объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-786

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

О ЕСТЕСТВЕННО-ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЯХ КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ С ОБРАЩАЮЩИМИСЯ В НУЛЬ ГЛАВНЫМИ БЛОЧНЫМИ УГЛОВЫМИ МИНОРАМИ

Направлено в "ЖВМ и МФ"

* Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1988

I. Введение

Целью настоящей работы является обобщение известных компактных факторизаций Гаусса для блочно-трехдиагональных матриц (в случае всех отличных от нуля их ведущих блочных миноров) на случай, когда некоторые из этих миноров обращаются в нуль.

Актуальность поставленной задачи, по-видимому, никогда не вызывала сомнений, поскольку ограничение на миноры всегда (см., например, [I÷20] и многие другие источники) оставалось серьезным препятствием при разработке эффективных численных методов решения различных задач с такими матрицами.

Однако практическое решение поставленной выше задачи стало возможным (по нашему мнению) благодаря результатам [8÷16].

Итак, пусть $\mathbb{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & z_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & z_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & z_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_1 & \tilde{z}_2 & & & & \\ \tilde{p}_2 & E_2 & \tilde{z}_3 & & & \\ & \tilde{p}_3 & E_3 & \tilde{z}_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & \tilde{p}_{m-1} & E_{m-1} & \tilde{z}_m \\ & & & & \tilde{p}_m & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & & & \\ & q_2 & & & & \\ & & q_3 & & & \\ & & & - & & \\ & & & & q_{m-1} & \\ & & & & & q_m \end{bmatrix}=\tilde{\mathbb{C}}\cdot\mathbb{C}_{\text{Ф}}, \quad (I.I)$$

где

$$\left\{\tilde{z}_\kappa = z_\kappa\cdot q_\kappa^{-1};\ \tilde{p}_\kappa = p_\kappa\cdot q_{\kappa-1}^{-1}\right\}_{\kappa=2}^{m}, \quad (I.2)$$

$\{E_\kappa, q_\kappa\}_{\kappa=1}^{m}$ – неособенные (E_κ – единичные) квадратные (в общем случае разных размерностей) диагональные элементы-блоки, а $\{z_\kappa, p_\kappa;\ \tilde{z}_\kappa, \tilde{p}_\kappa\}_{\kappa=2}^{m}$ – прямоугольные (соответствующих размерностей) внедиагональные элементы – блоки[x)] у матриц $\mathbb{C}$ и $\tilde{\mathbb{C}}$ соответственно и $\mathbb{C}_{\text{Ф}}$ – квазидиагональная матрица. Будем также всюду далее обозначать $\mathbb{O}_\kappa$ – нулевые матрицы соответствующих размерностей.

Замечание I. Напомним, что под оператором (матрицей) $\mathbb{C}$ (I.I) общего вида, имеется в виду [II÷I6] случай $\{(q_\kappa \neq q_{\kappa'}) \neq (z_\kappa \neq z_{\kappa'}) \neq (p_\kappa \neq p_{\kappa'})$, при $\kappa \neq \kappa'\}_{\kappa=2}^{m}$. Отметим также, что (как и в [II÷I6]) всюду далее рассматривается именно правая факторизация $\mathbb{C}$ (I.I). При этом все полученные ранее результаты [II÷I6] (так и результаты настоящей работы) при левой факторизации (т.е. $diag(q_\kappa)\cdot\tilde{\mathbb{C}}$ (I.I)) получаются аналогично. Если же окажется, что $det(q_\kappa)=0$ для любого $(2 \le \kappa \le m)$, то исходную матрицу $\mathbb{C}$ (I.I) следует сначала разбить на блоки большей размерности таким образом, чтобы после разбиения новые диагональные блоки были бы

---

x) Если $\{q_1;\ z_\kappa, p_\kappa, q_\kappa\}_{\kappa=2}^{m}$ – линейные операторы, то $\mathbb{C}$ (I.I) будет матрицей линейных операторов.

невырожденными, т.е. $\{det(\tilde{q}_j)\neq 0\}_{j=1}^{n\le m}$. Поэтому всюду ниже можем (без ограничения общности) предполагать, что в результатах, основанных на технике $\{G,\Lambda\}$ – матричных последовательностей, выполняется требование $\{det(q_i)\neq 0\}_{i=1}^{m}$ либо $\{det(\tilde{q}_j)\neq 0\}_{j=1}^{n\le m}$, если некоторые $det(q_k)=0$.

<u>Замечание 2.</u> Следует также напомнить, что в настоящей серии работ понятия квазитрехдиагональная и блочная трехдиагональная матрица являются эквивалентными. Эквивалентными являются и понятия верхних (нижних) главных угловых квазиминоров и верхних (нижних) главных блочных угловых миноров – $\Delta_1^j(\Delta_j^m)$, т.е. миноров (определителей) матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), начинающихся соответственно с q_1 (и с q_m). В указанных выше [II÷I6] работах принята также (для удобства) единая нумерация лемм, теорем и представлений, отдельная как для матриц $\mathbb{C}$ (I.I), так и для им обратных $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$. В работах [I5,I6] и всюду далее мы пользуемся обозначениями $\mathbb{C}(\Lambda)$, $\mathbb{C}(G)$ и $\mathbb{C}(\Lambda,G)$; $\mathbb{B}(\Lambda)$, $\mathbb{B}(G)$ и $\mathbb{B}(\Lambda,G)$ для представлений матриц $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ как функций последовательностей матриц $\{G\}$ (I.3) и $\{\Lambda\}$ (I.4). Ниже мы приводим лишь те из основных результатов, полученных нами в [I3÷I6], которые будут явно использованы в настоящей работе.

Итак, если все главные верхние (нижние) угловые квазиминоры матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) отличны от нуля, то (как показано в [I3]) для $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ имеют место представления(3(3′)÷I0(I0′)). <u>Далее</u> в [I5], <u>если $det(G_k)=0$</u> для любого $(2\le k\le m-2)$ <u>либо $det(\Lambda_k)=0$</u> для любого $(3\le k\le m-1)$, были обобщены определения последовательностей $\{G\}$ и $\{\Lambda\}$ ((2.8) [I3]), т.е.

$$\begin{cases}\text{Если } det(G_k)\neq 0, \text{ то } G_{k-1}=E_k-\tilde{z}_{k+1}\cdot G_k^{-1}\cdot\tilde{P}_{k+1},\ G_{m-1}=E_m,\ k=m-1,m-2,\dots,1.\\ \text{Если } det(G_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2), \text{ то } G_{k-1}\ ? \text{ но } G_{k-2}=E_{k-1}.\end{cases}\quad (I.3)$$

$$\begin{cases}\text{Если } det(\Lambda_k)\neq 0, \text{ то } \Lambda_{k+1}=E_k-\tilde{P}_k\cdot\Lambda_k^{-1}\cdot\tilde{z}_k,\ \Lambda_2=E_2,\ k=2,3,\dots,m.\\ \text{Если } det(\Lambda_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1), \text{ то } \Lambda_{k+1}\ ? \text{ но } \Lambda_{k+2}=E_{k+1}.\end{cases}\quad (I.4)$$

В случае, когда некоторые из верхних (нижних) главных угловых квазиминоров у $\mathbb{C}$ (I.I) обращаются в нуль, в [I5,I6] были получены (с использованием определений (I.3) и (I.4) последовательностей $\{G\}$ и $\{\Lambda\}$) факторизованные представления I9(I9′)÷2I(2I′), 24(24′), а также

<u>Представление 27(27′)</u> (при $det(G_i)=0$ для любого i из $(2\le i\le m-2)$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) & & & & & \\ & E_{i-2}(-\hat{\beta}_{i-1}) & & & & \\ & & E_{i-1}\,\Theta_i & & & \\ & & & E_i\,\Theta_{i+1} & & \\ & & & & E_{i+1}(-\hat{\beta}_{i+2}) & \\ & & & & & E_{m-1}(-\hat{\beta}_m)\\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 & & & & & \\ & G_{i-3} & & & & \\ & & E_{i-1} & & & \\ & & & E_i & & \\ & & & & E_{i+1} & \\ & & & & & G_{i+1}\\ & & & & & & G_{m-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & E_{i-2} & & & \\ & & & E_{i-1} & & \\ \hat{A}_1 & \hat{A}_2 & \dots & \hat{A}_{i-1} & E_i & \\ & & & & E_{i+1} & \\ & & & & & E_{i+2}\\ & & & & & & E_m\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \mathbb{O}\\ & E_2 & & & & \\ & & E_{i-2} & & & \\ & & & E_{i-1} & & \\ & & & & (E_i-\hat{\Theta}_i)(\tilde{z}_{i+1}) & \\ & & & & (\tilde{P}_{i+1})[G_i] & \\ & & & & & E_{i+2}\\ \mathbb{O} & & & & & & E_m\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \hat{B}_1\\ & E_2 & & & & & \hat{B}_2\\ & & E_{i-2} & & & & \hat{B}_{i-2}\\ & & & E_{i-1} & & & \hat{B}_{i-1}\\ & & & & E_i & & \\ & & & & & E_{i+1} & \\ & & & & & & E_{i+2}\\ & & & & & & & E_m\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\hat{c}_2)E_2 & & & & & \\ & (-\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & & \\ & & \Theta_i\,E_i & & & \\ & & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & \\ & & & & (-\hat{c}_{i+2})E_{i+2} & \\ & & & & & (-\hat{c}_m)E_m\end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ q_{i-1}\\ q_i\\ q_{i+1}\\ q_m\end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \quad (I.5)$$

где

$$\begin{cases}\left[\hat{A}_k=\tilde{P}_i\cdot\prod_{j=k+1}^{i-1}\hat{c}_j;\quad \hat{B}_k=G_{k-1}^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{i-1}\hat{\beta}_j\cdot\tilde{z}_i,\quad \text{для всех } k=1,2,\dots,i-2,i-1\right];\\ \hat{\Theta}_i=\tilde{P}_i\cdot\left(\sum_{k=1}^{i-1}\prod_{j=k+1}^{i-1}\hat{c}_j\cdot G_{k-1}^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{i-1}\hat{\beta}_j\right)\cdot\tilde{z}_i=\sum_{k=1}^{i-1}(\hat{A}_k\cdot\hat{B}_k),\quad (I.6)\\ \text{а также } \{\hat{c},\hat{\beta}\} \text{ – имеют вид (2.9) [I3] и полностью определены с}\\ \text{учетом } \{G\} \text{ (I.3). \underline{При этом}}^{x)}\ (E_i-\hat{\Theta}_i)=\Lambda_{i+1}, \text{ если } \{det(\Lambda_k)\neq 0\}_{k=3}^{i}.\end{cases}$$

<u>Представление 28(28′)</u> (при $det(\Lambda_i)=0$ для любого i из $(3\le i\le m-1)$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\beta_2)E_2 & & & & & \\ & (-\beta_{i-1})E_{i-1} & & & & \\ & & \Theta_i\,E_i & & & \\ & & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & \\ & & & & (-\beta_{i+2})E_{i+2} & \\ & & & & & (-\beta_m)E_m\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & E_{i-1} & & & \\ & & & E_i & B_{i+1}\,B_{i+2}\dots B_m & \\ & & & & E_{i+1} & \\ & & & & & E_{i+2}\\ & & & & & & E_{m-1}\\ & & & & & & & E_m\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \mathbb{O}\\ & E_2 & & & & \\ & & E_{i-2} & & & \\ & & & [\Lambda_i]\ (\tilde{z}_i) & & \\ & & & (\tilde{P}_i)\ (E_i-\Theta_i) & & \\ & & & & E_{i+1} & \\ \mathbb{O} & & & & & E_m\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & E_{i-1} & & & \\ & & & E_i & & \\ & & & A_{i+1} & E_{i+1} & \\ & & & A_{i+2} & & E_{i+2}\\ & & & A_m & & & E_m\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & & & & & \\ & \Lambda_3 & & & & & & & \\ & & \Lambda_{i-1} & & & & & & \\ & & & E_{i-1} & & & & & \\ & & & & E_i & & & & \\ & & & & & E_{i+1} & & & \\ & & & & & & \Lambda_{i+3} & & \\ & & & & & & & \Lambda_m & \\ & & & & & & & & \Lambda_{m+1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & & & \\ & E_2(-c_3) & & & & & \\ & & E_{i-2}(-c_{i-1}) & & & & \\ & & & E_{i-1}\,\Theta_i & & & \\ & & & & E_i\,\Theta_{i+1} & & \\ & & & & & E_{i+1}(-c_{i+2}) & \\ & & & & & & E_{m-1}(-c_m)\\ & & & & & & E_m\end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ q_{i-1}\\ q_i\\ q_{i+1}\\ q_{m-1}\\ q_m\end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \quad (I.7)$$

где

$$\begin{cases}\left[A_k=\prod_{j=i+2}^{k}\beta_j\cdot\tilde{P}_{i+1};\quad B_k=\tilde{z}_{i+1}\cdot\prod_{j=i+2}^{k}c_j\cdot\Lambda_{k+1}^{-1},\quad \text{для всех } k=i+1,i+2,\dots,m\right];\quad (I.8)\\ \Theta_i=\tilde{z}_{i+1}\cdot\left(\sum_{k=i+1}^{m}\prod_{j=i+2}^{k}c_j\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\prod_{j=i+2}^{k}\beta_j\right)\cdot\tilde{P}_{i+1}=\sum_{k=i+1}^{m}(B_k\cdot A_k),\\ \text{а также } \{c,\beta\} \text{ – имеют вид (2.9) [I3] и полностью определены с}\\ \text{учетом } \{\Lambda\} \text{ (I.4). \underline{При этом}}\ (E_i-\Theta_i)=G_{i-1}, \text{ если } \{det(G_k)\neq 0\}_{k=i}^{m-2}.\end{cases}$$

---

x) Справедливость этого равенства (как и ниже приводимого равенства) $(E_i-\Theta_i)=G_{i-1}$, если $\{det(G_k)\neq 0\}_{k=i}^{m-1}$ нами доказана будет в Лемме 9 настоящей работы.

Представление 61(61′)(при $det(G_\varkappa)=0$ и $det(G_l)=0$ для любого l из $(\varkappa \le l < \kappa-3)$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat{\beta}_2) \\
E_{l-2}(-\hat{\beta}_{l-1}) \\
E_{l-1}\,\mathbb{O}_l \\
E_l\,\mathbb{O}_{l+1} \\
E_{l+1}(-\hat{\beta}_{l+2}) \\
E_{\kappa-2}(-\hat{\beta}_{\kappa-1}) \\
E_{\kappa-1}\,\mathbb{O}_\kappa \\
E_\kappa\,\mathbb{O}_{\kappa+1} \\
E_{\kappa+1}(-\hat{\beta}_{\kappa+2}) \\
E_{m-1}(-\hat{\beta}_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_0 & (\hat{\beta})^{l-1}_2\tilde{z}_l & & & \\
G_1 & (\hat{\beta})^{l-1}_3\tilde{z}_l & & & \\
G_{l-3} & (\hat{\beta})^{l-1}_{l-1}\tilde{z}_l & & \mathbb{O} & \\
 & E_{l-1}(\tilde{z}_l) & & & \\
\tilde{P}_l(c)^{l-1}_2 \ldots \tilde{P}_l(c)^{l-1}_{l-1}(\tilde{P}_l) & E_l\ (\tilde{z}_{l+1}) & & & \\
 & (\tilde{P}_{l+1})[G_l] & (\hat{\beta})^{\kappa-1}_{l+2}\tilde{z}_\kappa & & \\
 & G_{l+1} & & & \\
 & G_{\kappa-3} & \mathbb{O}\,(\hat{\beta})^{\kappa-1}_{\kappa-1}\tilde{z}_\kappa & & \\
 & & \mathbb{O}\ \ E_{\kappa-1}(\tilde{z}_\kappa) & & \\
\mathbb{O} & \tilde{P}_\kappa(\hat{c})^{\kappa-1}_{l+2}\ldots\tilde{P}_\kappa(\hat{c})^{\kappa-1}_{\kappa-1}(\tilde{P}_\kappa) & [G_\kappa] & & \\
 & & & G_{\kappa+1} & \\
 & \downarrow l+1 & \downarrow \kappa+1 & & G_{m-1}
\end{bmatrix}
\times
$$

$$
\times
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\hat{c}_2)E_2 \\
(-\hat{c}_{l-1})E_{l-1} \\
\mathbb{O}_l\,E_l \\
\mathbb{O}_{l+1}E_{l+1} \\
(-\hat{c}_{l+2})E_{l+2} \\
(-\hat{c}_{\kappa-1})E_{\kappa-1} \\
\mathbb{O}_\kappa\,E_\kappa \\
\mathbb{O}_{\kappa+1}E_{\kappa+1} \\
(-\hat{c}_{\kappa+2})E_{\kappa+2} \\
(-\hat{c}_m)E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 \\
q_2 \\
q_{l-1} \\
q_l \\
q_{l+1} \\
q_{\kappa-1} \\
q_\kappa \\
q_{\kappa+1} \\
q_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(G) \qquad (I.9)
$$

где

$$
\begin{cases}
(\hat{c})^{l-1}_j = \prod_{z=j}^{l-1}\hat{c}_z,\ (\hat{\beta})^{l-1}_j = \prod_{z=j}^{l-1}\hat{\beta}_z,\ j=2,\ldots,l-1;\ (\hat{c})^{\kappa-1}_z = \prod_{\mu=z}^{\kappa-1}\hat{c}_\mu,\ (\hat{\beta})^{\kappa-1}_z = \prod_{\mu=z}^{\kappa-1}\hat{\beta}_\mu,\ z=l+2,\ldots,\kappa-1, & (I.10)\\
\{\hat{\beta},\hat{c}\} \text{ - имеют вид (2.9)[I3] и полностью определены в соответствии} \\
\quad \text{с } \{G\}\ (I.3).
\end{cases}
$$

Представление 62(62′)(при $det(\Lambda_\kappa)=0$ и $det(\Lambda_l)=0$ для любого l из $(\kappa+3<l\le m-1)$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)E_2 \\
(-\beta_{\kappa-1})E_{\kappa-1} \\
\mathbb{O}_\kappa\,E_\kappa \\
\mathbb{O}_{\kappa+1}E_{\kappa+1} \\
(-\beta_{\kappa+2})E_{\kappa+2} \\
(-\beta_{l-1})E_{l-1} \\
\mathbb{O}_l\,E_l \\
\mathbb{O}_{l+1}E_{l+1} \\
(-\beta_{l+2})E_{l+2} \\
(-\beta_m)E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 & & & \\
\Lambda_3 & & & \\
\Lambda_{\kappa-1} & & & \mathbb{O} \\
\kappa-1 \leftarrow [\Lambda_\kappa](\tilde{z}_\kappa) & & & \\
(\tilde{P}_\kappa)\,E_\kappa\,(\tilde{z}_{\kappa+1})\,\tilde{z}_{\kappa+1}(c)^{\kappa+2}_{\kappa+2}\ldots\tilde{z}_{\kappa+1}(c)^{l-1}_{\kappa+2} & & & \\
(\tilde{P}_{\kappa+1})\ E_{\kappa+1}\ \mathbb{O} & & & \\
(\beta)^{\kappa+2}_{\kappa+2}\tilde{P}_{\kappa+1}\ \mathbb{O}\ \ \Lambda_{\kappa+3} & & & \\
 & \Lambda_{l-1} & & \\
l-1 \leftarrow (\beta)^{l-1}_{\kappa+2}\tilde{P}_{\kappa+1} & [\Lambda_l](\tilde{z}_l) & & \\
 & (\tilde{P}_l)\,E_l\,(\tilde{z}_{l+1})\,\tilde{z}_{l+1}(c)^{l+2}_{l+2}\ldots\tilde{z}_{l+1}(c)^{m}_{l+2} & & \\
\mathbb{O} & (\tilde{P}_{l+1})\ E_{l+1} & & \\
 & (\beta)^{l+2}_{l+2}\tilde{P}_{l+1} & \Lambda_{l+3} & \\
 & (\beta)^{m}_{l+2}\tilde{P}_{l+1} & & \Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}
\times \qquad (I.II)
$$

$$
\times
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
E_{\kappa-2}(-c_{\kappa-1}) \\
E_{\kappa-1}\,\mathbb{O}_\kappa \\
E_\kappa\,\mathbb{O}_{\kappa+1} \\
E_{\kappa+1}(-c_{\kappa+2}) \\
E_{l-2}(-c_{l-1}) \\
E_{l-1}\,\mathbb{O}_l \\
E_l\,\mathbb{O}_{l+1} \\
E_{l+1}(-c_{l+2}) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 \\
q_2 \\
q_{\kappa-1} \\
q_\kappa \\
q_{\kappa+1} \\
q_{l-1} \\
q_l \\
q_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(\Lambda),
$$

где

$$
\begin{cases}
(c)^{i}_{l+2} = \prod_{z=l+2}^{i} c_z,\ (\beta)^{i}_{l+2} = \prod_{z=l+2}^{i}\beta_z,\ i=l+2,\ldots,m;\ (c)^{z}_{\kappa+2} = \prod_{\mu=\kappa+2}^{z} c_\mu,\ (\beta)^{z}_{\kappa+2} = \prod_{\mu=\kappa+2}^{z}\beta_\mu,\ z=\kappa+2,\ldots,l-1, & (I.I2)\\
\{c,\beta\} \text{ - имеют вид (2.9)[I3] и полностью определены в соответствии} \\
\quad \text{с } \{\Lambda\}\ (I.4).
\end{cases}
$$

В следующем параграфе будут рассмотрены представления для $\mathbb{C}(G)$ либо для $\mathbb{C}(\Lambda)$ (подобные представлениям 27(27′) и 28(28′)) в случае, когда более чем один из главных верхних (нижних) угловых квазиминоров $\mathbb{C}$ (I.I) обращается в нуль.

2. Естественные элементарные факторизации квазитрехдиагональных матриц, некоторые из главных блочных угловых миноров которых обращаются в нуль

Факторизованные представления 27(27′) и 28(28′) для матриц (операторов) $\mathbb{C}$ (I.I), у которых $det(G_\cdot)=0$ либо $det(\Lambda_\cdot)=0$ (т.е. обращается в нуль лишь один из нижних (верхних) угловых квазиминоров исходной квазитрехдиагональной матрицы) были впервые получены в [I5] из соответствующих [I5] хессенберговоподобных представлений I5(I5′), I6(I6′) и I7(I7′), I8(I8′).

Последние, в свою очередь, явились следствием нехессенберговоподобных (отмеченных выше) факторизаций вида I9(I9′) и 20(20′). Нетрудно видеть теперь, что представления типа 27(27′) и 28(28′) призваны сыграть фундаментальную роль (подобно представлениям 5(5′) и 7(7′) [I3] в случае всех отличных от нуля главных угловых квазиминоров) в вопросах:

I) построения различных (в том числе немонотонных) процедур численного решения систем уравнений $\mathbb{C}X=Y$, с матрицами $\mathbb{C}$ (I.I) в случае некоторых нулевых главных угловых квазиминоров;

2) простого матричного обоснования известных уже процедур немонотонных прогонок в случае трех(пяти)диагональных матриц $\mathbb{C}$ (I.I) (см., обобщения [3,5,7]);

3) Обобщения результатов [I0] на случай вычисления квазиминоров матрицы $\mathbb{C}$ (I.I);

4) отказа от стратегии перестановок в случае нулевых (квази)миноров (см., например, § 28 [I] и [4]) при построении треугольных факторизаций матриц вида $\mathbb{C}$ (I.I).

Если при обращении в нуль лишь одного из верхних(нижних) главных угловых квазиминоров представления 27(27′), 28(28′) уже дают положительные решения каждой из сформулированных выше проблем I)÷4), то при обращении в нуль более чем одного из указанных однотипных квазиминоров ситуации следует рассмотреть дополнительно. При этом, чтобы описать любую из возможных ситуаций, достаточно (в силу определения $\{G\}$ (I.3) и $\{\Lambda\}$ (I.4) и Леммы 7 с учетом замечания 5[I5]) дополнительно изучить подробно факторизации $\mathbb{C}$ (I.I) типа Представлений 27(27′) и 28(28′)

лишь в случаях вырождения:

I. Двух близких матриц $[G_K$ и $G_{K-3}]$ <u>либо</u> $[\Lambda_K$ и $\Lambda_{K+3}]$ при любом K.

II. Двух отдаленных матриц $[G_K$ и G_ℓ при $2 \le \ell < K-3]$ <u>либо</u> $[\Lambda_K$ и Λ_ℓ при $K+3 < \ell \le m-1]$.

III. Любого конечного числа близких матриц $\{[G_K, G_{K-3}, G_{K-6}, \dots, G_{\ell_{j+1}}, G_{\ell_j}]$, где $\ell_{j+1}-3=\ell_j\}$ <u>либо</u> $\{[\Lambda_K, \Lambda_{K+3}, \Lambda_{K+6}, \dots, \Lambda_{\ell_{i-1}}, \Lambda_{\ell_i}]$, где $\ell_{i-1}+3=\ell_i\}$.

IV. Любого конечного числа отдаленных матриц
$\{[G_K, G_{\ell_n}, G_{\ell_{n-1}}, \dots, G_{\ell_{j+1}}, G_{\ell_j}]$, где $(\ell_{u+1}-3)>\ell_u; (K-3)>\ell_n\}_{u=j}^{n-1}$ <u>либо</u>
$\{[\Lambda_K, \Lambda_{\ell_1}, \Lambda_{\ell_2}, \dots, \Lambda_{\ell_{i-1}}, \Lambda_{\ell_i}]$, где $(\ell_{z-1}+3)<\ell_z;\ \ell_1>(K+3)\}_{z=2}^{i}$.

В следующей теореме рассматриваются представления $\mathbb{C}$ (I.I) при условиях I и II, т.е. в случае вырождения <u>лишь двух</u> близких (отдаленных) однотипных матриц.

<u>Теорема I9</u>. Пусть $\mathbb{C}$ -<u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.I)÷(I.2) с прямоугольными элементами-блоками $\{\tilde{Z}_K, \tilde{P}_K\}_{K=2}^{m}$, минимальные размерности которых совпадают с размерностями соответствующих неособенных квадратных матриц $\{q_K\}_{K=1}^{m}$. Пусть также $\{G_K\}$ и $\{\Lambda_K\}$ последовательности матриц (I.3), (I.4), удовлетворяющих одному из условий:

I. $\begin{cases} [\det(G_K)=0 \text{ и } \det(G_{K-3})=0 \text{ для любого } K \text{ из } (5 \le K \le m-2)] & \text{либо} \\ [\det(\Lambda_K)=0 \text{ и } \det(\Lambda_{K+3})=0 \text{ для любого } K \text{ из } (8 \le K \le m-4)]. \end{cases}$

II. $\begin{cases} [\det(G_K)=0 \text{ и } \det(G_\ell)=0 \text{ для любого } K \text{ — фиксированного и любого } \ell \text{ из } (2 \le \ell < (K-3))] & \text{либо} \\ [\det(\Lambda_K)=0 \text{ и } \det(\Lambda_\ell)=0 \text{ для любого } K \text{ — фиксированного и любого } \ell \text{ из } ((K+3) < \ell \le m-1)] \end{cases}$. Тогда для $\mathbb{C}$ (I.I)

справедливы следующие факторизованные представления

<u>Представление 63(63')</u> (при $\det(G_K)=0$ и $\det(G_{K-3})=0$ для любого K из $(5 \le K \le m-2)$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) \\ E_2(-\hat{\beta}_3) \\ \ddots \\ E_{K-5}(-\hat{\beta}_{K-4}) \\ E_{K-4}\,\mathbb{O}_{K-3} \\ E_{K-3}\,\mathbb{O}_{K-2} \\ E_{K-2}(-\hat{\beta}_{K-1}) \\ E_{K-1}\,\mathbb{O}_K \\ E_K\,\mathbb{O}_{K+1} \\ E_{K+1}(-\hat{\beta}_{K+2}) \\ \ddots \\ E_{m-2}(-\hat{\beta}_{m-1}) \\ E_{m-1}(-\hat{\beta}_m) \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \ddots \\ E_{K-5} \\ E_{K-4} \\ \hat{\hat{A}}_1\ \hat{\hat{A}}_2 \dots \hat{\hat{A}}_{K-4}\ E_{K-3} \\ E_{K-2} \\ \mathbb{O}\ E_{K-1} \\ \hat{A}_{K-2}\ \hat{A}_{K-1}\ E_K \\ E_{K+1} \\ E_{K+2} \\ \ddots \\ E_{m-1} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 & & & & & \mathbb{O} \\ & G_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & G_{K-6} & & \\ & & & & E_{K-4} & \\ & & & & & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (E_{K-3}-\hat{\Theta}_{K-3}) & (\tilde{Z}_{K-2}) \\ (\tilde{P}_{K-2}) & [G_{K-3}] \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \end{matrix} & \begin{bmatrix} (-\tilde{Z}_{K-2}\cdot\hat{B}_{K-2}) & \mathbb{O} \\ [(E_{K-2}-G_{K-3})\hat{B}_{K-2}] & \mathbb{O} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O}\quad\mathbb{O} & E_{K-1} & \mathbb{O}\quad\mathbb{O} \\ \begin{bmatrix} (-\hat{A}_{K-2}\cdot\tilde{P}_{K-2}) & [\hat{A}_{K-2}(E_{K-2}-G_{K-3})] \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \end{matrix} & \begin{bmatrix} (E_K-\hat{U}_K) & (\tilde{Z}_{K+1}) \\ (\tilde{P}_{K+1}) & [G_K] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ & & & & & G_{K+1} \\ & \mathbb{O} & & & & G_{K+2} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & G_{m-2} \\ & & & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 & \hat{B}_1 \\ E_2 & \hat{B}_2 \\ \ddots & \ddots \\ E_{K-5} & \hat{B}_{K-5} \\ E_{K-4} & \hat{B}_{K-4} \\ E_{K-3} & \\ E_{K-2}\,\mathbb{O} & \hat{B}_{K-2} \\ E_{K-1} & \hat{B}_{K-1} \\ E_K & \\ E_{K+1} & \\ \ddots & \\ E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{C}_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\hat{C}_{K-4})E_{K-4} \\ \mathbb{O}_{K-3}E_{K-3} \\ \mathbb{O}_{K-2}E_{K-2} \\ (-\hat{C}_{K-1})E_{K-1} \\ \mathbb{O}_K\ E_K \\ \mathbb{O}_{K+1}E_{K+1} \\ (-\hat{C}_{K+2})E_{K+2} \\ \ddots \\ (-\hat{C}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ddots \\ q_{K-1} \\ q_K \\ q_{K+1} \\ \ddots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \qquad (2.I)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\hat{A}}_i = \tilde{P}_{K-3}\cdot\prod_{z=i+1}^{K-4}\hat{C}_z\cdot G_{i-1}^{-1}; \quad \hat{B}_i = G_{i-1}^{-1}\cdot\prod_{z=i+1}^{K-4}\hat{\beta}_z\cdot\tilde{Z}_{K-3},\ i=1,2,\dots,K-4; \quad \hat{\Theta}_{K-3} = \sum_{i=1}^{K-4}(\hat{\hat{A}}_i\cdot G_{i-1}\cdot\hat{B}_i), \quad (2.2) \\ \hat{A}_{K-2} = -\tilde{P}_K\cdot\tilde{P}_{K-1},\ \hat{A}_{K-1} = \tilde{P}_K; \quad \hat{B}_{K-2} = -\tilde{Z}_{K-1}\cdot\tilde{Z}_K,\ \hat{B}_{K-1} = \tilde{Z}_K; \quad \hat{U}_K = \tilde{P}_K[E_{K-1}+\tilde{P}_{K-1}\cdot(E_{K-2}+\tilde{Z}_{K-1}\cdot\tilde{P}_{K-1})\cdot\tilde{Z}_{K-1}]\cdot\tilde{Z}_K, \\ \text{а } \{\hat{\beta}, \hat{C}\} \text{ — имеют вид (2.9)[I3] и определены в соответствии с} \\ \{G\}\text{(I.3). \underline{При этом} } (E_{K-3}-\hat{\Theta}_{K-3}) = \Lambda_{K-2}, \text{ если } \{\det(\Lambda_j) \ne 0\}_{j=3}^{K-1}. \end{cases}$$

<u>Представление 64(64')</u> (при $\det(G_K)=0$ и $\det(G_\ell)=0$ для любого ℓ из $(2 \le \ell < K-3)$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) \\ E_2(-\hat{\beta}_3) \\ \ddots \\ E_{\ell-2}(-\hat{\beta}_{\ell-1}) \\ E_{\ell-1}\,\mathbb{O}_\ell \\ E_\ell\,\mathbb{O}_{\ell+1} \\ E_{\ell+1}(-\hat{\beta}_{\ell+2}) \\ \ddots \\ E_{K-2}(-\hat{\beta}_{K-1}) \\ E_{K-1}\,\mathbb{O}_K \\ E_K(-\hat{\beta}_{K+2}) \\ \ddots \\ E_{m-1}(-\hat{\beta}_m) \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \ddots \\ E_{\ell-2} \\ E_{\ell-1} \\ \hat{\hat{A}}_1\ \hat{\hat{A}}_2 \dots \hat{\hat{A}}_{\ell-1}\ E_\ell \\ E_{\ell+1} \xrightarrow{\ell+1} \\ \ddots \\ E_{K-2} \\ \mathbb{O}\ E_{K-1} \\ \hat{\hat{A}}_{\ell+1} \dots \hat{A}_{K-1}\ E_K \\ E_{K+1} \\ \ddots \\ E_m \\ \downarrow \ell+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 & & & & \mathbb{O} \\ & G_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & G_{\ell-3} & \\ & & & E_{\ell-1} & \\ & & & & \begin{matrix} \begin{bmatrix} (E_\ell-\hat{\Theta}_\ell) & (\tilde{Z}_{\ell+1}) \\ (\tilde{P}_{\ell+1}) & [G_\ell] \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} (-\tilde{Z}_{\ell+1}\cdot\hat{B}_{\ell+1}) & \mathbb{O} \\ (\hat{\Psi}_{\ell+1}) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \longrightarrow \\ & G_{\ell+1} & \\ \mathbb{O} & \ddots & \mathbb{O} \\ & G_{K-3} & \\ & E_{K-1} & \\ \begin{bmatrix} (-\hat{\hat{A}}_{\ell+1}\cdot\tilde{P}_{\ell+1}) & (\hat{\varphi}_{\ell+1}) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} (E_K-\hat{U}_K) & (\tilde{Z}_{K+1}) \\ (\tilde{P}_{K+1}) & [G_K] \end{bmatrix} \longrightarrow \\ \downarrow \ell+1 & & G_{K+1} \\ & & \ddots \\ & & G_{m-1} \\ & & \downarrow K+1 \end{matrix} \\ & \mathbb{O} & & & \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 & \hat{B}_1 \\ E_2 & \hat{B}_2 \\ \ddots & \ddots \\ E_{\ell-2} & \hat{B}_{\ell-2} \\ E_{\ell-1} & \hat{B}_{\ell-1} \\ E_\ell & \\ E_{\ell+1} & \hat{B}_{\ell+1} \xrightarrow{\ell+1} \\ E_{K-2}\,\mathbb{O} & \hat{B}_{K-2} \\ E_{K-1} & \hat{B}_{K-1} \\ E_K & \\ E_{K+1} & \\ \ddots & \\ E_{m-1} & \\ E_m & \\ \downarrow \ell+1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{C}_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\hat{C}_{\ell-1})E_{\ell-1} \\ \mathbb{O}_\ell\ E_\ell \\ \mathbb{O}_{\ell+1}E_{\ell+1} \\ (-\hat{C}_{\ell+2})E_{\ell+2} \\ \ddots \\ (-\hat{C}_{K-1})E_{K-1} \\ \mathbb{O}_K\ E_K \\ \mathbb{O}_{K+1}E_{K+1} \\ (-\hat{C}_{K+2})E_{K+2} \\ \ddots \\ (-\hat{C}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ddots \\ q_{\ell-1} \\ q_\ell \\ q_{\ell+1} \\ \ddots \\ q_{K-1} \\ q_K \\ q_{K+1} \\ \ddots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \qquad (2.3)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_{\ell+1} = (E_{\ell+1}-G_\ell)\cdot\hat{B}_{\ell+1},\ \hat{\varphi}_{\ell+1} = \hat{\hat{A}}_{\ell+1}(E_{\ell+1}-G_\ell), [\{\hat{\hat{A}}_i, \hat{B}_i\}_{i=1}^{\ell-1}; \{\hat{\hat{A}}_z, \hat{B}_z\}_{z=\ell+2}^{K-1}; \hat{\Theta}_\ell] \text{ — определены в} \\ (2.2),\ \hat{\hat{A}}_{\ell+1} = \tilde{P}_K\cdot\prod_{z=\ell+2}^{K-1}\hat{C}_z,\ \hat{B}_{\ell+1} = \prod_{z=\ell+2}^{K-1}\hat{\beta}_z\tilde{Z}_K,\ \hat{\hat{U}}_K = \hat{\hat{A}}_{\ell+1}(2E_{\ell+1}-G_\ell)\cdot\hat{B}_{\ell+1} + \sum_{z=\ell+2}^{K-1}(\hat{\hat{A}}_z\cdot G_{z-1}\cdot\hat{B}_z), \quad (2.4) \\ \text{а } \{\hat{\beta}, \hat{C}\} \text{ — имеют вид (2.9)[I3] и определены в соответствии с } \{G\} \end{cases}$$

(I.3). <u>При этом</u> $(E_\ell-\hat{\theta}_\ell)=\Lambda_{\ell+1}$, если $\{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=3}^{\ell}$.

<u>Представление 65(65')</u>(при $det(\Lambda_k)=0$ и $det(\Lambda_{k+3})=0$ для любого k из $(3\le k\le m-4)$)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\rho_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\rho_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k\;E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}\;E_{k+1} \\ (-\rho_{k+2})E_{k+2} \\ \mathbb{O}_{k+3}\;E_{k+3} \\ \mathbb{O}_{k+4}\;E_{k+4} \\ (-\rho_{k+5})E_{k+5} \\ \ddots \\ (-\rho_{m-1})E_{m-1} \\ (-\rho_m)E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \ddots \\ E_{k-1} \\ E_k\;B_{k+1}\;B_{k+2} \\ E_{k+1}\;\mathbb{O} \\ E_{k+2} \\ E_{k+3}\;B_{k+4}\;B_{k+5}\cdots B_m \\ E_{k+4} \\ E_{k+5} \\ \ddots \\ E_{m-1} \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & & \mathbb{O} \\ & \Lambda_3 \\ & & \ddots \\ & & & \Lambda_{k-1} \\ & & & & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}[\Lambda_k] & (\tilde{\xi}_k)\\ (\tilde{P}_k) & (E_k-U_k)\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ [B_{k+2}(E_{k+2}-\Lambda_{k+3})] & (-B_{k+2}\tilde{\xi}_{k+3})\end{bmatrix} \\ \mathbb{O}\quad\mathbb{O} & E_{k+1} & \mathbb{O}\quad\mathbb{O} \\ \begin{bmatrix}\mathbb{O} & [(E_{k+2}-\Lambda_{k+3})A_{k+2}]\\ \mathbb{O} & (-\tilde{P}_{k+3}\cdot A_{k+2})\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}[\Lambda_{k+3}] & (\tilde{\xi}_{k+3})\\ (\tilde{P}_{k+3}) & (E_{k+3}-\theta_{k+3})\end{bmatrix}\end{bmatrix} \\ & & & & & E_{k+4} \\ & & & & & \Lambda_{k+6} \\ & & & & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \ddots \\ E_{k-1} \\ E_k \\ A_{k+1}E_{k+1} \\ A_{k+2}\;\mathbb{O}\;E_{k+2} \\ E_{k+3} \\ \tilde{A}_{k+4}\;E_{k+4} \\ \tilde{A}_{k+5}\quad E_{k+5} \\ \ddots \\ \tilde{A}_{m-1}\quad E_{m-1} \\ \tilde{A}_m\quad E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1(-c_2) \\ E_2(-c_3) \\ \ddots \\ E_{k-2}(-c_{k-1}) \\ E_{k-1}\;\mathbb{O}_k \\ E_k\;\mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-c_{k+2}) \\ E_{k+2}\;\mathbb{O}_{k+3} \\ E_{k+3}\;\mathbb{O}_{k+4} \\ E_{k+4}(-c_{k+5}) \\ \ddots \\ E_{m-1}(-c_m) \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-1} \\ q_k \\ q_{k+1} \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (2.5)$$

, где

$$\begin{cases} B_i=\tilde{\xi}_{k+4}\cdot\prod_{j=k+5}^{i} c_j\cdot\Lambda_{i+1}^{-1};\ \tilde{A}_i=\Lambda_{i+1}^{-1}\cdot\prod_{j=k+5}^{i}\rho_j\cdot\tilde{P}_{k+4},\ i=k+4,k+5,\ldots,m;\ \theta_{k+3}=\sum_{i=k+4}^{m}(B_i\cdot\Lambda_{i+1}\cdot\tilde{A}_i), \\ B_{k+1}=\tilde{\xi}_{k+1},\ B_{k+2}=-\tilde{\xi}_{k+1}\cdot\tilde{\xi}_{k+2};\ A_{k+1}=\tilde{P}_{k+1},\ A_{k+2}=-\tilde{P}_{k+2}\cdot\tilde{P}_{k+1};\ U_k=\tilde{\xi}_{k+1}\cdot[E_{k+1}+\tilde{\xi}_{k+2}\cdot(E_{k+2}+\tilde{P}_{k+2}\cdot\tilde{\xi}_{k+2})\cdot\tilde{P}_{k+2}]\cdot\tilde{P}_{k+1}, \end{cases} \qquad (2.6)$$

а $\{c,\rho\}$ – имеют вид (2.9)[I3] и полностью определены в соответствии с $\{\Lambda\}$ (I.4). <u>При этом</u> $(E_{k+3}-\theta_{k+3})=G_{k+2}$, если $\{det(G_j)\neq 0\}_{j=k}^{m-1}$.

<u>Представление 66(66')</u>(при $det(\Lambda_k)=0$ и $det(\Lambda_\ell)=0$ для любого ℓ из $(k+3<\ell\le m-1)$)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\rho_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\rho_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k\;E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}\;E_{k+1} \\ (-\rho_{k+2})E_{k+2} \\ \ddots \\ (-\rho_{\ell-1})E_{\ell-1} \\ \mathbb{O}_\ell\;E_\ell \\ \mathbb{O}_{\ell+1}\;E_{\ell+1} \\ (-\rho_{\ell+2})E_{\ell+2} \\ \ddots \\ (-\rho_m)E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \ddots \\ E_{k-1} \\ E_k\;B_{k+1}\cdots B_{\ell-1} \\ E_{k+1}\;\mathbb{O} \\ E_{k+2} \\ \ddots \\ E_{\ell-1} \\ E_\ell\;B_{\ell+1}\;B_{\ell+2}\cdots B_m \\ E_{\ell+1} \\ E_{\ell+2} \\ \ddots \\ E_{m-1} \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & \mathbb{O} \\ & \Lambda_3 \\ & & \ddots \\ & & & \Lambda_{k-1} \\ & & & & \begin{bmatrix}[\Lambda_k] & (\tilde{\xi}_k)\\ (\tilde{P}_k) & (E_k-\tilde{U}_k)\end{bmatrix}\ \mathbb{O}\ \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \Psi_{\ell-1} & (-B_{\ell-1}\tilde{\xi}_\ell)\end{bmatrix} \\ & & & & E_{k+1} \\ & & \mathbb{O} & & \Lambda_{k+3}\quad\mathbb{O} \\ & & & & \ddots \\ & & & & \Lambda_{\ell-1} \\ & & & & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \varphi_{\ell-1}\\ \mathbb{O} & (-\tilde{P}_\ell\tilde{A}_{\ell-1})\end{bmatrix}\ \mathbb{O}\ \begin{bmatrix}[\Lambda_\ell] & (\tilde{\xi}_\ell)\\ (\tilde{P}_\ell) & (E_\ell-\theta_\ell)\end{bmatrix} \\ & & & & E_{\ell+1} \\ & & & & \Lambda_{\ell+3} \\ & & & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \ddots \\ E_{k-1} \\ E_k \\ \tilde{A}_{k+1}E_{k+1} \\ \tilde{A}_{k+2}\;\mathbb{O}\;E_{k+2} \\ \tilde{A}_{k+3}\quad E_{k+3} \\ \ddots \\ \tilde{A}_{\ell-1}\quad E_{\ell-1} \\ E_\ell \\ \tilde{A}_{\ell+1}E_{\ell+1} \\ \tilde{A}_{\ell+2}\quad E_{\ell+2} \\ \ddots \\ \tilde{A}_m\quad E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1(-c_2) \\ E_2(-c_3) \\ \ddots \\ E_{k-1}(-c_{k-1}) \\ E_{k-1}\;\mathbb{O}_k \\ E_k\;\mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-c_{k+2}) \\ \ddots \\ E_{\ell-2}(-c_{\ell-1}) \\ E_{\ell-1}\;\mathbb{O}_\ell \\ E_\ell\;\mathbb{O}_{\ell+1} \\ E_{\ell+1}(-c_{\ell+2}) \\ \ddots \\ E_{m-1}(-c_m) \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k-1} \\ q_k \\ q_{k+1} \\ \vdots \\ q_{\ell-1} \\ q_\ell \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (2.7)$$

, где

$$\begin{cases} \Psi_{\ell-1}=B_{\ell-1}\cdot(E_{\ell-1}-\Lambda_\ell),\ \varphi_{\ell-1}=(E_{\ell-1}-\Lambda_\ell)\cdot\tilde{A}_{\ell-1},\ [\{B_i,\tilde{A}_i\}_{i=\ell+1}^{m};\{B_j,\tilde{A}_j\}_{j=k+1}^{\ell-2};\theta_\ell] \text{ – определены в} \\ (2.6),\ B_{\ell-1}=\tilde{\xi}_{k+1}\cdot\prod_{j=k+2}^{\ell-1}c_j,\ \tilde{A}_{\ell-1}=\prod_{j=k+2}^{\ell-1}\rho_j\cdot\tilde{P}_{k+1},\ \tilde{U}_k=B_{\ell-1}\cdot(2E_{\ell-1}-\Lambda_\ell)\tilde{A}_{\ell-1}-\sum_{j=k+1}^{\ell-2}(B_j\cdot\Lambda_{j+1}\cdot\tilde{A}_j), \end{cases} \qquad (2.8)$$

а $\{c,\rho\}$ – имеют вид (2.9) [I3] и полностью определены в соответствии с $\{\Lambda\}$ (I.4). <u>При этом</u> $(E_\ell-\theta_\ell)=G_{\ell-1}$, если $\{det(G_j)\neq 0\}_{j=\ell}^{m-2}$.

<u>Доказательство</u>[x)] проводится аналогично доказательству представлений 27(27') и 28(28') в [I5] (при $det(G_k)=0$ <u>либо</u> $det(\Lambda_k)=0$). Исходя теперь из представлений 2I(2I'), 6I(6I') и 24(24'), 62(62') (для соответствующих случаев), получаем представления 63(63'), 64(64') и 65(65'), 66(66') соответственно. Проверка правильности этих представлений осуществляется с использованием правила перемножения блочных матриц, а также с учетом определения последовательностей $\{G\}$ (I.3) и $\{\Lambda\}$ (I.4). <u>Теорема доказана</u>, если учесть, что соответствующие равенства $(E-\hat{\theta})=\Lambda$ и $(E-\theta)=G$ устанавливаются в Лемме 9 ниже.

В следующей теореме рассматриваются представления $\mathbb{C}$ (I.I) при условиях Ш и IУ, т.е. в случае вырождения конечного числа близких (отдаленных) однотипных матриц.

<u>Теорема 20</u>. Пусть $\mathbb{C}$ –<u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.I)÷(I.2) с прямоугольными элементами блоками $\{\tilde{\xi}_k,\tilde{P}_k\}_{k=2}^{m}$, минимальные размерности которых совпадают с размерностями неособенных квадратных матриц $\{q_k\}_{k=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей). Пусть также $\{G_k\}$ и $\{\Lambda_k\}$ последовательности матриц (I.3) и (I.4), удовлетворяющих одному из условий:

Ш. $\begin{cases}[det(G_k)=0 \text{ и } det(G_{\ell_j})=0 \text{ для любых целых } \ell_n,\ell_{n-1},\ldots,\ell_2,\ell_1 \text{ таких,} \\ \text{что } (k>\ell_n>\ell_j) \text{ и } (\ell_{j+1}-3>\ell_j),\ \text{где } j=n-1,n-2,\ldots,2,1] \ \underline{\text{либо}} \\ [det(\Lambda_k)=0 \text{ и } det(\Lambda_{\ell_i})=0 \text{ для любых целых } \ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{n-1},\ell_n \text{ таких,} \\ \text{что } (k<\ell_1<\ell_i) \text{ и } (\ell_{i-1}+3<\ell_i),\ \text{где } i=2,3,\ldots,n-1,n].\end{cases}$

---

x) Здесь мы не приводим всю технику доказательства теоремы, а ограничиваемся лишь его основными моментами в силу ограниченности объема публикации.

IУ. $\left[\det(G_k)=0\right.$ и $\det(G_{l_j})=0$ для всех целых $l_n, l_{n-1},\dots,l_2,l_1$ таких, что $(k>l_n>l_j)$ и $(l_{j+1}-3=l_j)$, где $j=n-1,n-2,\dots,2,1]$ либо $[\det(\Lambda_k)=0$ и $\det(\Lambda_{l_i})=0$ для всех целых $l_1,l_2,\dots,l_{n-1},l_n$ таких, что $(k<l_1<l_i)$ и $(l_{i-1}+3=l_i)$, где $i=1,2,\dots,n-1,n]$.

Тогда для $\mathbb{C}$ (I.I) справедливы следующие факторизованные представления

Представление 67(67′) (при условии $Ш_{I}$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat{\beta}_2) \\
E_2(-\hat{\beta}_3) \\
\cdots \\
E_{k'-2}(-\hat{\beta}_{k'-1}) \\
E_{k'-1}\ \mathbb{O}_{k'} \\
E_{k'}\ \mathbb{O}_{k'+1} \\
E_{k'+1}(-\hat{\beta}_{k'+2}) \\
\cdots \\
E_{k''-2}(-\hat{\beta}_{k''-1}) \\
E_{k''-1}\ \mathbb{O}_{k''} \\
E_{k''}\ \mathbb{O}_{k''+1} \\
E_{k''+1}(-\hat{\beta}_{k''+2}) \\
\cdots \\
E_{k-2}(-\hat{\beta}_{k-1}) \\
E_{k-1}\ \mathbb{O}_{k} \\
E_{k}\ \mathbb{O}_{k+1} \\
E_{k+1}(-\hat{\beta}_{k+2}) \\
\cdots \\
E_{m-1}(-\hat{\beta}_{m}) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
E_2 \\
\cdots \\
E_{k'-2} \\
E_{k'-1} \\
\hat{A}_1\hat{A}_2\dots\hat{A}_{k'-1}E_{k'} \\
E_{k'+1} \\
E_{k'+2} \\
\cdots \\
E_{k''-2} \\
\mathbb{O}\ E_{k''-1} \\
\hat{A}_{k'+1}\dots\hat{A}_{k''-1}E_{k''} \\
E_{k''+1} \\
E_{k''+2} \\
\cdots \\
E_{k-2} \\
\mathbb{O}\ E_{k-1} \\
\hat{A}_{k''+1}\dots\hat{A}_{k-1}E_{k} \\
E_{k+1} \\
\cdots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_0 \\
G_1 \\
\cdots \\
G_{k'-3} \\
E_{k'-1} \\
\begin{bmatrix}(E_{k'}-\hat{\Theta}_{k'})(\tilde{\xi}_{k'+1}) \\ (\hat{P}_{k'+1})[G_{k'}]\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}(-\tilde{\xi}_{k'+1}\cdot\hat{B}_{k'+1})\ \mathbb{O} \\ \hat{\varphi}_{k'+1}\ \mathbb{O}\end{bmatrix} \\
G_{k'+1} \\
\cdots \\
G_{k''-3} \\
E_{k''-1} \\
\begin{bmatrix}(-\hat{A}_{k'+1}\cdot\tilde{P}_{k'+1})\ \hat{\varphi}_{k''} \\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}(E_{k''}-\hat{U}_{k''})(\tilde{\xi}_{k''+1}) \\ (\hat{P}_{k''+1})[G_{k''}]\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}(-\tilde{\xi}_{k''+1}\cdot\hat{B}_{k''+1})\ \mathbb{O} \\ \hat{\varphi}_{k''+1}\ \mathbb{O}\end{bmatrix} \\
G_{k''+1} \\
\cdots \\
G_{k-3} \\
E_{k-1} \\
\begin{bmatrix}(-\hat{A}_{k''+1}\cdot\tilde{P}_{k''+1})\ \hat{\varphi}_{k} \\ \mathbb{O}\quad \mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}(E_{k}-\hat{U}_{k})(\tilde{\xi}_{k+1}) \\ (\hat{P}_{k+1})[G_{k}]\end{bmatrix} \\
G_{k+1} \\
\cdots \\
G_{m-1}
\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times\begin{bmatrix}
E_1\ \hat{B}_1 \\
E_2\ \hat{B}_2 \\
\cdots \\
E_{k'-1}\hat{B}_{k'-1} \\
E_{k'} \\
E_{k'+1}\quad \hat{B}_{k'+1} \\
E_{k'+2}\quad \hat{B}_{k'+2} \\
\cdots \\
E_{k''-2}\ \mathbb{O}\ \hat{B}_{k''-2} \\
E_{k''-1}\ \hat{B}_{k''-1} \\
E_{k''} \\
E_{k''+1}\quad \hat{B}_{k''+1} \\
\cdots \\
E_{k-2}\ \mathbb{O}\ \hat{B}_{k-2} \\
E_{k-1}\ \hat{B}_{k-1} \\
E_{k} \\
E_{k+1} \\
\cdots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\hat{c}_2)E_2 \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{k'-1})E_{k'-1} \\
\mathbb{O}_{k'}\ E_{k'} \\
\mathbb{O}_{k'+1}E_{k'+1} \\
(-\hat{c}_{k'+2})E_{k'+2} \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{k''-1})E_{k''-1} \\
\mathbb{O}_{k''}\ E_{k''} \\
\mathbb{O}_{k''+1}E_{k''+1} \\
(-\hat{c}_{k''+2})E_{k''+2} \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{k-1})E_{k-1} \\
\mathbb{O}_{k}\ E_{k} \\
\mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\
(-\hat{c}_{k+2})E_{k+2} \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{m})E_{m}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_{k'} \\ \cdots \\ q_{k''} \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(G) \qquad (2.9)
$$

, где

$k'\equiv l_j,\ k''\equiv l_{j+1},\ (k''-3>k');\ \hat{A}_i=\tilde{P}_{k'}\cdot\prod_{j=i+1}^{k'-1}\hat{c}_j\cdot G_{i-1}^{-1},\ \hat{B}_i=G_{i-1}^{-1}\cdot\prod_{j=i+1}^{k'-1}\hat{\beta}_j\cdot\tilde{\xi}_{k'},\ i=1,\dots,k'-1;\ \hat{\Theta}_{k'}=\sum_{i=1}^{k'-1}(\hat{A}_i\cdot G_{i-1}\cdot\hat{B}_i)$

матрицы $[\hat{\varphi}_{k'+1},\hat{\varphi}_{k''+1};\hat{\varphi}_{k'+1},\varphi_{k''+1}]$, $[\hat{A}_{k'+1},\hat{A}_{k''+1};\hat{B}_{k'+1},\hat{B}_{k''+1}]$, $[\hat{U}_k,\hat{U}_{k''}]$ и $\{\hat{B}_j;\hat{A}_j\}_{j=k'+2}^{k''-1}$, $\{\hat{B}_j;\hat{A}_j\}_{j=k''+2}^{k-1}$ – определены в (2.4), (2.I0)

а $\{\hat{c},\hat{\beta}\}$ – имеют вид (2.9)[I3] и определены в соответствии с $\{G\}$ (I.3). При этом $(E_{k'}-\hat{\Theta}_{k'})=\Lambda_{k'+1}$, если $\{\det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=3}^{k'}$.

Представление 68(68′)(при условии $IУ_I$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat{\beta}_2) \\
E_2(-\hat{\beta}_3) \\
\cdots \\
E_{k'-2}(-\hat{\beta}_{k'-1}) \\
E_{k'-1}\ \mathbb{O}_{k'} \\
E_{k'}\ \mathbb{O}_{k'+1} \\
E_{k'+1}(-\hat{\beta}_{k'+2}) \\
E_{k''-1}\ \mathbb{O}_{k''} \\
E_{k''}\ \mathbb{O}_{k''+1} \\
E_{k''+1}(-\hat{\beta}_{k''+2}) \\
\cdots \\
E_{k-2}(-\hat{\beta}_{k-1}) \\
E_{k-1}\ \mathbb{O}_{k} \\
E_{k}\ \mathbb{O}_{k+1} \\
E_{k+1}(-\hat{\beta}_{k+2}) \\
\cdots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
E_2 \\
\cdots \\
E_{k'-2} \\
E_{k'-1} \\
\hat{A}_1\dots\hat{A}_{k'-1}E_{k'} \\
E_{k'+1} \\
\mathbb{O}\ E_{k''-1} \\
\hat{A}_{k''-2}\hat{A}_{k''-1}E_{k''} \\
E_{k''+1} \\
\mathbb{O}\ E_{k''+2} \\
\cdots \\
E_{k-2} \\
\mathbb{O}\ E_{k-1} \\
\hat{A}_{k-2}\hat{A}_{k-1}E_{k} \\
E_{k+1} \\
\cdots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_0 \\
G_1 \\
\cdots \\
G_{k'-3} \\
E_{k'-1} \\
\begin{bmatrix}(E_{k'}-\hat{\Theta}_{k'})(\tilde{\xi}_{k'+1}) \\ (\tilde{P}_{k'+1})[G_{k'}]\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}(-\tilde{\xi}_{k'+1}\cdot\hat{B}_{k''-2})\ \mathbb{O} \\ (\hat{\varphi}_{k''-2})\ \mathbb{O}\end{bmatrix} \\
\mathbb{O}\quad\mathbb{O}\quad E_{k''-1}\quad\mathbb{O}\quad\mathbb{O} \\
\begin{bmatrix}(-\hat{A}_{k''-2}\tilde{P}_{k'+1})(\hat{\varphi}_{k''-2}) \\ \mathbb{O}\quad\mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}(E_{k''}-\hat{U}_{k''})(\tilde{\xi}_{k''+1}) \\ (\tilde{P}_{k''+1})[G_{k''}]\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}(-\tilde{\xi}_{k''+1}\hat{B}_{k''+1})\ \mathbb{O} \\ (\hat{\varphi}_{k''+1})\ \mathbb{O}\end{bmatrix} \\
\cdots \\
\mathbb{O}\quad\mathbb{O}\quad E_{k-1}\quad\mathbb{O}\quad\mathbb{O} \\
\begin{bmatrix}(-\hat{A}_{k-2}\tilde{P}_{k-2})(\hat{\varphi}_{k-2}) \\ \mathbb{O}\quad\mathbb{O}\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}(E_{k}-\hat{U}_{k})(\tilde{\xi}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1})[G_{k}]\end{bmatrix} \\
G_{k+1} \\
\cdots \\
G_{m-1}
\end{bmatrix} \qquad (2.II)
$$

$$
\times\begin{bmatrix}
E_1\ \hat{B}_1 \\
E_2\ \hat{B}_2 \\
\cdots \\
E_{k'-1}\hat{B}_{k'-1} \\
E_{k'} \\
E_{k'+1}\ \mathbb{O}\ \hat{B}_{k''-2} \\
E_{k''-1}\ \hat{B}_{k''-1} \\
E_{k''} \\
E_{k''+1}\quad \hat{B}_{k''+1} \\
E_{k''+2}\hat{B}_{k''+2} \\
\cdots \\
E_{k-2}\ \mathbb{O}\ \hat{B}_{k-2} \\
E_{k-1}\ \hat{B}_{k-1} \\
E_{k} \\
E_{k+1} \\
\cdots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\hat{c}_2)E_2 \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{k'-1})E_{k'-1} \\
\mathbb{O}_{k'}\ E_{k'} \\
\mathbb{O}_{k'+1}E_{k'+1} \\
(-\hat{c}_{k''-1})E_{k''-1} \\
\mathbb{O}_{k''}\ E_{k''} \\
\mathbb{O}_{k''+1}E_{k''+1} \\
(-\hat{c}_{k''+2})E_{k''+2} \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{k-1})E_{k-1} \\
\mathbb{O}_{k}\ E_{k} \\
\mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\
(-\hat{c}_{k+2})E_{k+2} \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{m})E_{m}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_{k'} \\ q_{k''} \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(G)
$$

, где

$k'\equiv l_j,\ k''\equiv l_{j+1},\ (k''-3=k');\ \hat{\varphi}_j=\hat{A}_j\cdot(E_j-G_{j-1}),\ \hat{\varphi}_j=(E_j-G_{j-1})\cdot\hat{B}_j;$ матрицы $\{\hat{A}_i,\hat{B}_i\}_{i=1}^{k'-1}$ (2.I2)

$\hat{A}_{k''-2},\hat{A}_{k''-1};\hat{B}_{k''-2},\hat{B}_{k''-1};\hat{A}_{k-2},\hat{A}_{k-1},\hat{B}_{k-2},\hat{B}_{k-1};\hat{\Theta}_{k'}$ и $\hat{U}_{k''},\hat{U}_{k'}$ – определены в (2.I0) и (2.2).

При этом также $(E_{k'}-\hat{\Theta}_{k'})=\Lambda_{k'+1}$, если $\{\det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=3}^{k'}$.

Представление 69(69′) (при условии $Ш_2$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)E_2 \\
\cdots \\
(-\beta_{k-1})E_{k-1} \\
\mathbb{O}_k\ E_k \\
\mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\
(-\beta_{k+2})E_{k+2} \\
\cdots \\
(-\beta_{k''-1})E_{k''-1} \\
\mathbb{O}_{k''}\ E_{k''} \\
\mathbb{O}_{k''+1}E_{k''+1} \\
(-\beta_{k''+2})E_{k''+2} \\
\cdots \\
(-\beta_{k'-1})E_{k'-1} \\
\mathbb{O}_{k'}\ E_{k'} \\
\mathbb{O}_{k'+1}E_{k'+1} \\
(-\beta_{k'+2})E_{k'+2} \\
\cdots \\
(-\beta_m)E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
E_2 \\
\cdots \\
E_{k-1} \\
E_k B_{k+1}\dots B_{k''-1} \\
E_{k+1}\mathbb{O} \\
E_{k+2} \\
\cdots \\
E_{k''-1} \\
E_{k''}B_{k''+1}\dots B_{k'-1} \\
E_{k''+1}\mathbb{O} \\
E_{k''+2} \\
\cdots \\
E_{k'-1} \\
E_{k'}B_{k'+1}\dots B_m \\
E_{k'+1} \\
E_{k'+2} \\
\cdots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
\Lambda_3 \\
\cdots \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{bmatrix}[\Lambda_k](\tilde{\xi}_k) \\ (\tilde{P}_k)(E_k-\tilde{U}_k)\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\mathbb{O}\quad\mathbb{O} \\ \psi_{k''-1}(-B_{k''-1}\tilde{\xi}_{k''})\end{bmatrix} \\
E_{k+1} \\
\Lambda_{k+3} \\
\cdots \\
\Lambda_{k''-1} \\
\begin{bmatrix}\mathbb{O}\quad\varphi_{k''-1} \\ \mathbb{O}\ (-P_{k''}\tilde{A}_{k''})\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}[\Lambda_{k''}](\tilde{\xi}_{k''}) \\ (\tilde{P}_{k''})(E_{k''}-\tilde{U}_{k''})\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}\mathbb{O}\quad\mathbb{O} \\ \psi_{k'-1}(-B_{k'-1}\tilde{\xi}_{k'})\end{bmatrix} \\
E_{k''+1} \\
\Lambda_{k''+3} \\
\cdots \\
\Lambda_{k'-1} \\
\mathbb{O}\quad\begin{bmatrix}\mathbb{O}\quad\varphi_{k'-1} \\ \mathbb{O}\ (-P_{k'}\tilde{A}_{k'})\end{bmatrix}\mathbb{O}\begin{bmatrix}[\Lambda_{k'}](\tilde{\xi}_{k'}) \\ (\tilde{P}_{k'})(E_{k'}-\Theta_{k'})\end{bmatrix} \\
E_{k'+1} \\
\cdots \\
\Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}\times
$$

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
E_2 \\
\cdots \\
E_{k-1} \\
E_k \\
\tilde A_{k+1}\,E_{k+1} \\
\tilde A_{k+2}\,\mathbb{O}\,E_{k+2} \\
\tilde A_{k+3}\quad E_{k+3} \\
\tilde A_{k''-1}\ \cdots\ E_{k''-1} \\
E_{k''} \\
\tilde A_{k''+1}E_{k''+1} \\
\tilde A_{k''+2}\,\mathbb{O}\,E_{k''+2} \\
\tilde A_{k'-3}\quad E_{k'+3} \\
\tilde A_{k'-1}\ \cdots\ E_{k'-1} \\
E_{k'} \\
\tilde A_{k'+1}E_{k'+1} \\
\tilde A_{k'+2}\quad E_{k'+2} \\
\tilde A_m \qquad E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
E_{k-2}(-c_{k-1}) \\
E_{k-1}\mathbb{O}_k \\
E_k\,\mathbb{O}_{k+1} \\
E_{k+1}(-c_{k+2}) \\
E_{k''-2}(-c_{k''-1}) \\
E_{k''-1}\,\mathbb{O}_{k''} \\
E_{k''}\,\mathbb{O}_{k''+1} \\
E_{k''+1}(-c_{k''+2}) \\
E_{k'-2}(-c_{k'-1}) \\
E_{k'-1}\,\mathbb{O}_{k'} \\
E_{k'}\,\mathbb{O}_{k'+1} \\
E_{k'+1}(-c_{k'+2}) \\
E_{m-1}(-c_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{k''} \\ \cdots \\ q_{k'} \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (2.13)
$$

, где

$$
\left\{
\begin{array}{l}
k''=\ell_{i-1},\ k'=\ell_i,\ (k''+3>k');\ \mathcal{B}_j=\tilde\xi_{k'+1}\cdot\prod\limits_{3=k+2}^{j}c_3\cdot\Lambda_{j+1}^{-1},\ \tilde A_j=\Lambda_{j+1}^{-1}\cdot\prod\limits_{3=k+2}^{j}\beta_3\cdot\tilde P_{k'+1},\ j=k'+1,\dots,m;\ \theta_{k'}=\sum\limits_{j=k'+1}^{m}(\mathcal{B}_j\cdot\Lambda_{j+1}\cdot\tilde A_j), \\
\text{матрицы } [\varphi_{k''-1},\psi_{k''-1};\varphi_{k'-1},\psi_{k'-1}],\ [\mathcal{B}_{k''-1},\tilde A_{k''-1};\mathcal{B}_{k'-1},\tilde A_{k'-1}],\ [\tilde U_k,\tilde U_{k''}] \text{ и} \\
\{\tilde A_3;\mathcal{B}_3\}_{3=k''+1}^{k'-1},\ \{\tilde A_3;\mathcal{B}_3\}_{3=k+1}^{k'-2} \text{ — определены в (2.8)}, \\
\text{а } \{c,\beta\} \text{ — имеют вид (2.9)[13] и полностью определены в соответст-} \\
\text{вии с } \{\Lambda\} \text{ (1.4). } \underline{\text{При этом}}\ (E_{k'}-\theta_{k'})=G_{k'-1},\ \text{ если } \{det(G_i)\neq 0\}_{i=k'}^{m-2}.
\end{array}
\right. \qquad (2.14)
$$

<u>Представление 70(70′)</u> (при условии IУ$_2$))

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)E_2 \\
(-\beta_{k-1})E_{k-1} \\
\mathbb{O}_k\ E_k \\
\mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\
(-\beta_{k+2})E_{k+2} \\
(-\beta_{k''-1})E_{k''-1} \\
\mathbb{O}_{k''}\ E_{k''} \\
\mathbb{O}_{k''+1}\ E_{k''+1} \\
(-\beta_{k''+2})E_{k''+2} \\
\mathbb{O}_{k'}\ E_{k'} \\
\mathbb{O}_{k'+1}\ E_{k'+1} \\
(-\beta_{k'+2})E_{k'+2} \\
(-\beta_{m-1})E_{m-1} \\
(-\beta_m)\,E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
E_2 \\
E_{k-2} \\
E_{k-1} \\
E_k\,\mathcal{B}_{k+1}\,\mathcal{B}_{k+2} \\
E_{k+1}\,\mathbb{O} \\
E_{k+2} \\
E_{k''-1} \\
E_{k''}\,\mathcal{B}_{k''+1}\,\mathcal{B}_{k''+2} \\
E_{k''+1}\,\mathbb{O} \\
E_{k''+2} \\
E_{k'}\,\mathcal{B}_{k'+1}\,\mathcal{B}_{k'+2}\cdots\mathcal{B}_m \\
E_{k'+1} \\
E_{k'+2} \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 & & & & & & \mathbb{O} \\
& \Lambda_3 & & & & & \\
& & \Lambda_{k-1} & & & & \\
& & \begin{bmatrix}[\Lambda_k] & (\tilde\xi_k) \\ (\tilde P_k) & (E_k-U_k)\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\psi_{k+2})(-\mathcal{B}_{k+2}\cdot\tilde\xi_{k+3})\end{bmatrix} & & \\
& & \mathbb{O}\quad\mathbb{O} & E_{k+1} & \mathbb{O}\quad\mathbb{O} & & \\
& & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & (\varphi_{k''-1}) \\ \mathbb{O} & (-\tilde P_{k''}\cdot A_{k''-1})\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}(\Lambda_{k''}) & (\tilde\xi_{k''}) \\ (\tilde P_{k''}) & (E_{k''}-U_{k''})\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\psi_{k''+2})(-\mathcal{B}_{k''+2}\cdot\tilde\xi_{k''})\end{bmatrix} \\
& & & \mathbb{O}\quad\mathbb{O} & E_{k''+1} & \mathbb{O}\quad\mathbb{O} & \\
& & & & \begin{bmatrix}\mathbb{O} & (\varphi_{k'+2}) \\ \mathbb{O} & (-\tilde P_{k'}\cdot A_{k'+2})\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}[\Lambda_{k'}] & (\tilde\xi_{k'}) \\ (\tilde P_{k'}) & (E_{k'}-\theta_{k'})\end{bmatrix} \\
\mathbb{O} & & & & & & E_{k'+1} \\
& & & & & & \Lambda_{k'+3} \\
& & & & & & \Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}
\times
$$

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
E_{k-1} \\
E_k \\
A_{k+1}E_{k+1} \\
A_{k+2}\,\mathbb{O}\,E_{k+2} \\
E_{k''-1} \\
E_{k''} \\
A_{k''+1}E_{k''+1} \\
A_{k''+2}\,\mathbb{O}\,E_{k''+2} \\
E_{k'-1} \\
E_{k'} \\
\tilde A_{k'-1}E_{k'-1} \\
\tilde A_m \qquad E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
E_{k-2}(-c_{k-1}) \\
E_{k-1}\,\mathbb{O}_k \\
E_k\,\mathbb{O}_{k+1} \\
E_{k+1}(-c_{k+2}) \\
E_{k''-2}(-c_{k''-1}) \\
E_{k''-1}\,\mathbb{O}_{k''} \\
E_{k''}\,\mathbb{O}_{k''+1} \\
E_{k''+1}(-c_{k''+2}) \\
E_{k'-1}\,\mathbb{O}_{k'} \\
E_{k'}\,\mathbb{O}_{k'+1} \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 \\ q_k \\ q_{k''-1} \\ q_{k''} \\ q_{k''+1} \\ q_{k'-1} \\ q_{k'} \\ q_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (2.15)
$$

, где

$$
\left\{
\begin{array}{l}
k''\equiv\ell_{i-1},\ k'\equiv\ell_i\ (k''+3=k'),\ \ \varphi_3=(E_3-\Lambda_{3+1})\cdot A_3,\ \psi_3=\mathcal{B}_3\cdot(E_3-\Lambda_{3+1});\ \text{ матрицы } \{\mathcal{B}_j,\tilde A_j\}, \\
\mathcal{B}_{k''+1},\mathcal{B}_{k''+2},A_{k''+1},\mathcal{B}_{k+1},\mathcal{B}_{k+2},A_{k+2},A_{k+1};\ \theta_{k'} \text{ и } U_{k''};U_k \text{ — определены в (2.14) и (2.6)} \\
\quad\underline{\text{При этом}} \text{ также } (E_{k'}-\theta_{k'})=G_{k'-1},\ \text{ если } \{det(G_i)\neq 0\}_{i=k'}^{m-2}.
\end{array}
\right. \qquad (2.16)
$$

<u>Доказательство</u>. Представления 69(69′) и 70(70′) для $\mathbb{C}(\Lambda)$ (при соответствующих условиях) получаем из представлений (2.29) и (2.30) [I5], а представления 67(67′) и 68(68′) для $\mathbb{C}(G)$ (также при соответствующих условиях), получаем из представлений, аналогичных (2.29) и(2.30) [I5] (если записать их явный вид для $\mathbb{C}(G)$). Справедливость представлений 67(67′)÷70(70′) проверяется путем перемножения блочных матриц с учетом определения последовательностей матриц $\{G\}$ (I.3) и $\{\Lambda\}$ (I.4) и при соответствующих условиях. Справедливость же равенств $(E-\hat\theta)=G$ <u>либо</u> $(E-\theta)=\Lambda$ будет установлена ниже в Лемме 9. <u>Теорема доказана</u>.

<u>Замечание 3</u>. Отметим, что в практических приложениях выше полученных представлений (а именно 27(27′), 28(28′) и в Теоремах 19,20) для задания $\hat\theta$ <u>либо</u> θ (в соответствующих случаях) необходимо вычислять суммы матриц. Во избежание при этом неприятностей, связанных с возможной потерей точности при реализации на ЭВМ (см., например, §5[I]), следует воспользоваться следующим результатом.

<u>Лемма 9</u>. Пусть последовательности матриц $\{G\}$ и $\{\Lambda\}$ определены на основе элементов <u>неособенной</u> матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) в виде (I.3) и (I.4). Тогда имеют место следующие "аннигиляционные" (в смысле определения данного в [I4]) равенства:

I. <u>Если</u> $\{det(\Lambda_i)\neq 0\}_{i=3}^{m+1}$ и $\{det(G_i)\neq 0\}_{i=0}^{m-2}$, <u>то</u>

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sum\limits_{k=1}^{i}\prod\limits_{3=k+1}^{i}\hat c_3\cdot G_{k-1}^{-1}\cdot\prod\limits_{3=k+1}^{i}\hat\beta_3=\tilde{\mathcal{B}}_{ii}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)^{-1},\ \tilde{\mathcal{B}}_{00}=G_0^{-1},\ i=1,2,\dots,m, \\
\sum\limits_{k=i}^{m}\prod\limits_{3=i+1}^{k}c_3\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\prod\limits_{3=i+1}^{k}\beta_3=\tilde{\mathcal{B}}_{ii}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)^{-1},\ \tilde{\mathcal{B}}_{mm}=\Lambda_{m+1}^{-1},\ i=m,m-1,\dots,1
\end{array}
\right. \qquad (2.17)
$$

2. <u>Если</u> $[det(G_i)=0$ для любых i из $(2\le i\le m-2)$, но $\{det(\Lambda_k)\neq 0\}_{k=3}^{i^*}]$ <u>либо</u> $[det(\Lambda_j)=0$ для любых j из $(3\le j\le m-1)$, но $\{det(G_k)\neq 0\}_{k=j^*}^{m-1}]$, <u>то</u>

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sum\limits_{k=1}^{i^*-1}\prod\limits_{3=k+1}^{i^*-1}\hat c_3\cdot G_{k-1}^{-1}\cdot\prod\limits_{3=k+1}^{i^*-1}\hat\beta_3=\tilde{\mathcal{B}}_{i^*-1\,i^*-1}=(\Lambda_{i^*}+G_{i^*-1}+E_{i^*-1})^{-1}=\Lambda_{i^*}^{-1},\quad \text{где } i^*=\min\limits_{det(G_i)=0}(i),\quad \underline{\text{либо}} \\
\sum\limits_{k=j^*+1}^{m}\prod\limits_{3=j^*+2}^{k}c_3\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\prod\limits_{3=j^*+2}^{k}\beta_3=\tilde{\mathcal{B}}_{j^*+1\,j^*+1}=(\Lambda_{j^*+2}+G_{j^*}-E_{j^*+1})^{-1}=G_{j^*}^{-1},\ \text{где } j^*=\max\limits_{det(\Lambda_j)=0}(j),
\end{array}
\right. \qquad (2.18)
$$

<u>а также</u>

$$
(E_{i^*}-\hat\theta_{i^*})=\Lambda_{i^*+1},\ \text{где }\ \hat\theta_i=\tilde P_i\cdot\Big(\sum_{k=j^*+1}^{m}\prod_{3=j^*+2}^{k}c_3\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\prod_{3=j^*+2}^{k}\beta_3\Big)\cdot\tilde P_{j^*+1}, \qquad \underline{\text{либо}}
$$

$$(E_{j^*} - e_{j^*}) = G_{j^*-1}, \quad \text{где} \quad e_{j^*} = \tilde{z}_{j^*+1}\Big(\sum_{k=j^*+1}^{m} \prod_{3=j^*+2}^{k} c_3 \cdot \Lambda_{k+1}^{-1} \cdot \prod_{3=j^*+2}^{k} \beta_3\Big)\cdot \tilde{P}_{j^*+1}, \tag{2.19}$$

а матрицы $\{c, \beta\}$ и $\{\hat{c}, \hat{\beta}\}$ – определены (в соответствии $\{G\}$ (I. 3) и $\{\Lambda\}$ (I.4)) в виде (2.9) [13].

<u>Доказательство</u>. Сначала покажем справедливость (2.17). Поскольку все $\{det(\Lambda_i) \neq 0\}_{i=3}^{m+1}$ и $\{det(G_i) \neq 0\}_{i=0}^{m-1}$, то в соответствии с теоремой 6(6′) [13] имели $\{det(\tilde{\mathbb{B}}_{ii}) \neq 0\}_{i=1}^{m}$. Далее (в соответствии с Леммой 8[16]) в представлениях матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) в виде $\mathbb{C}(\Lambda, G)$ имели место равенства

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{B}}_{ii}^{-1}(\Lambda,G)\cdot \prod_{3=i+1}^{k} c_3 = \prod_{3=i+1}^{k} \hat{\beta}_3 \cdot \tilde{\mathbb{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda,G), & \text{для любых } 1 \le i \le k \le m, \\ \tilde{\mathbb{B}}_{ii}^{-1}(\Lambda,G)\cdot \prod_{3=k+1}^{i} \hat{c}_3 = \prod_{3=k+1}^{i} \beta_3 \cdot \tilde{\mathbb{B}}_{kk}^{-1}(\Lambda,G), & \text{для любых } 1 \le k \le i \le m. \end{cases} \tag{2.20}$$

Из (2.20) можно получить выражения для произведения матриц $\prod_{3=k+1}^{i} \hat{c}_3$, $\prod_{3=i+1}^{k} c_3$. Воспользовавшись далее полученными выражениями под знаком сумм в (2.17), перепишем (2.17) в виде

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{B}}_{ii}(\Lambda,G)\cdot \sum_{k=1}^{i} \prod_{3=k+1}^{i} \beta_3 [\tilde{\mathbb{B}}_{kk}^{-1} \cdot G_{k-1}^{-1}] \cdot \prod_{3=k+1}^{i} \hat{\beta}_3 = \tilde{\mathbb{B}}_{ii}(\Lambda,G), & \text{для любых } 1 \le i \le k \le m, \\ \tilde{\mathbb{B}}_{ii}(\Lambda,G)\cdot \sum_{k=i}^{m} \prod_{3=i+1}^{k} \hat{\beta}_3 [\tilde{\mathbb{B}}_{kk}^{-1} \cdot \Lambda_{k+1}^{-1}] \cdot \prod_{3=i+1}^{k} \beta_3 = \tilde{\mathbb{B}}_{ii}(\Lambda,G), & \text{для любых } 1 \le k \le i \le m. \end{cases} \tag{2.21}$$

Подставив теперь в (2.21) полученные ранее равенства (2.57) [13] $\tilde{\mathbb{B}}_{kk}^{-1} \cdot G_{k-1}^{-1} = E_k - \beta_k \cdot \hat{\beta}_k$, $\beta_1 = \mathbb{O}_1 = \hat{\beta}_1$, $2 \le k \le m$; $\tilde{\mathbb{B}}_{kk}^{-1} \cdot \Lambda_{k+1}^{-1} = E_k - \hat{\beta}_{k+1} \cdot \beta_{k+1}$, $\hat{\beta}_{m+1} = \mathbb{O}_m = \beta_{m+1}$, $1 \le k \le m-1$, а также воспользовавшись $\{det(\tilde{\mathbb{B}}_{ii}) \neq 0\}_{i=1}^{m}$, перепишем (2.21) в виде

$$\sum_{k=1}^{i} \prod_{3=k+1}^{i} \beta_3 (E_k - \beta_k \cdot \hat{\beta}_k) \cdot \prod_{3=k+1}^{i} \hat{\beta}_3 = E_i \; ; \quad \sum_{k=i}^{m} \prod_{3=i+1}^{k} \hat{\beta}_3 (E_k - \hat{\beta}_{k+1} \cdot \beta_{k+1}) \cdot \prod_{3=i+1}^{k} \beta_3 = E_i . \tag{2.22}$$

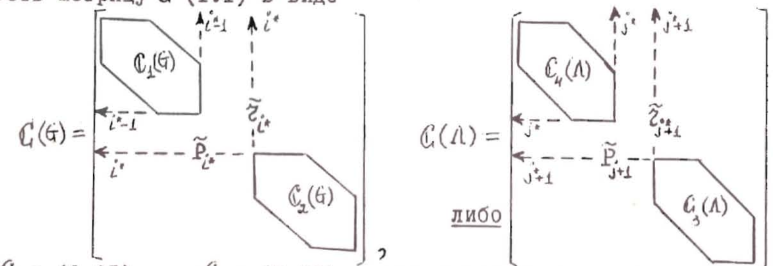
Таким образом, вместо доказательства равенств (2.17) достаточно доказать эквивалентные им равенства (2.22). Ниже приводится доказательство лишь $(2.22)_{I)}$, поскольку $(2.22)_{2)}$ проверяются аналогично. Итак, с учетом (I.14) и (I.15) [15] имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i} \prod_{3=k+1}^{i} \beta_3 (E_k - \beta_k \hat{\beta}_k) \prod_{3=k+1}^{i} \hat{\beta}_3 &= \prod_{3=2}^{i} \beta_3 (E_1 - \beta_1 \hat{\beta}_1) \prod_{3=2}^{i} \hat{\beta}_3 + \prod_{3=3}^{i} \beta_3 (E_2 - \beta_2 \hat{\beta}_2) \cdot \prod_{3=3}^{i} \hat{\beta}_3 + \\ &+ \prod_{3=4}^{i} \beta_3 (E_3 - \beta_3 \cdot \hat{\beta}_3) \cdot \prod_{3=4}^{i} \hat{\beta}_3 + \ldots + \prod_{3=i-1}^{i} \beta (E_{i-2} - \beta_{i-2} \hat{\beta}_{i-2}) \cdot \prod_{3=i-1}^{i} \hat{\beta}_3 + \prod_{3=i}^{i} \beta_3 (E_{i-1} - \beta_{i-1} \hat{\beta}_{i-1}) \cdot \prod_{3=i}^{i} \hat{\beta}_3 + \\ &+ (E_i - \beta_i \cdot \hat{\beta}_i) \overset{(\beta_1 = \mathbb{O}_1 = \hat{\beta}_1)}{=\!=\!=} \Big(\prod_{3=2}^{i} \beta_3 \cdot \prod_{3=2}^{i} \hat{\beta}_3 - \prod_{3=3}^{i} \beta_3 \cdot (\beta_2 \cdot \hat{\beta}_2) \cdot \prod_{3=3}^{i} \hat{\beta}_3\Big) + \Big(\prod_{3=3}^{i} \beta_3 \cdot \prod_{3=3}^{i} \hat{\beta}_3 - \prod_{3=4}^{i} \beta_3 (\beta_3 \hat{\beta}_3) \prod_{3=4}^{i} \hat{\beta}_3\Big) + \\ &+ \Big(\prod_{3=4}^{i} \beta_3 \cdot \prod_{3=4}^{i} \hat{\beta}_3 - \prod_{3=5}^{i} \beta_3 (\beta_4 \hat{\beta}_4) \prod_{3=5}^{i} \hat{\beta}_3\Big) + \ldots + \Big(\prod_{3=i-1}^{i} \beta_3 \cdot \prod_{3=i-1}^{i} \hat{\beta}_3 - \prod_{3=i}^{i} \beta_3 (\beta_{i-1} \cdot \hat{\beta}_{i-1}) \cdot \prod_{3=i}^{i} \hat{\beta}_3\Big) + \\ &+ (\beta_i \cdot \hat{\beta}_i) - (\beta_i \cdot \hat{\beta}_i) + E_i = E_i , \end{aligned}$$

т.е. $(2.22)_{I)}$ доказана. Доказательство равенства (2.18) аналогично только что выполненному выше доказательству равенств (2.17), если учесть при этом следующие обстоятельства:

<u>Во-первых</u>, согласно условию 2) Леммы 9 i^* либо j^* есть номера последних вырожденных матриц в матричных последовательностях $\{G\}$ (I.3) либо $\{\Lambda\}$ (I.4) соответственно. Следовательно, $\{det(G_k) \neq 0$, $det(G_{i^*}) = 0$, G_{i^*-1} – ?, но $G_{i^*-2} \equiv E_{i^*-1}\}_{k=0}^{i^*-3}$ <u>**либо**</u> $\{det(\Lambda_k) \neq 0$, $det(\Lambda_{j^*}) = 0$,

но $\Lambda_{j^*+2} \equiv E_{j^*+1}\}_{k=j^*+3}^{m+1}$. <u>Во-вторых</u>, согласно Теореме 18[14] $i^* \neq j^*$, поскольку в противном случае имели бы $det(G_{i^*}) = 0$ и $det(\Lambda_{i^*}) = 0$ и, следовательно, $det(\mathbb{C}) = 0$, что противоречило бы условию леммы 9 о невырожденности матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). <u>В-третьих</u>, <u>формально</u> всегда можно записать матрицу $\mathbb{C}$ (I.I) в виде



(2.23)

где $\mathbb{C}_1$ в $(2.23)_{I)}$ и $\mathbb{C}_2$ в $(2.23)_{2)}$ есть квазитрехдиагональные <u>под</u>матрицы матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), образованные соответственно ее первыми (i^*-1) и последними $(m-(j^*+1))$ – строками. И, следовательно, $\mathbb{C}_2$ и $\mathbb{C}_4$ тогда являются квазитрехдиагональными <u>под</u>матрицами соответствующих размерностей, а $\tilde{P}_{i^*}$, $\tilde{z}_{i^*}$ и $\tilde{P}_{j^*+1}$, $\tilde{z}_{j^*+1}$ есть элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). Нетрудно теперь проверить, выполнив перемножения соответствующих матриц в представлениях 27(27′), 63(63′), 64(64′), 67(67′), 68(68′) (либо, что то же самое, в 19(19′), 21(21′), 61(61′)) для $\mathbb{C}(G)$, а также в представлениях 28(28′), 65(65′), 66(66′), 69(69′), 70(70′) (либо, что то же самое, в 20(20′), 24(24′), 62(62′)) для $\mathbb{C}(\Lambda)$, что элементы матриц $\mathbb{C}_1(G)$ являются функциями всех <u>неособенных</u> и полностью определенных матриц $\{G_k\}_{k=0}^{i^*-2}$, а $\mathbb{C}_3(\Lambda)$ функциями всех <u>неособенных</u> и полностью определенных матриц $\{\Lambda_k\}_{k=j^*+2}^{m+1}$. Кроме того, как следует из условия 2) Леммы 9, должны выполняться одновременно условия

$[\{det(G_k) \neq 0, G_{i^*+2} \equiv E_{i^*+1}\}_{k=0}^{i^*-3}$ и $\{det(\Lambda_k) \neq 0\}_{k=3}^{i^*+1}]$ <u>либо</u> условия

$[\{det(\Lambda_k) \neq 0, \Lambda_{j^*+2} \equiv E_{j^*+1}\}_{k=j^*+3}^{m+1}$ и $\{det(G_k) \neq 0\}_{k=j^*}^{m-1}]$.

Из выполненного выше анализа следует, что квазитрехдиагональные (под)матрицы $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_3$ в (2.23) порядков i^*-1 и $(m-(j^*+1))$ соответственно являются невырожденными и имеют все ненулевые верхние <u>и</u> нижние главные угловые квазиминоры. Следовательно, для $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ будут выполняться (с учетом размерностей этих матриц) равенства типа (2.17), что и доказывает справедливость (2.18). Равенства (2.19) являются прямым следствием равенств (2.18) и определений последовательностей матриц $\{G\}$ (I.3) и $\{\Lambda\}$ (I.4). <u>Лемма доказана</u>.

<u>Замечание 4</u>. (Следствие из Леммы 9). Если для матриц $\mathbb{C}$ (I.I) выполняются условия 2) Леммы 9, то по сути имеют место (в силу равенств (2.19)) следующие "равенства представлений" в соответствующих случаях

$$\mathbb{C}(G)=\mathbb{C}(G,\Lambda_{i+1}) \ \underline{\text{либо}} \quad \mathbb{C}(\Lambda)=\mathbb{C}(\Lambda,G_{j+1}). \tag{2.24}$$

Однако следует иметь в виду, что в общем случае не имеют места следующие "равенства представлений"

$$\mathbb{C}(G,\Lambda_{i+1})\neq\mathbb{C}(G,\Lambda) \qquad \underline{\text{либо}} \quad \mathbb{C}(\Lambda,G_{j+1})\neq\mathbb{C}(\Lambda,G),$$ где

$\mathbb{C}(\Lambda,G)$ – представления для матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), введенные нами в [16]. Ниже (так же, как и в Теореме I5 [I5]) сформулируем результат, суть которого можно определить, в соответствии с [I5], как обобщение понятия <u>условного вырождения первого рода</u> любой матрицы вида $\mathbb{C}$ (I.I). С этой целью средние факторизующие матрицы – множители в представлениях 67(67′), 68(68′) перепишем в виде

<u>При условии</u> Ш$_{\mathrm{I})}$ <u>При условии</u> IУ$_{\mathrm{I})}$

$$\hat{\omega}(G)=\begin{bmatrix} G_c & & & & & & & & \\ & G_1 & & & & & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_{k'-1} & & & & & \\ & & & & \hat{T}_1 & & & & \\ & & & & & G_{k+1} & & & \\ & & \mathbb{O} & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & G_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{T}_1=\begin{bmatrix} \hat{Q}_{k'} & \mathbb{O} & \hat{W}_{k'-1} & & \\ \mathbb{O} & G_{k'+1}\ \ddots\ E_{k''-1} & \mathbb{O} & & \\ \hat{V}_{k'+1} & \mathbb{O} & \hat{Q}_{k''} & \mathbb{O} & \hat{W}_{k''+1} \\ & & \mathbb{O} & G_{k''+1}\ \ddots\ E_{k-1} & \mathbb{O} \\ & & \hat{V}_{k''+1} & \mathbb{O} & \hat{Q}_k \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}(G)=\begin{bmatrix} G_c & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbb{O} & \\ & & G_{k'-3} & & & & \\ & & & E_{k'-1} & & & \\ & & & & \hat{T}_2 & & \\ & & & & & G_{k+1} & \\ & \mathbb{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & G_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{T}_2=\begin{bmatrix} \hat{Q}_{k'} & \vec{\mathbb{O}}^T & \hat{W}_{k'-1} & & \\ \vec{\mathbb{O}} & E_{k''-1} & \vec{\mathbb{O}} & & \\ \hat{V}_{k''-2} & \vec{\mathbb{O}}^T & \hat{\hat{Q}}_{k''} & \vec{\mathbb{O}}^T & \hat{W}_{k''+1} \\ & & \vec{\mathbb{O}} & E_{k-1} & \vec{\mathbb{O}} \\ & & \hat{V}_{k-2} & \vec{\mathbb{O}}^T & \hat{Q}_k \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

где $(k'=l_j,\ k''=l_{j+1})$,

а соответствующие блочные матрицы $\hat{Q}$; $\hat{W}$, $\hat{V}$, $\hat{\hat{Q}}$ в явном виде определены в 67(67′) и 68(68′), $\vec{\mathbb{O}}^T=(\mathbb{O},\mathbb{O})^T$, $\vec{\mathbb{O}}=(\mathbb{O},\mathbb{O})$; и в представлениях 69(69′), 70(70′) в виде

<u>При условии</u> Ш$_{2)}$ <u>При условии</u> IУ$_{2)}$

$$\omega(\Lambda)=\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbb{O} & \\ & & \Lambda_{k-1} & & & & \\ & & & T_1 & & & \\ & & & & E_{k'+1} & & \\ & \mathbb{O} & & & & \Lambda_{k'+3}\ \ddots & \\ & & & & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}, \quad T_1=\begin{bmatrix} Q_k & \mathbb{O} & W_{k''-1} & & \\ \mathbb{O} & E_{k+1}\ \Lambda_{k+3}\ \ddots\ \Lambda_{k''-1} & \mathbb{O} & & \\ V_{k''-1} & \mathbb{O} & Q_{k''} & \mathbb{O} & W_{k'-1} \\ & & \mathbb{O} & E_{k''+1}\ \ddots\ \Lambda_{k'-1} & \mathbb{O} \\ & & V_{k'-1} & \mathbb{O} & Q_{k'} \end{bmatrix}$$

$$\Omega(\Lambda)=\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & & & \\ & \Lambda_3 & & & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \Lambda_{k-1} & & & \\ & & & & T_2 & & \\ & & & & & E_{k'+1} & \\ & \mathbb{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}, \quad T_2=\begin{bmatrix} \tilde{Q}_k & \vec{\mathbb{O}}^T & W_{k+2} & & \\ \vec{\mathbb{O}} & E_{k+1} & \vec{\mathbb{O}} & & \\ V_{k''-1} & \vec{\mathbb{O}}^T & \tilde{Q}_{k''} & \vec{\mathbb{O}}^T & W_{k''+2} \\ & & \vec{\mathbb{O}} & E_{k''+1} & \vec{\mathbb{O}} \\ & & V_{k''+2} & \vec{\mathbb{O}}^T & Q_{k'} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

где $(k''=l_{i-1},\ k'=l_i)$,

а соответствующие блочные матрицы Q; W, V, $\tilde{Q}$ в явном виде определены в 69(69′), 70(70′), $\vec{\mathbb{O}}^T=(\mathbb{O},\mathbb{O})^T$, $\vec{\mathbb{O}}=(\mathbb{O},\mathbb{O})$, ^{T} – знак транспонирования. Итак, справедлива следующая

<u>Теорема 2I</u>. Пусть $\mathbb{C}$ – квазитрехдиагональная матрица вида $\mathbb{C}$ (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{\tilde{E}_k, \tilde{P}_k\}_{k=2}^{m}$ и <u>невырожденными</u>

квазидиагональными элементами-блоками $\{q_k\}_{k=1}^{m}$, размерности которых в общем случае различные. Пусть также для последовательностей матриц $\{G\}$ (I.3), $\{\Lambda\}$ (I.4) выполняются условия Ш <u>либо</u> IУ Теоремы 20. Тогда условия

$$\left\{\begin{array}{l} \det(G_c)=0 \ \text{и(или)} \left\{\begin{array}{l} \det(\hat{T}_1)=0, \text{ где } \hat{T}_1 - \text{блочно квазитрехдиагональная матрица в } (2.25)_{\mathrm{I})} \ (\text{при } l_{j+1}-3>l_j), \\ \det(\hat{T}_2)=0, \text{ где } \hat{T}_2 - \text{блочно квазитрехдиагональная матрица в } (2.25)_{2)} \\ (\text{при } l_{j+1}-3=l_j);\ j=n-1,n-2,\dots,2,1; \end{array}\right. \\ \underline{\text{либо}} \\ \det(\Lambda_{m+1})=0 \ \text{и(или)} \left\{\begin{array}{l} \det(T_1)=0, \text{ где } T_1 - \text{блочно квазитрехдиагональная матрица в } (2.26)_{\mathrm{I})} \ (\text{при } l_{i-1}+3<l_i), \\ \det(T_2)=0, \text{ где } T_2 - \text{блочно-квазитрехдиагональная матрица в } (2.26)_{2)} \\ (\text{при } l_{i-1}+3=l_i);\ i=2,3,\dots,n-1,n, \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{2.27}$$

являются <u>необходимыми и достаточными условиями</u> вырожденности матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) в соответствующих случаях.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству теоремы I5[I5] и является прямым следствием представлений 67(67′), 68(68′) и 69(69′), 70(70′), поэтому на нем не останавливаемся.

<u>Замечание 5</u> (Следствие из Теоремы 2I). Если для последовательностей матриц $\{G\}$ (I.3) и $\{\Lambda\}$ (I.4) выполняются условия I <u>либо</u> П Теоремы I9, то условия (2.27) теоремы 2I упрощаются с учетом представлений 63(63′), 64(64′) и 65(65′), 66(66′) соответственно, что особенно важно в приложениях. Если же обращаются в нуль <u>более</u> чем два соответствующих <u>отдаленных</u> квазиминора, то, как следует из представлений 67(67′) и 69(69′), опять-таки, в приложениях не возникает никаких сложностей. Свойства же матриц $\hat{T}$ (2.25) и T (2.26) в общем случае будут дополнительно изучены в следующей работе.

<u>Замечание 6</u>. Наконец, в заключение настоящего параграфа следует, по-видимому, остановиться на некоторых вопросах нетрадиционной терминологии, использованной нами как в названии данного параграфа, так и вынесенной в название всей работы. Как следует из результатов этого параграфа, под естественными элементарными факторизациями квазитрехдиагональных матриц (в случае обращения в нуль их верхних (нижних) главных блочных угловых миноров) мы понимаем факторизации, не использующие в явном виде матрицы перестановок. Использование матриц перестановок продиктовано необходимостью устранения в этом случае быстрого роста (а точнее неопределенности) некоторых элементов факторизующих матриц при классических факторизациях (см., например, §28[I] либо

§24[2] и[4]). По сути своей факторизации, названные нами для краткости естественными, можно было бы, следуя принятой традиции (см., например, пояснение в §24.3 и § 24.I8 [2]), назвать развернуто - компактной схемой метода Гаусса для разложения квазитрехдиагональных матриц на множители, если некоторые из их ведущих (≡ главных угловых) блочных миноров обращаются в нуль. При этом в общем случае элементарными матрицами, используемыми в соответствующих факторизациях и обязанных здесь своим появлением нулевым квазиминорам, являются матрицы вида

$$\begin{bmatrix} [\Lambda_k] & (\tilde{\Xi}_k) \\ (\tilde{P}_k) & (E_k-\mathcal{U}_k) \end{bmatrix}, \ \ldots, \begin{bmatrix} [\Lambda_\ell] & (\tilde{\Xi}_\ell) \\ (\tilde{P}_\ell) & (E_\ell-\Theta_\ell) \end{bmatrix}, \quad \text{если } \{det(\Lambda_n)=0\}_{n=k}^{\ell},$$

а также

$$\begin{bmatrix} (E_\ell-\hat{\Theta}_\ell) & (\tilde{\Xi}_{\ell+1}) \\ (\tilde{P}_{\ell+1}) & [G_\ell] \end{bmatrix}, \ \ldots, \begin{bmatrix} (E_k-\hat{\mathcal{U}}_k) & (\tilde{\Xi}_{k+1}) \\ (\tilde{P}_{k+1}) & [G_k] \end{bmatrix}, \quad \text{если } \{det(G_n)=0\}_{n=1}^{k}. \qquad (2.28)$$

Полученные нами выше естественно-элементарные представления матриц $\mathbb{C}$ (I.I) в случае обращающихся в нуль некоторых из их главных угловых квазиминоров являются также естественным обобщением представлений 5(5') и 7(7')[I3], когда ни один из указанных квазиминоров в нуль не обращается. Кроме того, полученные выше представления на основе элементарных матриц (2.28) позволяют эффективно и естественно решать проблемы I)÷4), отмеченные в начале настоящего параграфа, а также хорошо приспособлены к применению режима накопления (в отличие от методов факторизаций с применением матриц перестановок (см., например, §24.I6÷24.25 [2] либо [I])) и обратного анализа ошибок округления (см., например, [I] либо §24 [2]) при реализации на ЭВМ.

Заключение

Получены нетрадиционные обобщения (теоремы I9 и 20) компактных схем метода Гаусса для разложения квазитрехдиагональных матриц на множители, если некоторые из их ведущих блочных миноров обращаются в нуль. Доказана Теорема 2I об условном вырождении таких матриц.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за поддержку настоящего цикла работ.

Литература

I. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М., "Наука" 1977.
2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М., "Наука", 1984.

3. Ильин В.П., Кузнецов Ю.А. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М., "Наука", I985.
4. Икрамов Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем (Прямые методы). М., "Наука", I988.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., "Наука", I978.
6. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры.- В сборнике: Вычисл. методы линейной алгебры. Параллельные вычисления. Записки научных семинаров ЛОМИ, Том 54. Издательство "Наука". Ленинградское отделение. I974.
7. Глушенков В.Д. "О методе прогонки для решения системы линейных алгебраических уравнений с $(2\cdot K+1)$ - диагональной матрицей.- В кн.: Применение методов вычисл. мат. и ЭВМ в техн.-экон. расчетах. Вып. 2. Казан. ун-т, I970, I34-I36.
8. Emelyanenko G.A. JINR, E11-83-71. Dubna, 1983.
9. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-73-6933; PII-85-304; PII-85-488; PII-85-489, Дубна (I973, I985).
IO. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-86-53I, Дубна I986.
II. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, PII-86-504, Дубна I986.
I2. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, PII-87-524, Дубна I987.
I3. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, PII-87-533, Дубна I987.
I4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, PII-87-623, Дубна I987.
I5. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, PII-88-598, Дубна I988.
I6. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, PII-88-599, Дубна I988.
17. Martin R.S., Wilkinson J.H. Similarity reduction of a general matrix to Hessenberg form.- Numer. Math., 1968, 12, N5, 349-368.
18. Martin R.S., Wilkinson J.H. Solution of symmetric and unsymmetric bang equations and the calculation of eigenvectors of band matrices.- Numer. Math., 1967, 9, N4, 279-301.
19. Tewerson R.P. Sorting and ordering sparse linear systems.- In: Large Sparse Sets Linear Equat., London-New York, Acad. Press, 1971, 151-167.
20. Broyden C.G. On convergence criteria for the method of seccessive over-relaxation- Math. Comput., 1964, 6, N4, 269-284.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября I988 года.