Дубна, 1988.
- 3 . Р. Беллман, Введение в теорию матриц. М., Наука, 1976г. 244с.
- 4 . А. А. Самарский, Е. С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978г. 64с.
- 5 . Р. Н. Федорова, А. И. Широкова. Библиотека программ на ФОРТРАНе. т. VI . Описание программ. Дубна, 1983г.
- 6 . В. В. Воеводин. Линейная алгебра. М., Наука, 1980.
- 7 . Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений, М., Наука, 1970.
- 8 . В. В. Воеводин. Вычислительные основы линейной алгебры. М., Наука, 1977.
- 9 . Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, РИИ-452-88, Дубна, 1988.
10. Уилкинсон Гайнн. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М., Машиностроение, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1988 года.

Емельяненко Г.А., Им Ён Сек

P11-88-787

О системах программ на фортране ЭВМ ЕС-1061 (60)

для вычисления всех корневых векторов любых вещественных трехдиагональных матриц, а также полного спектра таких матриц простой структуры

Описаны новые эффективные подпрограммы для вычисления всех собственных значений вещественных трехдиагональных матриц простой структуры и всех корневых векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод авторов

Emelyanenko G.A., Im Yen Sec

P11-88-787

On Program Systems Written in ES-1061(60) Computer Fortran
for Calculation of All Radical Any Real Tridiagonal Matrix Vectors
and of Complete Spectrum of Simple Structure Matrices

Effective (unknown until) programs for all eigenvalue calculations of real tridiagonal simple structure matrices and all radical vectors of real tridiagonal matrices of general type are described.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988