сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-784

Б.Н.Хоромский

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ В НЕПОЛНО-НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Построение переобуславливателей

1988

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрены краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений дивергентного типа (возникающих, например, в магнитостатике) в неполной-нелинейной (IN) постановке. Согласно [1], область нелинейности Ω_F разбивается на конечное число p подобластей $\Omega_F = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i$, в каждой из которых значение магнитной проницаемости $\mu(x)$ полагается равным константе μ_i, подлежащей определению, и зависящей нелинейно от среднего значения градиента решения в области Ω_i. Показано, что решение такой задачи может быть найдено методом простых итераций с переобуславливанием, обобщенным методом сопряженных градиентов или методами ньютоновского типа.

Использование перечисленных итерационных процессов сводится к многократному решению линейной краевой задачи с постоянным значением коэффициента $\mu(x) = \mu_i$, $x \in \Omega_i$ в каждой из подобластей. Значения μ_i этих констант могут отличаться на несколько порядков для различных Ω_i, причем соотношение этих констант для примыкающих областей в практических задачах является непредсказуемым. От эффективности решения такой краевой задачи в первую очередь зависит эффективность реализации итерационных алгоритмов для задачи в IN-постановке. Кроме того, оператор упомянутой краевой задачи (обозначим его через A) может быть использован в качестве переобуславливателя при решении как линейных, так и нелинейных эллиптических уравнений с сильно меняющимися коэффициентами. Переобуславливание является одним из наиболее эффективных приемов ускорения сходимости итерационных процессов решения возникающих при дискретизации систем алгебраических уравнений [2,3]. Ряд подходов к построению блочных переобуславливателей для разностных эллиптических уравнений, развиваемых в последнее время, можно найти в работах [4–10] и цитируемой там литературе. Случай, когда блочное представление неизвестных соответствует разбиению области пространственных переменных на подобласти типа полос (разбиение типа "streeps"), достаточно полно исследован в работах [11–20]. Метод декомкозиции для неограниченной области исследован в [21, 22]. Итерационные методы для разностных эллиптических уравнений с сильно меняющимися коэффициентами исследовались в [3,23–25]. Проблемы объединения BEM и FEM рассмотрены в [35,36].

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1] и посвящена построению эффективных переобуславливателей для оператора в неполно-нелинейной постановке [1] в двумерном и трехмерном случаях.

В § 1 рассматриваем алгоритмы, основанные на процедуре разделения области на подобласти, имеющие внутренние точки пересечения (разбиение типа "box") [26]. Такой подход является более общим, по сравнению с методами, использующими разбиение на полосы, однако при его реализации и обосновании возникают характерные особенности, связанные с наличием внутренних точек пересечения и, как следствие, приводящие к необходимости рассматривать вопросы склейки функций на липшицевых поверхностях [27]. Переобуславливатели для двумерных конечно-элементных эллиптических систем, использующие разбиение на подобласти типа "box", рассматривались в [26, 29, 30], некоторые подходы для трехмерных задач рассмотрены в [30]. Метод разделения области в сочетании с многосеточными алгоритмами предложен в [34].

Здесь (аналогично случаю нелинейной задачи в IN-постановке [1]) исходное операторное уравнение формулируется на внутренних поверхностях раздела подобластей Ω_i. Как в двумерном, так и в трехмерном случае итерационные процессы рассматриваем для галеркинской системы уравнений, определяемой выбором некоторых специальных подпространств (не обязательно конечномерных) исходного соболевского пространства следов функций на поверхностях раздела. Для разбиения "шахматного" типа построен класс переобуславливателей B, "близких по спектру" исходному линейному оператору A, причем независимо от отношений констант μ_i в различных подобластях. При этом задача обращения оператора B существенно проще решения исходной проблемы, и в своей наиболее трудоемкой части сводится к независимому решению задач Дирихле и смешанных для оператора Лапласа в подобластях Ω_i, а значит, легко поддается крупноблочному распараллеливанию.

Показано, что оценки границ спектра оператора $B^{-1}A$, на подпространстве X_h базисных функций, определяются минимумами некоторых функционалов на функциях из X_h, определенных лишь в подобластях Ω_i. Для некоторых конечномерных подпространств X_h такие оценки получены в § 3. В частности, в двумерном случае для системы X_h кусочно-линейных базисных функций на $\partial\Omega_i$ с параметром триангуляции h из полученных результатов следует оценка

$$c_1(Au,u) \le (Bu,u) \le c_2(Au,u), \quad u \in X_h,$$

$$\frac{c_2}{c_1} = O(1 + (\ln\frac{d}{h})^2), \qquad c_1, c_2 > 0,$$

независимо от отношения μ_i/μ_j, $i,j \le p$. Здесь $d = \max\limits_i(\mathrm{diam}\,\Omega_i)$. В трехмерном случае также получены логарифмические оценки констант c_1, c_2 для некоторых конечномерных подпространств.

В § 4 рассмотрена задача оптимизации суммарной размерности массивов (в зависимости от числа подобластей Ω_i), необходимых для решения дискретизованной задачи, когда итерационный процесс осуществляется на однопроцессорной ЭВМ таким образом, что информация об искомых функциях хранится лишь для неизвестных на поверхностях раздела $\partial\Omega_i$.

Отметим, что в рамках $\mathbb{N}$-формулировки для получения "тонкой" структуры решения в некоторых из подобластей Ω_i вместо оператора Лапласа можно использовать оператор в $\mathbb{N}$-формулировке, если построить дополнительное разбиение этой области на подобласти. Скорость сходимости рассмотренных итерационных процессов не меняется, даже если при некоторых i имеем $\mu_i \to \infty$, поэтому алгоритм можно использовать в качестве одного из вариантов метода фиктивных областей, как в линейном, так и в нелинейном случае.

1. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ

Напомним необходимые в дальнейшем обозначения и определения, использованные в [1]. Пусть область $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{M} \Omega_i$ разбита на подобласти Ω_i с липшицевыми границами. Используем "шахматное" (или черно-белое) разбиение, которое в двумерном случае ($N = 2$) топологически эквивалентно разбиению прямоугольника Ω на клетки с помощью $(n_x - 1)$ вертикальной и $(n_y - 1)$ горизонтальной линий, так что при двумерной нумерации областей Ω_{ij}, $1 \le i \le n_x$, $1 \le j \le n_y$ имеем представление

$$\Omega = \Omega_B \cup \Omega_W,$$

$$\Omega_B = \cup\,\Omega_{ij}, \ i + j \text{ — четное}, \quad \Omega_W = \cup\,\Omega_{ij}, \ i + j \text{ — нечетное}.$$

В случае трех пространственных переменных ($N = 3$) разбиение аналогично.

Далее сохраняем одномерную индексацию и обозначим через I_B множество индексов i, для которых $\Omega_i \in \Omega_B$, и аналогично определяем I_W. Обозначим $\Gamma_i = \partial\Omega_i$, $\Gamma = \partial\Omega$, а $\Gamma_I = \bigcup\limits_{i \in I_B} \Gamma_i \setminus \Gamma \equiv \bigcup\limits_{i \in I_W} \Gamma_i \setminus \Gamma$ — множество всех внутренних границ. Пусть $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Пространства следов [30] $\gamma_i u$ на Γ_i, $i = \overline{1,M}$ функций $u \in V$ обозначим $V_i^{1/2} = \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma_i)$ (с нормой из $W_2^{1/2}(\Gamma_i)$), а пространства следов нормальных производных $\gamma_i^1 u = (\partial u/\partial u)|_{\Gamma_i}$, $u \in V$ через $V_i^{-1/2} = \tilde{W}_2^{-1/2}(\Gamma_i)$ (с нормой из $W_2^{-1/2}(\Gamma_i)$). Полагаем $X_B = \sum\limits_{i \in I_B} \oplus V_i^{1/2}$, $X_W = \sum\limits_{i \in I_W} \oplus V_i^{1/2}$, $X_B^* = \sum\limits_{i \in I_B} \oplus V_i^{-1/2}$, $X_W^* = \sum\limits_{i \in I_W} \oplus V_i^{-1/2}$. Согласно определению $V_i^{1/2}$, всякая функция $u \in X_B$, т.е. $u = \sum\limits_{i \in I_B} \oplus u_i$, $u_i \in V_i^{1/2}$, есть след на Γ_I некоторой функции из пространства V, а функция $v \in X_B^*$($v = \sum\limits_{i \in I_B} \oplus v_i$, $v_i \in V_i^{-1/2}$) есть след на Γ_I нормальной производной некоторой функции из V. Аналогичный вид имеют элементы пространств X_W и X_W^*.

Оператор Пуанкаре-Стеклова для лапласиана в Ω_i обозначим через $S_{\Delta,i}$, $D(S_{\Delta,i}) = \{u \in X_B^*: \int_{\Gamma_i} u\,dx = 0\}$, а обратный к нему оператор — через $S_{\Delta,i}^{-1} \in \mathfrak{L}(V_i^{1/2} \to V_i^{-1/2})$, Ker $S_{\Delta,i}^{-1} = \{u \in V_i^{1/2} : u = \mathrm{const},\ x \in \Omega_i\}$. Определим операторы

$$S_{B,\Delta}^{-1} = \sum_{i\in I_B} \oplus S_{\Delta,i}^{-1}, \qquad S_{B,\Delta}^{-1} \in \mathfrak{L}(X_B \to X_B^*),$$
$$S_{W,\Delta}^{-1} = \sum_{i\in I_W}\oplus S_{\Delta,i}^{-1}, \qquad S_{W,\Delta}^{-1} \in \mathfrak{L}(X_W\to X_W^*), \tag{1.1}$$

а также оператор перестановки T, такой, что $TT^* = E$, $T: X_B \to X_W$, который каждой функции из X_B ставит в соответствие функцию из X_W путем перестановки соответствующих блоков неизвестных [1].

Пусть задан вектор $\bar\mu_0 = (\mu_1,\dots,\mu_M) \in R^M$, где $\mu_i > 0$, $i = \overline{1,M}$. На области Ω рассмотрим билинейную форму $\bar A: V\times V \to R$, определяемую формулой

$$\bar A(u,v) = \sum_{i=1}^M \mu_i \int_{\Omega_i} (\nabla u, \nabla v)\,dx, \quad \forall v \in V, \tag{1.2}$$

где скалярное произведение задано в $L_2(\Omega_i)$. Форме $\bar A$, определенной в (1.2), ставим в соответствие оператор $A(\bar\mu_0) \in \mathfrak{L}(X_B \to X_B^*)$

$$A(\bar\mu_0)u = M_B S_{B,\Delta}^{-1} u + T^* M_W S_{W,\Delta}^{-1} T u, \quad u \in X_B, \tag{1.3}$$

где

$$M_B = \sum_{i\in I_B}\oplus \mu_i E_i, \qquad M_W = \sum_{i\in I_W} \oplus \mu_i E_i$$

есть диагональные операторы, а E_i — тождественный оператор на V_i. Согласно [1], § 2 нормы в X_B и X_B^* зададим соотношениями

$$\|u\|^2_{X_B} = \sum_{i\in I_B} \|u_i\|_{V_i^{1/2}} + \sum_{i\in I_W} \|(Tu)_i\|_{V_i^{1/2}},$$
$$\|v\|^2_{X_B^*} = (A(\bar\mu_0)^{-1}v, v), \quad u = \sum_{i\in I_B}\oplus u_i. \tag{1.4}$$

Начнем рассмотрение с двумерного случая. Пусть Ω_i — строго внутренний прямоугольник, т.е. $\Gamma_i \cap \Gamma = \varnothing$ (не умаляя общности, считаем, что все Ω_i — прямоугольники). Компоненту $u_i \in V_i^{1/2}$ элемента $u \in X_B$ разобьем, в свою очередь, еще на четыре компоненты $u_i = \{u_i^k\}$, $k = \overline{1,4}$, каждая из которых определена на одной из четырех сторон прямоугольника Ω_i. Соответственно оператор $S_{\Delta,i}^{-1}$ представим в блочном виде

$$S_{\Delta,i}^{-1} = \{S_i^{km}\}, \quad k,m = \overline{1,4}. \tag{1.5}$$

Для прямоугольников из приграничного слоя блочная размерность оператора $S_{\Delta,i}^{-1}$ равна 2 или 3, а оператор $S_{\Delta,i}^{-1}$ получается из представления вида (1.5) вычеркиванием блочных строк и столбцов, соответствующих нулевым компонентам u_i^k вектора u_i.

Замечание 1. Оператор $S_{\Delta,i}^{-1}$ имеет явное представление

$$S_{\Delta,i}^{-1} = L^{-1}(E-K), \tag{1.6}$$

где интегральные операторы K и L на границе Γ_i определены формулами (N — размерность пространства)

$$Ku(M) = \frac{1}{\pi(N-1)} \int_{\Gamma_i} \frac{\cos(r_{PM}, n_P)}{|r_{PM}|^2} u(P)\,d\sigma_P,$$

$$Lv(M) = \frac{1}{\pi(N-1)}\int_{\Gamma_i} |r_{PM}|^{-1} v(P)\,d\sigma_P, \quad M,P\in\Gamma_i,$$

где $|r_{PM}|$ — евклидова норма вектора r_{PM}, соединяющего точки $M, P \in \Gamma_i$, n_P — вектор внутренней нормали в точке P, E — тождественный оператор. Формулу (1.6) можно использовать для дискретизации оператора $A(\bar\mu_0)$, имеющего явное представление.

Пусть рассмотренное разбиение области $\Omega = \bigcup_{i=1}^M \Omega_i$ образует сетку, определяющую конечные элементы серендипова семейства первого порядка [31]. Размерность соответствующего пространства базисных функций, которое обозначим $L_{KI,2} \equiv X_1$, равна числу KI внутренних вершин подобластей Ω_i. Аналогичное пространство серендиповых базисных функций первого порядка в трехмерном случае обозначим $L_{KI,3} \equiv Y_1$.

Перейдем к построению переобуславливателя B для оператора $A(\bar\mu_0) \equiv A_2$. В двумерном случае определим пространства

$$X_{2,i} = \sum_{k=1}^4 \oplus \overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\Gamma_i^k), \qquad \overline{X_2} = \sum_{i\in I_B}\oplus X_{2,i}, \tag{1.7}$$

где пространство $\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\Gamma)$ определяется, например, в [30]. Пусть $X_2 \subset \overline{X_2}$ — какое-либо подпространство пространства $\overline{X_2}$, а $X_0 = L_{KI,2} \oplus X_2$. Для всякой $u \in X_0$ справедливо единственное представление $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in L_{KI,2}$, $u_2 \in X_2$. Поэтому для всяких $u, v \in X_0$ имеем

$$(A_2u, v) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(A_2 u_i, v_j). \qquad (1.8)$$

При конструировании оператора B выбрасываем из (1.8) перекрестные члены и упрощаем второе слагаемое. Определим оператор

$$\operatorname{diag} A_2 = M_B \cdot \sum_{i\in I_B} \oplus \Big(\sum_{k=1}^{4} \oplus S_i^{kk}\Big) + M_W \cdot \sum_{i\in I_W} \oplus\Big(\sum_{k=1}^{4} \oplus S_i^{kk}\Big), \qquad (1.9)$$

используя блочное представление (1.5). Зададим оператор $B_2 u$, $u \in X_o$ равенством

$$(B_2 u, v) = (\operatorname{diag}A_2 u_2, v_2) + (A_2 u_1, v_1), \quad \forall v \in X_o. \qquad (1.10)$$

Этот оператор используем как переобуславливатель для A_2 в случае двух пространственных переменных.

В трехмерном случае, наряду с $Y_1 = {}_4L_{KI,3}$, определим еще два пространства. Пусть $\Gamma_i = \bigcup_{k=1}^{6}\Gamma_i^k$, $\partial\Gamma_i^k = \bigcup_{m=1}^{4}\Gamma_i^{km}$. На каждом ребре Γ_i^{km} определим пространство функций $X_i^{km} = \overset{\circ\circ}{H}{}^{1/2}(\Gamma_i^{km})$. Далее каждой функции $u \in X_i^{km}$ (назовем ее образующей функцией) можно сопоставить четыре функции $\bar u_j$, $j = \overline{1,4}$, определенные на четырех гранях, имеющих общее ребро Γ_i^{km}. Они являются линейным продолжением функции u на эти грани, имеют след u на ребре Γ_i^{km} и равны нулю на оставшихся трех ребрах каждой грани, имеющей ребро Γ_i^{km}. Если продолжить функцию $\bar u_j$, $j = \overline{1,4}$ на остальную часть границы Γ_I нулем, то полученные таким образом функции образуют, по определению, пространство $\bar X_i^{km}$. Положим

$$Y_2 = \sum \oplus \bar X_i^{km}, \qquad (1.11)$$

где сумма распространяется на все внутренние ребра Γ_i^{km} границы Γ_I.

Рассмотрим для каждой области Ω_i множество функций $u \in W_2^1(\Omega_i)$, таких, что след $\gamma_i u$ равен нулю на всех Γ_i^k, $k = \overline{1,6}$, кроме одного значения индекса $k = k_o$. Множество следов таких функций, определенных на части границы $\Gamma_i^{k_o}$, обозначим $\overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma_i^{k_o})$. Положим

$$Y_3 = \sum_{i\in I_B} \oplus \Big(\sum_{k=1}^{6} \oplus \overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma_i^k)\Big). \qquad (1.12)$$

Определим пространство

$$Y_o = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3. \qquad (1.13)$$

Имеет место

Лемма 1. Справедливо вложение $Y_o \subset X_B$.

Вложение компонент Y_1 и Y_3 очевидно. Для компоненты Y_2 достаточно установить, что для $\forall u \in Y_2$ ее сужение на Γ_i, $i \in I_B \cup I_W$ вложено в пространство $W_2^{1/2}(\Gamma_i)$, т.к. в этом случае, согласно /27/, для гармонической в Ω_i функции $\bar u$, такой, что $\gamma_i \bar u = u$ на Γ_i, выполнено $\|\bar u\|_{W_2^1(\Omega_i)} \le c\|u\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)}$. Пусть $\bar u_j \in \bar X_i^{km}$. Как нетрудно показать (см. лемму 5), выполнено $\|\bar u_j\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)} \le c\|\gamma_i \bar u_j\|_{\overset{\circ\circ}{H}{}^{1/2}(\Gamma_i^{km})}$, поэтому, учитывая включение $\gamma_i \bar u_j \in \overset{\circ\circ}{H}{}^{1/2}(\Gamma_i^{km})$, завершаем доказательство леммы.

В трехмерном случае представим оператор $S_{\Delta,i}^{-1}$ в блочном виде, аналогично (1.5):

$$S_{\Delta,i}^{-1} = \{S_i^{km}\}, \quad k,m = \overline{1,6} \qquad (1.14)$$

в соответствии с разбиением границы $\Gamma_i = \bigcup_{k=1}^{6}\Gamma_i^k$, при соответствующей модификации для приграничных подобластей Ω_i. Определим оператор

$$\operatorname{diag} A_3 = M_B \cdot \sum_{i\in I_B} \oplus \Big(\sum_{k=1}^{6} \oplus S_i^{kk}\Big) + M_W \cdot \sum_{i\in I_W} \oplus\Big(\sum_{k=1}^{6} \oplus S_i^{kk}\Big),$$

после чего переобуславливатель $B_3 u$, $u = u_1 + u_2 + u_3$, $u_i \in Y_i$, $i = \overline{1,3}$ зададим равенством

$$(B_3 u, v) = (A_3 u_1, v_1) + (A_3 u_2, v_2) + (\operatorname{diag} A_3 u_3, v_3) \qquad (1.15)$$

для $\forall v \in Y_o$, где A_3 определен в (1.3) при $N = 3$.

Приведем некоторые определения. Если $X = X_1 \oplus X_2$ есть прямая сумма некоторых гильбертовых пространств X_1 и X_2, то определим числа

$$\alpha(X, X_1) = \sup \alpha \ge 0, \quad \alpha(X, X_2) = \sup \beta \ge 0, \qquad (1.16)$$

таких, что

$$\alpha\|x_1\|^2 + \beta\|x_2\|^2 \le \|x_1 + x_2\|^2, \quad \forall x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2. \qquad (1.17)$$

Аналогично определим величины $\alpha(X, X_i)$, $i = \overline{1,k}$, где $X = \sum_{i=1}^{k} \oplus X_i$, X_i — гильбертовы пространства. Эти определения аналогичны понятию раствора гильбертовых пространств. Перейдем к оценкам для переобуславливателей B_2 и B_3.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ B_2 И B_3

Начнем с двумерного случая. Для функции $v \in X_{2,i}$, заданной на Γ_i^k, $k = \overline{1,4}$, определим функционалы (аналогично /27/)

$$\bar{f}_k(v) = \Big(\int_{a_0}^{a_1} v^2(x)\Big(\frac{1}{|x-a_0|}+\frac{1}{|x-a_1|}\Big)dx\Big)^{1/2}, \quad x\in\Gamma_i^k,$$

где a_0, a_1 — концы отрезка Γ_i^k. Далее для функции $u_i = \sum_{k=1}^{4} \oplus u_i^k \in X_{2,i}$ определим

$$f_i^2(u_i) = \sum_{k=1}^{4} \bar{f}_k^2(u_i^k). \tag{2.1}$$

Используем некоторые характеристики пространства X_2. Пусть справедливы следующие гипотезы: $H1$. Существует константа $g(X_2) > 0$, такая, что для всякой функции $u \in X_0$, удовлетворяющей условию $u(\xi_0) = 0$ для некоторой точки $\xi_0 \in \Gamma_i$, справедливо неравенство

$$\|u\|^2_{L^\infty(\Gamma_i)} \le g(X_2)\cdot\int_{\Omega_i} |\nabla\bar{u}|^2 dx. \tag{2.2}$$

Здесь и далее через $\bar{u}$ обозначаем гармоническую в области Ω_i функцию, имеющую след u на Γ_i. $H2$. Для всякой функции $u\in X_2$ справедливо неравенство

$$\bar{f}_k^2(u_i^k) \le \epsilon(X_2)\cdot\max_{x\in\Gamma_i^k}|u_i^k|^2, \tag{2.3}$$

где Γ_i^k пробегает все внутренние ребра, а число $\epsilon(X_2) > 0$.

Сформулируем несколько следствий из гипотез $H1, H2$, необходимых в дальнейшем. Их доказательства приведем в § 3.

Лемма 2. Пусть для пространства X_2 справедлива гипотеза $H1$. Тогда выполнены неравенства

$$\alpha(X_0, X_1) \ge c(1+g(X_2))^{-1}; \ \alpha(X_0, X_2) > c(1+g(X_2))^{-1}, \tag{2.4}$$

где константа c определяется лишь формой областей Ω_i.

Лемма 3. Пусть выполнены гипотезы $H1, H2$. Тогда для всяких функций $u_L \in X_1$ и $u_{2,i} \in X_{2,i}$ справедлива оценка

$$f_i^2(u_{2,i}) \le c\cdot g(X_2)\cdot\epsilon(X_2)\int_{\Omega_i}|\nabla(\bar{u}_{2,i}+\bar{u}_L)|^2\,dx. \tag{2.5}$$

Обозначим далее интеграл Дирихле $\int_{\Omega_i}|\nabla\bar{u}|^2 dx$ от функции $\bar{u}$, определенной на Ω_i, через $A_i(u)$.

Теорема 1. Пусть выполнены гипотезы $H1$, $H2$, тогда для переобуславливателя B_2, определенного в (1.10), справедлива оценка

$$c_1(A_2u,u) \le (B_2u,u) \le c_2(1+g(X_2))(1+\epsilon(X_2))(A_2u,u) \tag{2.6}$$

для $\forall u \in X_0$. Константы c_1, c_2 зависят лишь от формы областей Ω_i.

Доказательство. Положим $u = u_L + u_2$, $u_L \in X_1$, $u_2 \in X_2$ и используем представление

$$(A_2u,u) = \sum_{i=1}^{M}\mu_i A_i(u_{L,i}+u_{2,i}). \tag{2.7}$$

В силу неравенства треугольника, неравенства Пуанкаре и теоремы о следах функций из $W_2^1(\Omega_i)$ /27/ на липшицевых поверхностях, получаем

$$(A_2u,u) \le c\sum_{i=1}^{M}\mu_i(A_i(u_{L,i}) + \|\bar{u}_{2,i}\|^2_{W_2^1(\Omega_i)}) \le \tag{2.8}$$

$$\le c\sum_{i=1}^{M}\mu_i(A_i(u_{L,i}) + \|u_{2,i}\|^2_{V_i^{1/2}}).$$

С другой стороны, для B_2 имеем

$$(B_2u,u) = \sum_{i=1}^{M}\mu_i A_i(u_{L,i}) + \sum_{i\in I_B}\mu_i\sum_{k=1}^{4}(S_i^{kk}u_{2,i}^k, u_{2,i}^k) +$$

$$+\sum_{i\in I_W}\mu_i\sum_{k=1}^{4}(S_i^{kk}(Tu_2)_i^k, (Tu_2)_i^k) = \tag{2.9}$$

$$= \sum_{i=1}^{M}\mu_i(A_i(u_{L,i}) + \sum_{\substack{k=1,\\ i\in I_B}}^{4} A_i(u_{2,i}^k) + \sum_{\substack{k=1,\\ i\in I_W}}^{4} A_i([Tu_2]_i^k)) \ge$$

$$\ge c\sum_{i=1}^{M}\mu_i(A_i(u_{L,i}) + \sum_{k=1}^{4}\|u_{2,i}^k\|^2_{\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\Gamma_i^k)}).$$

Применяя ко второму слагаемому из (2.8) неравенство треугольника и используя (2.9), получаем

$$c(A_2u,u) \le (B_2u,u), \quad \forall u\in X_0,$$

где константа c не зависит от $\bar{\mu}_0 \in R^M$.

Рассмотрим оценку сверху для $(B_2 u, u)$. Используя неравенство следов, из представления (2.9) получаем

$$(B_2 u, u) \le c \sum_{i=1}^{M} \mu_i (A_i(u_{L,i}) + $$

$$+ \sum_{k=1}^{4} \| u^k_{2,i} \|^2_{\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\Gamma^k_i)}).$$

С другой стороны, в силу [27], имеем

$$\| u^k_{2,i} \|^2_{\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\Gamma^k_i)} \le c(\| u^k_{2,i} \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma^k_i)} + \bar{f}^2_k(u^k_{2,i}))$$

для $k = \overline{1,4}$, откуда, используя неравенство [27]

$$\sum_{k=1}^{4} \| u^k_{2,i} \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma^k_i)} \le c \| u_{2,i} \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)}, \tag{2.10}$$

получим оценку

$$\mu_i \sum_{k=1}^{4} \| u^k_{2,i} \|^2_{\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\Gamma^k_i)} \le c\mu_i(\| u_{2,i} \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)} + f^2_i(u_{2,i})). \tag{2.11}$$

Согласно представлению (2.7) и лемме 2, для формы $(A_2 u, u)$ справедлива оценка снизу

$$(1 + g(X_2))(A_2 u, u) \ge c \sum_{i=1}^{M} \mu_i (A_i(u_{L,i}) + A_i(u_{2,i})).$$

В силу того, что $u_{2,i}(a_k) = 0$, где a_k — вершины прямоугольников, из неравенства (2.10) следует

$$A_i(u_{2,i}) \ge c \| \bar{u}_{2,i} \|^2_{W_2^1(\Omega_i)} \ge$$

$$\ge c \| u_{2,i} \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)} \ge c \sum_{k=1}^{4} \| u_{2,i} \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma^k_i)}, \tag{2.12}$$

Теперь, суммируя неравенство (2.11) по i и учитывая (2.12), получим оценку

$$c(B_2 u, u) \le (1 + g(X_2))(A_2 u, u) + \sum_{i=1}^{M} \mu_i f^2_i(u_{2,i}), \tag{2.12'}$$

из которой, согласно лемме 3, следует неравенство

$$(B_2 u, u) \le c(1 + g(X_2))(1 + \epsilon(X_2))(A_2 u, u)$$

для $u \in X_o$, что и требовалось доказать.

Перейдем к оценкам для формы $(B_3 u, u)$. Пусть заданы некоторые подпространства $\bar{Y}_2 \subset Y_2$ и $\bar{Y}_3 \subset Y_3$. Обозначим $Y_o = Y_1 \oplus \bar{Y}_2 \oplus \bar{Y}_3$ и определим числа

$$\alpha_{1,0} = \alpha(Y_1, Y_0), \quad \alpha_{2,2+3} = \alpha(\bar{Y}_2, \bar{Y}_2 \oplus \bar{Y}_3), \tag{2.13}$$

где норма в (1.17), (1.18), эквивалентная определяемой выражением $\|\cdot\|_X$ из (1.4), задается равенствами $\| u \|^2_{V_i^{1/2}} = A_i(u)$, $i = \overline{1,M}$.

Замечание 2.1. Используемые далее подпространства $\bar{Y}_2$, $\bar{Y}_3$ таковы, что нормы в пространствах $W_2^{1/2}(\Gamma_i)$ (Γ_i — поверхность параллелепипеда), построенные согласно определению из [27], где в качестве конечного подпокрытия границы Γ_i выбираем объединение всевозможных пар смежных граней, эквивалентны нормам, использующим покрытия, включающие вершины Γ_i.

Для функции $v \in \bar{Y}_{3,i}$, заданной на гранях Γ^k_i, $k = \overline{1,6}$, $\Gamma^k_i = \{x_1, x_2 : 0 \le x_1 \le a,\ 0 \le x_2 \le b\}$, определим функционалы

$$\bar{f}_k(v) = \int_0^a \frac{\| v(x_1,x_2) \|^2_{(2)}}{x_1 |a - x_1|} dx_1 + \int_0^b \frac{\| v(x_1,x_2) \|^2_{(1)}}{x_2 |b - x_2|} dx_2,$$

где $\|\cdot\|^2_{(i)}$ — норма в L_2 по переменной x_i. Для функции $u_i = \sum_{k=1}^{6} \oplus u^k_i \in \bar{Y}_{3,i}$ определим функционал

$$f_i(u_i) = \sum_{k=1}^{6} \bar{f}_k(u^k_i). \tag{2.14}$$

Функционал $f_i(u_i)$ мажорирует функционал, используемый в [27] при формулировке условий склейки функций из пространств $W_2^{1/2}(\Gamma^k_i)$, $k = \overline{1,6}$ для каждой пары смежных граней.

Определим пространство $\overset{o}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma^k_i)$ функций $u \in W_2^{1/2}(\Gamma_i)$ таких, что $u(\xi) = 0$ для $\forall \xi \notin \Gamma^k_i$. Оно является трехмерным аналогом пространства $\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\Gamma^k_i)$. Условимся обозначать след функции $u \in Y_m$, $m = \overline{1,3}$ на границе Γ_i через $u_{m,i}$.

Теорема 2. Пусть пространства $\bar{Y}_2$ и $\bar{Y}_3$ таковы, что числа $\alpha_{1,0}$ и $\alpha_{2,2+3}$ положительны, тогда справедлива оценка

$$c_1(A_3u,u) \le (B_3u,u) \le c_2\Big[\sum_{i=1}^{M}\mu_i f_i^2(u_{3,i}) +$$

$$+ (1+\alpha_{1,0}^{-1})(1+\alpha_{2,2+3}^{-1})(A_3u,u)\Big]. \qquad (2.15)$$

Доказательство первого из неравенств (2.15) следует из оценок, аналогичных (2.8), (2.9)

$$(B_3u,u) \ge c\sum_{i=1}^{M}\mu_i\Big(A_i(u_{1,i}) + A_i(u_{2,i}) + \sum_{k=1}^{6}\|u_{3,i}^k\|^2_{\overset{\circ\circ}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma_i^k)}\Big),$$

$$(A_3u,u) \le c\sum_{i=1}^{M}\mu_i\Big(\sum_q A_i(u_{q,i})\Big),$$

и неравенства треугольника. Далее, согласно замечанию 3.1, имеем

$$\alpha_{2+3,0} \ge (1+\alpha_{1,0}^{-1})^{-1}, \qquad \alpha_{3,2+3} \ge (1+\alpha_{2,2+3}^{-1})^{-1},$$

поэтому справедлива оценка

$$(1+\alpha_{1,0}^{-1})(1+\alpha_{2,2+3}^{-1})(A_3u,u) \ge c\sum_{i=1}^{M}\mu_i\Big(\sum_{q=1}^{3}A_i(u_{q,i})\Big), \qquad (2.16)$$

в то время как

$$(B_3u,u) \le c\sum_{i=1}^{M}\mu_i\Big(\sum_{q=1}^{2}A_i(u_{q,i}) + \sum_{k=1}^{6}\|u_{3,i}^k\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma_i^k)}\Big). \qquad (2.17)$$

Применяя результаты о склейке функций из W_2^r, $0 < r < 1$ для двух смежных граней параллелепипедов [27], получим для $u_{3,i} \in \bar{Y}_3$

$$A_i(u_{3,i}) \ge c\|\bar{u}_{3,i}\|^2_{W_2^1(\Omega_i)} \ge c\|u_{3,i}\|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)} \ge$$

$$\ge c\sum_{k=1}^{6}\|u_{3,i}^k\|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i^k)},$$

$$\|u_{3,i}^k\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma_i^k)} \le c\big(\|u_{3,i}^k\|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i^k)} + \bar{f}_k^2(u_{3,i}^k)\big)$$

для $k = \overline{1,6}$. Суммируя последнее неравенство по k, получим

$$\mu_i\sum_{k=1}^{6}\|u_{3,i}^k\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma_i^k)} \le c\mu_i\big(\|u_{3,i}\|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)} + f_i^2(u_{3,i})\big). \qquad (2.18)$$

Суммируя по i неравенство (2.18) и сравнивая результат с оценками (2.16), (2.17), находим

$$(B_3u,u) \le c(1+\alpha_{1,0}^{-1})(1+\alpha_{2,2+3}^{-1})(A_3u,u) + c\sum_{i=1}^{M}\mu_i f_i^2(u_{3,i}),$$

что и доказывает теорему.

Сформулируем аналоги гипотез H1, H2 для трехмерного случая:

G1. Существует константа $g(Y_0) > 0$, такая, что для всякой функции $u \in Y_0$, удовлетворяющей условию $u(\xi_0) = 0$, $\xi_0 \in \Gamma_i$, справедливо неравенство

$$\|u\|^2_{L^\infty(\Gamma_i)} \le g(Y_0)\int_{\Omega_i}|\nabla\bar{u}|^2\,dx.$$

G2. Для всякой функции $u_i \in \bar{Y}_3$ справедливо неравенство

$$\bar{f}_k^2(u_i^k) \le \epsilon(\bar{Y}_3)\max_{x\in\Gamma_i^k}|u_i^k|^2$$

с единой константой $\epsilon(\bar{Y}_3) > 0$ для всех внутренних ребер Γ_i^k.

Используем также гипотезу G3. Существует константа $\kappa_0(\bar{Y}_2) > 0$, такая, что для всякой функции $u_2 \in \bar{Y}_2$ справедлива оценка

$$\|v_i^k\|^2_{\overset{\circ\circ}{H}{}^{1/2}(\ell_i^k)} \le \kappa_0(\bar{Y}_2)\|v_i^k\|^2_{L^\infty(\ell_i^k)}$$

для всех внутренних ребер ℓ_i^k, где v_i^k – образующая функция для $u_{2,i}^{k_0}$, определенная на ребре $\ell_i^k \subset \Gamma_i^{k_0}$.

Лемма 4. Пусть выполнена гипотеза G1, тогда справедлива оценка

$$\min(\alpha_{1,0};\alpha_{2+3,0}) \ge c(1+g(Y_0))^{-1}.$$

Лемма 5. Пусть выполнены гипотезы G1, G3, тогда справедлива оценка

$$\min(\alpha_{3,2+3};\alpha_{2,2+3}) \ge c(1+\kappa_0(\bar{Y}_2)g(Y_0))^{-1}.$$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 2.1. Пусть выполнены гипотезы G1, G2, G3. Тогда для всякой $u \in Y_0$ справедлива оценка

$$(B_3u,u) \le c(1+g(Y_0))(\epsilon(\bar{Y}_3) + \kappa(\bar{Y}_2)g(\bar{Y}_0) + 1)(A_3u,u). \qquad (2.19)$$

Оценки констант $\epsilon(\bar{Y}_3)$, $\kappa(\bar{Y}_2)$, $g(Y_0)$ для некоторых конкретных подпространств $\bar{Y}_2$, $\bar{Y}_3$ рассмотрим в § 3. Здесь остановимся на задаче обращения операторов B_2 и B_3.

Решение уравнения

$$(B_2 u, v) = (f, v), \quad f \in X_0^*, \quad \forall v \in X_0 \tag{2.20}$$

проводим в два этапа. Находим функцию u_2 из уравнения

$$(\operatorname{diag} A_2 u_2, v) = (f, v), \quad \forall v \in X_2 \tag{2.21}$$

и функцию u_1 из уравнения

$$(A_2 u_1, v) = (f, v), \quad \forall v \in X_1. \tag{2.22}$$

Складывая (2.21) и (2.22) и учитывая представление (1.10), убеждаемся, что функция $u = u_1 + u_2$ есть решение уравнения (2.20).

Решение уравнения

$$(B_3 u, v) = (f, v), \quad \forall v \in Y_0 \tag{2.23}$$

сводится к решению следующих задач. Находим функции u_1, u_2, u_3 из уравнений

$$(\operatorname{diag} A_3 u_3, v) = (f, v), \quad \forall v \in \bar{Y}_3 \tag{2.24}$$

$$(A_3 u_2, v) = (f, v), \quad \forall v \in \bar{Y}_2 \tag{2.25}$$

$$(A_3 u_1, v) = (f, v), \quad \forall v \in \bar{Y}_1 \tag{2.26}$$

и, используя определение (1.15), убеждаемся, что функция $u = u_1 + u_2 + u_3$ есть решение уравнения (2.23). Задачи (2.22), (2.26) соответствуют конечноэлементным системам для серендиповых элементов первого порядка, образуемых разбиением области $\Omega = \bigcup_{i=1}^{M} \Omega_i$. Размерность соответствующей СЛАУ есть M.

Задачи (2.21) и (2.24) сводятся к независимому решению смешанных задач для оператора Лапласа в областях Ω_i, $i = \overline{1, M}$, когда на одной стороне (или грани) задано условие Неймана, а на всех оставшихся сторонах (или гранях) задано однородное условие Дирихле ($u_\Gamma = 0$). При выборе соответствующих подпространств X_2, $\bar{Y}_3$ такие задачи можно решить методом БПФ.

Для решения уравнения (2.25), в котором неизвестные определены только на внутренних ребрах, можно использовать обобщенный метод сопряженных градиентов с переобуславливателем $\operatorname{diag} A_{3,2}$, являющимся блочно-диагональной частью оператора A_3 из (2.25) (обозначим его $A_{3,2}$), где каждый блок соответствует неизвестным на одном из ребер. Обращение оператора $\operatorname{diag} A_{3,2}$ сводится к независимому решению в областях Ω_i, $i = \overline{1, M_I}$ смешанных краевых задач для оператора Лапласа в специальном классе функций (т.е. принадлежащих пространству $\bar{X}_i^{km}$). Другой переобуславливатель $B_{3,2}$ для системы (2.25) можно определить, аналогично /29/, по формуле

$$(B_{3,2} u, v) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i \int_{\Gamma_i} u(x) v(x)\, dx, \quad \forall v \in \bar{Y}_2.$$

Оценки для величины λ_0/λ_1, где

$$\lambda_0 (Fu, u) \le (A_{3,2} u, u) \le \lambda_1 (Fu, u), \quad \forall u \in \bar{Y}_2,$$

а F есть один из операторов $\operatorname{diag} A_{3,2}$ или $B_{3,2}$, можно получить на основе результатов § 3 для конкретных подпространств $\bar{Y}_2$. Более подробно эти вопросы рассмотрим в отдельной работе. Отметим, что можно использовать вариант алгоритма, не использующий компоненту $\bar{Y}_2$, т.е. $Y_0 = Y_1 \oplus \bar{Y}_3$, например для разрывных конечных элементов.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ И СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМ 1.2 ПРИ СПЕЦИАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ПРОСТРАНСТВ X_0, Y_0

Сначала сделаем одно замечание.

Замечание 3.1. Если известно неравенство $\alpha_{1,0} \ge a > 0$, то для числа $\alpha_{2+3,0}$ выполнена оценка $\alpha_{2+3,0} \ge (1 + a^{-1})^{-1}$.

Действительно, если $a \| x_1 \|^2 \le \| x_1 + x_2 \|^2$, $x_1 \in Y_1$, $x_1 + x_2 \in Y_0$, то $\| x_2 \|^2 \le \| x_1 + x_2 \|^2 + \| x_1 \|^2 \le (1 + a^{-1}) \| x_1 + x_2 \|$.

Докажем лемму 4, лемма 2 доказывается аналогично. В силу замечания 3.1 достаточно рассмотреть величину $\alpha_{1,0}$. Для данной области Ω_i представим функцию $u_L \in Y_1$ в виде $u_L = u_{L,0} + \mathrm{const}$, где $u_{L,0}(x_k) = 0$, а x_k – одна из вершин Ω_i. Так как $A_i(u + u_L) = A_i(u_{L,0} + u)$, то докажем лемму лишь для $u_L \equiv u_{L,0}$. Простые вычисления приводят к неравенству

$$A_i(u_L) \le c_1 \sum_{m=1;\, x_\alpha, x_\beta \in \ell_i^m}^{12} (u_L(x_\alpha) - u_L(x_\beta))^2, \tag{3.1}$$

где x_α, x_β – вершины Ω_i, принадлежащие одному из ребер ℓ_i^m, $m = \overline{1,12}$. Так как значения компоненты $z_2 = u_2 + u_3 \in \bar{Y}_2 \oplus \bar{Y}_3$ равны нулю в вершинах Ω_i, то из (3.1) следует

$$A_i(u_L) \le c_1 \sum_{m=1;}^{12} (u_L(x_\alpha) + u_2(x_\alpha) + u_3(x_\alpha) - u_L(x_\beta) - u_2(x_\beta) -$$

$-u_3(x_\beta))^2 \le c_2 \| u_L + u_2 + u_3 \|^2_{L^\infty(\Gamma_i)} \le c g(Y_0) A_i (u_L + u_2 + u_3)$,

поэтому $\alpha_{1,0} \ge c\, g(Y_0)^{-1}$, откуда следует лемма 4.

Докажем лемму 3. Согласно замечанию 3.1, положим $u_L \equiv u_{L,0}$. В силу гипотез H2 и H1 имеем для некоторого k_0

$$f_i^2(u_{2,i}) \le 4\epsilon(X_2) \| u^{k_0}_{2,i} \|^2_{L^\infty(\Gamma_i^{k_0})} \le$$
$$\le c\epsilon(X_2) \| u_{L,0} + u_{2,i} \|^2_{L^\infty(\Gamma_i)} \le \tag{3.2}$$
$$\le c\epsilon(X_2) g(X_2) A_i(u_{2,i} + u_L).$$

Второе из неравенств (3.2) вытекает из неравенства треугольника и оценки $\| u_{L,0} \|^2_{L^\infty(\Gamma_i)} \le \| u_{2,i} + u_{L,0} \|^2_{L^\infty(\Gamma_i)}$, следующей из того, что максимум левой части достигается в угловых точках x_k области Ω_i, а $u_{2,i}(x_k) = 0$. Лемма доказана.

Аналогично может быть доказана

Лемма 6. Пусть выполнены гипотезы G1, G2. Тогда для всяких функций $u_{3,i} \in \bar{Y}_3$, $u_{2,i} \in \bar{Y}_2$, $u_L \in Y_1$ выполнена оценка

$$f_i^2(u_{3,i}) \le c g(Y_0) \epsilon(\bar{Y}_3) A_i(u_{3,i} + u_{2,i} + u_L). \tag{3.3}$$

Докажем лемму 5. Рассмотрим величину $\alpha_{2,2+3}$. Не умаляя общности, предположим, что Ω_i — куб, и докажем необходимое неравенство для функции $u_i \in \bar{Y}_2$, отличной от нуля лишь на одном ребре ℓ_i^k границы Γ_i, к которому примыкают грани Γ_i^{k1} и Γ_i^{k2}. Снова используя результаты работы [27], получим

$$A_i(u_i) \le c \| \bar{u}_i \|^2_{W_2^1(\Omega_i)} \le c \| u_i \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)} \le$$
$$\le c \left(\sum_{j=1}^{2} \| u_i \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i^{k_j})} + f_1(u_i) + f_2(u_i) \right), \tag{3.4}$$

где функционал f_1 определен на гранях $\Gamma_i^{k_j}$, $j = 1,2$ (имеющих локальные координаты $\Gamma_i^{k1} = \{x,y : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$ и $\Gamma_i^{k2} = \{x,y : -a \le x \le 0,\ 0 \le y \le a\}$), по формулам

$$f_1(u_i) = \int_0^a\!\!\int_0^a (u_i^1(x,y) - u_i^2(-x,y))^2\, dy \frac{1}{x} dx, \tag{3.5}$$

где u_i^1 и u_i^2 — следы функции u_i на смежных гранях Γ_i^{k1} и Γ_i^{k2} соответственно. Функция f_2 имеет вид

$$f_2(u_i) = \int_0^a\!\!\int_0^a [(u_i^1(x,y))^2 + (u_i^2(-x,y))^2]\, dx \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{|y-a|}\right) dy +$$
$$+ \int_0^a\!\!\int_0^a [(u_i^1(x,y))^2 + (u_i^2(-x,y))^2]\, dy \frac{1}{|x-a|} dx. \tag{3.6}$$

Оценим слагаемые в (3.4) через норму $\| v \|^2_{W_2^{1/2}(\ell_i^k)}$ образующей функции $v(y) = u_i^1(0,y) \equiv u_i^2(0,y)$, где $u_i^1(x,y) = v(y) \times (1 - \frac{x}{a})$. Во-первых, величина $\| u_i^1 \|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_i^{k_1})}$ оценивается через норму $\| u_i^1 \|^2_{L_2(\Gamma_i^{k1})}$ и два слагаемых вида

$$I_m(u_i^1) = \int_0^a\!\!\int_0^a\!\!\int_0^a (u_i^1(x,\xi) - u_i^1(x,\eta))^2\, dx \frac{1}{(\xi-\eta)^2} d\xi\, d\eta, \tag{3.7}$$

где $m = 1$ соответствует переменной x, а $m = 2$ — переменной y. Простые вычисления приводят к следующим выражениям:

$$\| u_i^1 \|^2_{L_2(\Gamma_i^{k1})} = \frac{a}{3} \| v \|^2_{L_2(\ell_i^k)},$$

$$I_1(u_i^1) = \int_0^a\!\!\int_0^a \frac{(v(\xi) - v(\eta))^2}{(\xi-\eta)^2} d\xi\, d\eta \cdot \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx,$$

$$I_2(u_i^1) = \frac{a}{3} \| v \|^2_{L_2(\ell_i^k)}.$$

Во-вторых, отметим, что для функционала вида (3.5) (который для куба равен нулю) в общем случае справедлива оценка

$$f_1 \le \int_0^a v^2(y)\, dy \cdot \int_0^{\min(b_1, b_2)} \frac{1}{x}\left(x\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right)\right)^2 dx \le c \| v \|^2_{L_2(\ell_i^k)}.$$

В-третьих, первая группа слагаемых из (3.6) оценивается выражением вида

$$f^2(v) = \frac{a}{3} \int_0^a v^2(y) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{|y-a|}\right) dy,$$

а вторая группа величиной $c \| v \|^2_{L_2(\ell_i^k)}$. В итоге получаем неравенство

$$A_i(u_i) \le c(a\|v\|^2_{W_2^{1/2}(\ell_i^k)} + \|v\|^2_{L_2(\ell_i^k)} +$$

$$+ a\cdot\int_0^a v^2(y)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{|a-y|}\right)dy). \tag{3.8}$$

Замечаем, что правая часть неравенства (3.8) оценивается величиной $c\times$ $\times \|v\|^2_{\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\ell_i^k)}$, поэтому, применяя к (3.8) гипотезу G3, получим оценку

$$A_i(u_i) \le c\cdot\max(1,a)\,\kappa_o(\bar{Y}_2)\,\|v\|^2_{L^\infty(\ell_i^k)}. \tag{3.9}$$

Применяя к правой части (3.9) гипотезу G1, получим

$$a_{2,2+3} \ge cg(Y_o)^{-1}\kappa_o(\bar{Y}_2)^{-1},$$

что вместе с замечанием 3.1 доказывает лемму 5.

Перейдем к оценкам констант $g(X_2)$, $\epsilon(X_2)$, $g(Y_o)$, $\epsilon(\bar{Y}_3)$, $\kappa_o(\bar{Y}_2)$ для некоторых конкретных конечномерных подпространств. Начнем с двумерного случая. Пусть подпространство $X_{2,h} \subset X_2$ состоит из кусочно-линейных на Γ_i, $i=\overline{1,M}$ функций с нулями в вершинах четырехугольников Ω_i. Пусть каждая Γ_i^k разбита на $n_{i,k}+1$ отрезков Δ_j, $j=\overline{0,n_{i,k}}$, так что для всех i и k существуют константы c_o, c_1, не зависящие от $h>0$, что $c_o h \le |\Delta_j| \le c_1 h$ для $\forall j$. Определим подпространства

$$X_{i,k} = \{u\in C(\bar{\Gamma}_i^k),\ u|_{\Delta_j}\in P_1(x);\ u(x)=0,\ x\in\partial(\Gamma_i^k)\}, \tag{3.10}$$

где $P_1(x)$ есть множество линейных полиномов. Пространство $X_{2,h}$ определяем как

$$X_{2,L} = \sum_i \oplus X_{2,i},\qquad X_{2,i} = \sum_{k=1}^{4}\oplus X_{i,k}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим еще одно пространство $X_{2,S}$ вида (3.11), которое удобно использовать лишь для прямоугольных областей. На каждом отрезке Γ_i^k функции из $X_{2,S}$ в локальных координатах имеют вид $\{\sin\frac{\pi p x}{\ell_i^k}\}$, $p=1,\dots,n_{i,k}$, ℓ_i^k – длина ребра Γ_i^k. Для обоих пространств обозначим $n_i = \max_k n_{i,k}$, $n_M = \max_i n_i$, где $n_{i,k} = \dim(X_{i,k})$. Пространство $X_{2,h}$ удобно при использовании конечно-элементной аппроксимации функций, гармонических внутри областей Ω_i.

Лемма 7. Пусть константы $\epsilon(X_2)$ и $g(X_2)$ определены согласно гипотезам H1, H2 для каждого из пространств $X_{2,h}$ и $X_{2,S}$. Тогда справедливы оценки

$$\epsilon(X_2) \le c(1+\ln n_M), \tag{3.12}$$

$$g(X_2) \le c(1+\ln n_M), \tag{3.13}$$

где константа c не зависит от n_M.

Докажем лемму для пространства $X_{2,h}$. Отметим, что $n_i = O(d/h)$, где $d = \max_{k,i}\ell_i^k$. Для $u\in X_{2,i}$ имеем

$$\int_0^d \frac{u^2(x)}{x}dx = \int_0^{h_1}\frac{u^2}{x}dx + \int_{h_1}^d \frac{u^2}{x}dx \le \max_{x\in\ell_i^k}|u|^2\left(1+\ln\frac{d}{h_1}\right),$$

откуда следует неравенство (3.13). Для доказательства оценки (3.12) построим регулярную триангуляцию [31] $\Omega_{h,i}$ ячейки Ω_i с шагом h и элементами e_j, согласованную с выбранным разбиением сторон ячейки. Построим конечно-элементное пространство

$$V_h(\Omega_i) = \{v\in C(\bar{\Omega}_i):\ v|_{e_j}\in P_1(x),\ v(x)=0,\ x\in\partial(\Gamma_i^k)\},$$

где $P_1(x)$ – множество линейных полиномов. Рассмотрим решение u_h задачи

$$\int_{\Omega_i}(\nabla u_h,\nabla z)\,dx = 0,\quad u_h(x)=u(x),\quad x\in\Gamma_i$$

$$\forall z\in V_h(\Omega_i).$$

Для функции u_h, согласно [32], справедливо неравенство

$$\max_{x\in\Omega_i}|u_h|^2 \le c\left(1+\ln\frac{d}{h}\right)\|u_h\|^2_{H^1(\Omega_i)}. \tag{3.14}$$

С другой стороны, для погрешности решения u_h справедлива оценка [31]

$$\|u_h - \bar{u}\|_{H^1(\Omega_i)} \le c\|\bar{u}\|_{H^1(\Omega_i)}, \tag{3.15}$$

где $\bar{u}$ – гармоническая в Ω_i функция, для которой $\bar{u}|_{\Gamma_i} = u\in X_{2,i}$. Из неравенства треугольника и (3.15) следует

$$\|u_h\|^2_{H^1(\Omega_i)} \le \|\bar{u}-u_h\|^2_{H^1} + \|\bar{u}\|^2_{H^1} \le (1+c)\|\bar{u}\|_{H^1(\Omega_i)},$$

что вместе с (3.14) устанавливает оценку (3.12).

Оценка (3.13) для пространства $X_{2,S}$ вытекает из неравенства

$$\int_0^d \frac{u^2(x)}{x}dx \le \max_{x\in\Gamma_i^k}|u|^2\left(\ln\frac{d}{\epsilon} + \epsilon^2\frac{n_i^2}{d^2}\right), \tag{3.16}$$

справедливого в силу соотношения $|u'(x)| \le n_i d^{-1} |u(x)|, \quad x \in \Gamma_i^k$, $u \in X_{2,S}$. Полагая в (3.16) $\epsilon = dn_i^{-1}$, приходим к (3.13). Для получения (3.12) воспользуемся более общим утверждением об оценках типа (2.2), справедливым и в трехмерном случае. Пусть задано множество Z_i функций $u(x)$, $x \in \Omega_i$, $\Omega_i \in R^N$, $N = 2{,}3$, для которых существует кусочно-непрерывный вектор $\nabla u(x)$, $x \in \bar{\Omega}_i$, и $\max\limits_{x \in \Omega_i} |u(x)|$ достигается на границе. Предположим, что выполнена гипотеза F1. Для всякой функции $u \in Z_i$ справедлива оценка

$$h^{-1} |\nabla u(x)| \le c\, |u(x)|, \quad x \in \bar{\Omega}_i, \tag{3.17}$$

где константа c не зависит от параметра $h > 0$.

При $N = 3$, так же как и при $N = 2$, параметр $h > 0$ характеризует некоторую триангуляцию границы Γ_i при построении конечномерных подпространств пространства $\bar{Y}_2 \oplus \bar{Y}_3$. Точные определения дадим при анализе трехмерного случая.

Лемма 8. Пусть для множества функций Z_i при $N = 2{,}3$ выполнена гипотеза F1 и $\exists \xi_0 \in \Gamma_i$, такая, что $u(\xi_0) = 0$. Тогда для $u(x)$ справедлива оценка

$$\max_{x \in \Gamma_i} |u|^2 \le c\left(1 + \ln \frac{d}{h}\right) \int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 dx, \tag{3.18}$$

где константа c не зависит от h.

Приведем доказательство для трехмерного случая. Пусть в точке $y_0 \in \Gamma_i$ достигается $\max\limits_{x \in \Gamma_i} |u|^2$. Положим $y_0 = 0$. Используя теоремы анализа, имеем

$$u(0) = u(y) - \int_0^{|y|} (\nabla u(t \cdot \nu), \nu)\, dt, \quad y \in \Omega_i, \tag{3.19}$$

где $\nu = y(|y|)^{-1}$. Рассмотрим конус G с вершиной в точке $y_0 = 0$, телесным углом ω и огибающей поверхностью, лежащей на части сферы радиуса $|y|$, такой, что $G = \omega \times [0, |y|]$. Интегрируя равенство (3.19) по углу ω, получим (полагаем $\xi = t \cdot \nu(\theta)$, $\theta \in \omega$, $d\xi = t \cdot dt d\theta$, $\gamma = \gamma(\omega)$ — величина телесного угла ω):

$$\begin{aligned} \gamma |u(0)| \le{} & \left| \int_\omega u(y(\theta))\, d\theta \right| + \\ & + \left| \int_\omega \int_0^{\delta h} \left(\nabla u(\xi), \frac{\xi}{t}\right) dt\, d\theta \right| + \\ & + \left| \int_{\omega \times [\delta h, |y|]} \left(\nabla u(\xi), \frac{\xi}{|\xi|^2}\right) d\xi \right| . \end{aligned} \tag{3.20}$$

В силу (3.17) для второго слагаемого имеем оценку

$$\le |\nabla u(\xi)| \cdot \gamma(\omega) \cdot \delta h \le c\, \gamma\, \delta \cdot |u(0)|.$$

Если положить в ней $c \cdot \gamma \cdot \delta = \gamma/2$, т.е. $\delta = (2c)^{-1}$, то второе слагаемое в (3.20) можно перенести в левую часть. К оставшимся слагаемым в (3.20) применим неравенство Шварца и учтем, что $|y| \le cd$:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} |u(0)| \le{} & \gamma^{1/2} \left(\int_\omega |u(y(\theta))|^2 d\theta \right)^{1/2} + \\ & + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_i)} \cdot \left(\int_{\omega \times [\delta h, |y|]} |\xi|^{-2} d\xi \right)^{1/2} = \\ & = \gamma^{1/2} \|u(|y|, \theta)\|_{L_2(\omega)} + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_i)} \left(\int_\omega \int_{[\delta h, |y|]} t^{-1} dt\, d\theta \right)^{1/2} \le \\ & \le c \gamma^{1/2} \left(\|u(|y|, \theta)\|_{L_2(\omega)} + \left(\ln \frac{d}{h}\right)^{1/2} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_i)} \right). \end{aligned}$$

Возводя последнее неравенство в квадрат, умножая обе части на t и интегрируя по dt от 0 до $|y| \le cd$, получим

$$|u(0)|^2 \le c\left(d^{-1} \|u\|^2_{L_2(\Omega_i)} + \ln\left(\frac{d}{h}\right) \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_i)}\right). \tag{3.21}$$

Поскольку функция $u(x)$ такова, что $u(\xi_0) = 0$, $\xi_0 \in \Gamma_i$, то применим к (3.21) неравенство Пуанкаре в виде

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega_i)} \le cd^2 \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_i)},$$

что и завершает доказательство леммы 8. Отметим, что для используемых нами областей для всякой точки $x_0 \in \Gamma_i$ и всякой $y \in \Omega_i$ существует определенный ранее конус G с телесным углом $\gamma(\omega)$ больше некоторой фиксированной константы для всех областей Ω_i, $i = \overline{1, M}$. При $N = 2$ лемма, аналогичная лемме 8, имеется в /28/.

Продолжая доказательство оценки (3.12) для подпространства $X_{2,S}$, воспользуемся леммой 8. Простой проверкой убеждаемся, что для функции $u \in X_{2,S}$ выполнена гипотеза F1 с константой $h = dn_i^{-1}$ для области Ω_i, после чего неравенство (3.12) следует из леммы 8. Лемма 7 полностью доказана.

Следствие 3.1. Если в качестве подпространства X_2 использовать любое из пространств $X_{2,h}$ или $X_{2,S}$, то оценка сверху в теореме 1 принимает вид

$$(B_2 u, u) \le c\,(1 + (\ln n_M)^2)\,(A_2 u, u), \tag{3.22}$$

где $n_M = \max n_{i,k}$, а c не зависит от n_M.

Перейдем к анализу трехмерного случая.

В качестве Y_2 выберем подпространство $Y_{2,h}$ функций, для которых множество образующих функций $u \in \overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\Gamma_i^{km})$ принадлежит пространству вида $X_{i,k}$, определенному в (3.10), где под Γ_i^k следует понимать внутренние ребра. Через $n_{2,M}$ обозначим число $n_{2,M} = \max \dim (X_{i,k})$, где максимум берется по всем внутренним ребрам.

Рассмотрим подпространство $\bar{Y}_3$. На каждой внутренней грани Γ_i^k построим регулярную триангуляцию/31/ $\Gamma_{i,h}^k$ с шагом h_3 и элементами e_j. Построим конечно-элементное пространство

$$V_{i,h}^k(\Gamma_i^k) = \{v \in C(\bar{\Gamma}_i^k) : v|_{e_j} \in P_1(x);\ v(x) = 0,\ x \in \partial(\Gamma_i^k)\}, \tag{3.23}$$

где $P_1(x)$ – множество линейных полиномов. Наряду с $V_{i,h}^k$ можно использовать пространство $U_{i,h}^k$, построенное на основе серендиповых элементов e_j, так что

$$U_{i,h}^k(\Gamma_i^k) = \{v \in C(\bar{\Gamma}_i^k) : v|_{\partial e_j} \in P_1(x);$$
$$\Delta v(x) = 0,\ x \in e_j;\quad v(x) = 0,\ x \in \partial(\Gamma_i^k)\} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma_i^k). \tag{3.24}$$

Пусть Δ_j – отрезки, образующие разбиение на ребрах грани Γ_i^k. Предположим, что для обоих разбиений (3.23) и (3.24) проекция элементов $e_j \in \Gamma_i^k$ на ребра грани Γ_i^k пересекается не более чем с одним замкнутым отрезком Δ_j.

Пространство $Y_{3,h}$ определяем по формуле (1.12), где вместо слагаемых $\overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}(\Gamma_i^k)$ следует использовать любое из подпространств $V_{i,h}^k$ или $U_{i,h}^k$.

Оценим константы $g(Y_o)$, $\epsilon(Y_{3,h})$, $\kappa_o(Y_{2,h})$, определенные в гипотезах G1, G2, G3.

Лемма 9. Для подпространства $Y_o = Y_{3,L} \oplus Y_{2,h} \oplus Y_{3,h}$ выполнены оценки

$$g(Y_o) \le c\,(1 + \ln d/h_o), \tag{3.25}$$

$$\epsilon(Y_{3,h}) \le c\,d\,(1 + \ln d/h_3), \tag{3.26}$$

где $h_o = \min(h_2, h_3)$, а константа c не зависит от h_o.

Оценка (3.26) получается аналогично двумерному случаю. Для оценки константы $g(Y_o)$ используем лемму 8 и идеи доказательства леммы 7. Рассмотрим, например, подпространство $V_{i,h}^k$ вида (3.23). Построим регулярную триангуляцию/31/ $\Omega_{i,h}$ области Ω_i, согласованную с разбиением граней $\Gamma_{i,h}^k$, $k = \overline{1,6}$ и рассмотрим множество $V_h(\Omega_i)$ конечных элементов первого порядка на $\Omega_{i,h}$, определяемых аналогично (3.23). Пусть $u \in Y_{3,h}$, а u_h есть решение задачи

$$\int_{\Omega_i} (\nabla u_h, \nabla z)\,dx = 0,\quad u_h(x) = u(x),\quad x \in \Gamma_i,$$

$\forall z \in V_h(\Omega_i)$.

Для функции u_h выполнена гипотеза F1. Поэтому, согласно лемме 8, для u_h справедлива оценка (3.18). Согласно /31, 19/, для погрешности решения u_h выполнена оценка вида (3.15), откуда и следует (3.25).

Лемма 10. Для подпространства $Y_{2,h}$ справедлива оценка

$$\kappa_o(Y_{2,h}) \le c\cdot(n_{2,M} + d_1(1 + \ln n_{2,M})), \tag{3.27}$$

где $d_1 = \max(1, d)$.

Для доказательства леммы используем следующую норму пространства $\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(R_i^k)$ /19/

$$\|u\|^2_{\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(R_i^k)} = \int_0^\ell\!\!\int_0^\ell \left(\frac{u(x) - u(y)}{x - y}\right)^2 dx\,dy + \int_0^\ell u^2 dx + \ell \int_0^\ell \frac{u^2}{x(\ell - x)}dx, \tag{3.28}$$

где R_i^k – некоторое ребро грани Γ_i^k, а ℓ – длина отрезка R_i^k. Аналогично /19/, рассмотрим пространство $X_{i,k} \equiv \overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\tilde{\omega}_h)$, определенное на неравномерной сетке $\tilde{\omega}_h$ со следующей нормой:

$$\|v\|^2_{\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\tilde{\omega}_h)} = \sum_{i=o}^{p} \hbar_i \sum_{j=o}^{p} \hbar_j \frac{(v_i - v_j)^2}{(t_i - t_j)^2} + \tag{3.29}$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} \hbar_i v_i^2 + \ell \sum_{i=1}^{p} \hbar_i \frac{v_i^2}{t_i(\ell - t_i)};\quad \tilde{\omega}_h \in R_i^k,$$

где $p = n_{i,k} + 1$, $\hbar_i = 0{,}5(\Delta_i + \Delta_{i+1})$, $i = \overline{1, n_{i,k}}$, $\hbar_o = \Delta_1$, $\hbar_p = \Delta_p$, $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$, $v_i = v(t_i)$, $t_o = 0$. Согласно /19/, при условии $c_o h \le \Delta_j \le c_1 h$ для всех j, нормы (3.28) и (3.29) эквивалентны на функциях $v \in \overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\tilde{\omega}_h)$. Оценивая величину $\kappa_o(Y_{2,h})$ в норме (3.29), простым вычислением устанавливаем неравенство

$$\|v\|^2_{\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\tilde{\omega}_h)} \le c\,(n_2 + d + 1 + \ln n_2),$$

где $n_2 = \max n_{i,k}$, $n_{i,k} = \dim(\overset{\infty}{H}{}^{1/2}(\tilde{\omega}_h))$, что и требовалось доказать.

Применим следствие 2.1 для построенного пространства.

Следствие 3.2. Для элементов u из пространства $Y_o = Y_{3,L} \oplus Y_{2,h} \oplus Y_{3,h}$ выполнена оценка

$$(B_3 u, u) \le c(1 + \ln n_M)^2 \, (n_2 + d_1(1 + \ln n_2))(A_3 u, u), \qquad (3.30)$$

где $n_M = \max(n_2, n_3)$. Если $Y_{2,L} = \emptyset$, т.е. $Y_o = Y_{3,L} \oplus Y_{3,L}$, то

$$(B_3 u, u) \le cd(1 + \ln n_3)^2 (A_3 u, u). \qquad (3.31)$$

Как видно из (3.30), логарифмическая зависимость величины $\lambda_1 = \max\limits_{u \in Y_o} \{(B_3 u, u)[(A_3 u, u)]^{-1}\}$ от размерности n_M имеет место при $n_2 \le O(\ln n_3)$, а при $n_2 = 0 \; (Y_{2,h} = \emptyset)$ имеем $\lambda_1 = d\,O(1 + \ln n_3)^2$. В использовании пространства $Y_{2,h}$ нет необходимости, если исходная задача удовлетворительно аппроксимируется на подпространстве $Y_{3,L} \oplus Y_{3,L}$, либо при использовании разрывных элементов.

Как видно из следствия 3.1, в двумерном случае оценка сверху для B_2 совпадает с аналогичными оценками из /28, 26/. Переобуславливатель, рассмотренный в /26/ , по существу совпадает с одним из слагаемых в формуле (1.3), определяющей оператор $A(\bar{\mu}_0)$ откуда видно, что для него величина λ не зависит от вектора $\bar{\mu}_o \in R^M$ при условии $\max\limits_{i \in I_B} \mu_i \le \min\limits_{i \in I_W} \mu_i$.

Нетрудно убедиться, что для разбиений типа "streeps" как в двумерном, так и в трехмерном случае (т.е. при $N = 2$, $n_y = 1$, при $N = 3$, $m_y = m_z = 1$) величина λ_1 не зависит от n_M. В случае "квазидвумерного" разбиения ($N = 3$, $m_z \le 2$) компонента $Y_{3,L}$ не нужна, и достаточно применить всю конструкцию лишь для пространства $Y_o = Y_{2,h} \oplus Y_{3,h}$, либо $Y_o = Y_{3,h}$ с вытекающими отсюда упрощениями.

Если некоторые из областей Ω_i отличны от прямоугольников либо параллелепипедов, то соответствующие им компоненты операторов B_2, B_3 на подпространствах X_2 и Y_3 соответственно можно заменить на эквивалентные им по спектру, например, операторы Лапласа-Бельтрами /30/ , определяющие норму, эквивалентную $\|\cdot\|^2_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_i^k)}$. Именно такие операторы и используются при $N = 2$ в работе /28/ .

Замечание 3.2. Используемая техника анализа операторов B_2, B_3 показывает, что все полученные результаты непосредственно переносятся на случай, когда вместо гармонических функций в подобластях Ω_i используются "h-гармонические", т.е. удовлетворяющие конечноэлементным алгебраическим системам для соответствующих триангуляций областей Ω_i.

4. ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ЧИСЛА ПОДОБЛАСТЕЙ Ω_i

Построенные переобуславливатели B_2 и B_3 позволяют эффективно решать линейное уравнение с оператором $A(\bar{\mu}_o)$ из (1.3), соответствующим краевой задаче с постоянным коэффициентом в каждой из подобластей Ω_i. Естественно, что операторы B_2 и B_3 могут быть непосредственно использова-

ны как переобуславливатели, при решении нелинейной задачи в $\mathbb{N}$ -формулировке /1/ и для задач с переменными коэффициентами, "слабо" меняющимися внутри подобластей Ω_i . Алгоритмы обращения операторов B_2 и B_3 могут быть ориентированы как на параллельные, так и на последовательные вычисления. Пусть задача решается на последовательной ЭВМ. Возникает вопрос: как наиболее оптимально проводить разбиение на подобласти при фиксированной точности аппроксимации (т.е. фиксированном шаге дискретизации), чтобы минимизировать суммарный объем памяти ЭВМ, необходимой для вычисления решения на внутренних границах $\partial\Omega_i$ (не принимаем во внимание другие факторы, влияющие на разбиение).

Пусть для простоты рассматривается аппроксимация исходной области $\Omega \in R^2$ (например, прямоугольника), характеризуемая N неизвестными по каждому направлению. Пусть область Ω разбита на p^2 одинаковых подобластей Ω_i с помощью $(p-1)$ вертикальной и $(p-1)$ горизонтальной линий. Ставится задача определения решения уравнения с оператором (1.3) на этих линиях. На $2(p-1)$ линии приходится $2(p-1)N$ неизвестных. Пусть для решения задачи Дирихле в подобластях Ω_i требуется массив размерности $(N/p)^2$. С точностью до величин порядка $O(m)$, где $m = N/p$, размерность необходимых массивов составит

$$Q(p) = \left(\frac{N}{p}\right)^2 + 2(p-1)N.$$

Решая задачу

$$Q(p) \to \min_{1 \le p \le N-1},$$

находим $Q'_p(p^*) = 0$ при $p^* = N^{1/3}$, и, следовательно,

$$Q(p^*) = 3N^{4/3}, \quad m^* = \frac{N}{p^*} = N^{2/3}. \qquad (4.1)$$

При решении задачи без разбиений на подобласти требуется не менее N^2 ячеек памяти.

Оценим асимптотику числа арифметических действий, необходимых для решения задачи с точностью $\epsilon = m^{-\alpha}$, при $p^* = N^{1/3}$. Пусть для решения задачи Дирихле в Ω_i (находим лишь неизвестные в приграничной полосе), используется, например, алгоритм типа /33/ , требующий $O(N \ln N^{\nu})$ действий. Тогда, согласно оценке (3.22), суммарная вычислительная работа определяется величиной

$$Q(p^*) = O((p^*)^2 m^*(\ln m^*)^{\nu + 2\beta + 1}) = O(N^{4/3}(\ln N)^{1 + \nu + 2\beta}), \qquad (4.2)$$

где число $\frac{1}{4} \le \beta \le 1$ определяется "внешним" итерационным процессом.

В трехмерном случае для вычисления решения на $3(p-1)$ плоскостях (N переменных по каждому направлению) предполагаем, что при решении задачи в области Ω_i требуется массив размерности $m^3 = (N/p)^3$. Минимизируя выражение

$$Q(p) = \left(\frac{N}{p}\right)^3 + 3(p-1)N^2 \to \min_{1 \le p \le N-1},$$

получаем $Q_p'(p^*) = 0$ при $p^* = N^{1/4}$, откуда следует

$$Q(p^*) = 4 \cdot N^{9/4}, \quad m^* = N^{3/4}. \tag{4.3}$$

При тех же предположениях, что и в двумерном случае, необходимая вычислительная (без использования компоненты $Y_{2,h}$) работа составит

$$G(p^*) = O(N^{9/4}(\ln N)^{1+2\beta+\nu}), \tag{4.4}$$

где ν и β имеют тот же смысл, что и в формуле (4.2).

При разбиении на полосы в двумерном случае аналогичные оценки для оптимального числа полос дают $p^* = N^{1/2}$, $Q(p^*) = 2N^{3/2}$. В трехмерном случае оптимальное число слоев есть $p^* = N^{1/2}$, $Q(p^*) = 2N^{5/2}$. Для "квазидвумерного" разбиения, т.е. разбиения только по двум переменным (разбиение на столбцы), получим $p^* = N^{1/3}$, $Q(p^*) = 3N^{7/3}$.

Интересно отметить, что если в каждой из подобластей Ω_i применять тот же алгоритм, используя исходную триангуляцию области, то в двумерном случае, согласно (4.1), приходим к задаче минимизации.

$$Q_2(p) \equiv 3\left(\frac{N}{p}\right)^{4/3} + 2pN \to \inf_p,$$

откуда получаем $p^* = (8N)^{1/7}$, $Q(p^*) < 5N^{8/7}$.

В трехмерном случае, учитывая (4.3), получаем

$$Q_2(p) = 4\left(\frac{N}{p}\right)^{9/4} + 3pN^2 \to \inf_p,$$

откуда $p^* = 3^{4/13} \cdot N^{1/13}$, $Q(p^*) = (3 \cdot 3^{4/13} + 4 \cdot 3^{-9/13})N^{27/13}$.

Нетрудно оценить дополнительную вычислительную работу при "включении" одного дополнительного уровня разбиения на клетки или полосы.

В табл. 1 приведены значения p^*, m^*, $Q(p^*)$ для $N = 2^q$ в двумерном случае, а в табл. 2 те же величины представлены для трехмерного варианта.

Таблица 1

q	3	6	9	12
p^*	2	4	8	16
m^*	4	16	64	288
$Q(p^*)$	48	$3 \cdot 2^8$	$3 \cdot 2^{12}$	$3 \cdot 2^{16}$
$N^2/Q(p^*)$	1.5	4	$\sqrt{2} \cdot 8$	32

Таблица 2

q	2	4	6	7	8
p^*	$\sqrt{2}$	2	~3	~4	4
m^*	~3	8	~21	~38	64
$Q(p^*)$	~64	$\sim 2 \cdot 10^3$	$\sim 4{,}5 \cdot 10^4$	$2{,}5 \cdot 10^5$	2^{20}
$\frac{N^3}{Q(p^*)}$	~1	~2	~ 5,5	~10	16

Естественно, что при выборе разбиения на подобласти Ω_i, кроме приведенных соображений, необходимо использовать информацию о поведении коэффициентов исходного линейного или квазилинейного уравнения.

Автор выражает благодарность проф. Е.П.Жидкову за поддержку проведенных исследований, а также Г.Е.Мазуркевичу за полезные обсуждения ряда вопросов, связанных с настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ, Р11-88-480, Дубна, 1988.*
2. *Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.*
3. *Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.*

4. Axelsson O. – J. Comput. Appl. Math., 1985, v.12-13, p.3.
5. Axelsson O., Brinkkemper S., Il'in V.P. – Linear Algebra and Appl., 1984, v.58, p.3.
6. Concus P., Golub G.H., Meurant G. – SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1985, v.6, No.1, p.220.
7. Еремин А.Ю., Колотилина Л.Ю. Препринт №135, М., ОВМ АН СССР, 1986.
8. Ильин В.П. Препринт №98, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1982.
9. Ильин В.П., Косицына Л.К. – В кн.: Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1987, вып.5, с.218.
10. Колотилина Л.Ю. – В кн.: Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1987, вып.5, с.195.
11. Агошков В.И., Лебедев В.И. – В кн.: Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1985, вып.2, с.173.
12. Лебедев В.И. Метод композиции. М.: ОВМ АН СССР, 1986.
13. Кузнецов Ю.А. – В кн.: Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1985, вып.2, с.265.
14. Кузнецов Ю.А., Мацокин А.М., Шайдуров В.В. – В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука, 1985, с.207.
15. Кузнецов С.Б. Препринт ВЦ СО АН СССР №111, Новосибирск, 1984.
16. Widlund O. In Proceedings of the Sixth Int. Conf. on Comput. Meth. in Applied and Engineering, held at Versailles, France, December 12-16, 1983.
17. Bjorstad P., Widlund O. – Elliptic Problem Solvers II (Birkhoff G. and Schoenstadt A., eds.), Academic Press, New York, 1984, p.245.
18. Dihn Q.V., Glowinski R., Periaux J. – Elliptic Problem Solvers II (Birkhoff G. and Schoenstadt A., eds.), Academic Press, New York, 1984, p.395.
19. Dryja M. – Numer. Math., 1984, 44, p.153.
20. Dryja M., Proskurowski W. – Applied Numerical Mathematics, 1985, 1, p.285.
21. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ Р11-87-501 Дубна, 1987.
22. Zhidkov E.P., Khoromsky B.N. – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, Noth. Holland, Antwerpen, 1988, v.2, No.6, p.463.
23. Самарский А.А. и др. – Изв. вузов, сер. Математика, 1983, №7 (254), с.3
24. Кучеров А.В., Николаев Е.С. – ЖВМ и МФ, 1977, 17, с.664.
25. Kobel'kov G.M. – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, Noth. Holland, Antverpen, 1988, v.3, No.6, p.407.
26. Dryja M., Proskurowski W., Widlund O. – In Proc. of Int. Simposium on Optimal Algorithms, Blagoevgrad, Bulgaria, 1986, p.15.
27. Яковлев Г.Н. – Матем. сборник, 1967, 74 (116), №4, с.526.
28. Bramble J.H., Pasciak J.E., Schatz A.H. – Math. Comp., 1986, v.47, No.175, p.103.
29. Bramble J.H., Pasciak J.E., Schatz A.H. – Math. Comp., 1987, v.49, No.179, p.1; v.50, No.181, p.1.

30. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
31. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980, с.512.
32. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979.
33. Бахвалов Н.С., Орехов М.Ю. – ЖВМ и МФ, 1982, 22, №6, с.1386.
34. Kuznetsov Yu.A. – In Proc. of the Eight Int. Conf. on Comput. Meth. in Applied Sience and Engineering, France, 1987, v.2, p.605.
35. Wendland W.L. – University of Stuttgart, Mathematisches Institut A, preprint No.10, Juli, 1988.
36. Hsiao G.C. – In Boundary Elements X, 1988, Springer-Verlag, vol.1 (Ed. Brebbia C.A.), p.431.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1988 года.