объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-88-736

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек

О МЕТОДАХ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Направлено в "Журнал вычислительной
математики и математической физики"

1988

I. Введение

Настоящая работа посвящена некоторым проблемам и дальнейшему развитию методов нахождения собственных векторов (в общем случае) несимметрических трехдиагональных матриц, т.е. нахождению нетривиальных $\mathcal{U}(\lambda)$ - решений однородных систем линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbb{C}\,\mathcal{U}(\lambda) = \lambda\,\mathcal{U}(\lambda)) \longleftrightarrow [(\mathbb{C} - \lambda E)\,\mathcal{U}(\lambda) = 0] \qquad (I.I)$$

в m - мерном линейном векторном пространстве $R_m \ni [\mathcal{U}(\lambda) = \{\mathcal{U}_n(\lambda)\}_{n=1}^{m}]$ над полем K. При этом полагается поле K вещественным[x)] (т.е. совпадающим с множеством вещественных чисел) и $K \ni \{\lambda; q_1; q_k, p_k, r_k, \mathcal{U}_1(\lambda_j); \mathcal{U}_k(\lambda_j)\}_{k=2}^{m}$, где $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ - собственные значения, а $\{q_1; q_k, p_k, r_k\}_{k=2}^{m}$ - элементы трехдиагональной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) вида

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}. \qquad (I.2)$$

Предварительно отметим, однако, что интерес к задаче нахождения (всех) собственных значений λ и соответствующих им собственных векторов $\mathcal{U}(\lambda)$ матрицы $\mathbb{C}$ (I.2) в значительной мере обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, вычислительные (итерационные по сути, например, [I÷3]) методы, являющиеся основными при решении спектральных задач $A\hat{\mathcal{U}} = \hat{\lambda}\hat{\mathcal{U}}$, где A - целиком заполненная - несимметрическая матрица, значительно проще реализуются на ЭВМ в случае матриц вида $\mathbb{C}$ (I.2). На это, в частности, обращали ещё внимание в своем фундаментальном обзоре [4] Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева. Во-вторых, замена спектральной задачи с квадратной матрицей A общего вида спектральной задачей (I.I),(I.2) привлекательна (в связи с отмеченным выше преимуществом) ещё и потому, что в литературе описан ряд методов, позволяющих выполнить устойчивое преобразование подобия (т.е. с сохранением λ, а, следовательно, и чисел обусловленности - $(Cond(A) = Cond(\mathbb{C}))$ при переходе к трехдиагональной матрице $\mathbb{C}$ (I.2). Учитывая исключительную важность как теоретического, так и особенно практического значения такого преобразования, мы приводим ниже (в целях полноты изложения и удобства) ряд ссылок (и комментарии к ним в основном из [4]) на монографии и работы, в которых рассматривались методы

x) Предположение о вещественности поля K не ограничивает общности результатов настоящей работы, поскольку они легко могут быть переписаны и в комплексной арифметике. В одной из следующих работ мы выполним это обобщение.

такого сведения (в общем случае несимметрических матриц $A \neq A^T$) и обсуждались возникающие при этом проблемы. В частности, в главе 6 из классической монографии [I] Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой и в фундаментальном справочном пособии [5] В. В. Воеводина и Ю. А. Кузнецова описан биортогональный алгоритм Ланцоша, некоторые аспекты которого освещены в работе Ямамото [I2]. Вопросам сведения посвящена и 6 глава другой фундаментальной монографии [3] Дж. Х. Уилкинсона, а также известная работа [I3] В. Н. Кублановской (с двухкратным применением метода Хессенберга) и работа Рейни [II]. Вальтман и Ламберт [I4] преобразование подобия осуществляют на каждом шаге над двумя строками и двумя столбцами матрицы A при помощи матриц более общего вида, чем матрицы вращения. Вещественная матрица A общего вида может быть также подобно преобразована в несимметрическую трехдиагональную $\mathbb{C}$ (I.2) с использованием процесса Бауэра (в модификации Рейни и Хабетлер [I5]).

Обсуждение численных проблем сведения произвольной несимметрической матрицы A к $\mathbb{C}$ (I.2) имеет место и в § I. 7 специализированной монографии [6] В. П. Ильина и Ю. И. Кузнецова, а также в известной монографии [2] В. В. Воеводина. В случае же симметрических матриц $A = A^T$ информацию о методах сведения A к $\mathbb{C} = \mathbb{C}^T$ можно найти, например, в [I÷6], а также в монографии [7] Х. Д. Икрамова и справочном пособии [8] Уилкинсона Р, а также в фундаментальной монографии [9] Н. С. Бахвалова и в других работах.

Следует отметить также, в-третьих, что матрицы $\mathbb{C}$ (I.2) играют и самостоятельную (выделенную) роль при решении многих задач вычислительной математики и математической физики (см., например, фундаментальную монографию [I0] А. А. Самарского и Е. С. Николаева, а также уже отмеченную монографию [6] и т.д.).

Отметим теперь ряд обстоятельств, позволяющих также лучше понять вычислительные аспекты проблем и методов нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathbb{C}$ (I.2).

Во-первых, для вычисления собственных значений (в том числе полного спектра - $\hat{\lambda}$) матриц $(A = A^T) \leftrightarrow [\lambda, (\mathbb{C} = \mathbb{C}^T)]$ широко (см., например, [I, 5, 6]) используются $L \cdot R$ -, QR - алгоритмы, метод бисекций, а также методы прямых и обратных итераций (см., например, [5, 6, 2, 8]). При этом любой из указанных методов не нарушает трехдиагональную структуру исходной матрицы $\mathbb{C} = \mathbb{C}^T$ и в каждой из итераций. Если же $\mathbb{C} \neq \mathbb{C}^T$, то в итерационной процедуре QR - алгоритма нарушается трехдиагональная структура исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.2), что делает этот алгоритм менее эффективным (по затратам памяти ЭВМ) при больших размерностях матриц $\mathbb{C}$ (см., например, § 3. II [6] или § 47 [2]).

I. Введение

Настоящая работа посвящена некоторым проблемам и дальнейшему развитию методов нахождения собственных векторов (в общем случае) несимметрических трехдиагональных матриц, т.е. нахождению нетривиальных $\mathcal{U}(\lambda)$ - решений однородных систем линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbb{C}\,\mathcal{U}(\lambda) = \lambda\,\mathcal{U}(\lambda)) \longleftrightarrow [(\mathbb{C} - \lambda E)\,\mathcal{U}(\lambda) = 0] \qquad \text{(I.I)}$$

в m - мерном линейном векторном пространстве $R_m \ni [\mathcal{U}(\lambda) = \{\mathcal{U}_n(\lambda)\}_{n=1}^{m}]$ над полем K . При этом полагается поле K вещественным[x)] (т.е. совпадающим с множеством вещественных чисел) и $K \ni \{\lambda; q_1; q_k, p_k, r_k, \mathcal{U}_1(\lambda_j); \mathcal{U}_k(\lambda_j)\}_{k=2}^{m}$, где $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ - собственные значения, а $\{q_1; q_k, p_k, r_k\}_{k=2}^{m}$ - элементы трехдиагональной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) вида

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}. \qquad \text{(I.2)}$$

Предварительно отметим, однако, что интерес к задаче нахождения (всех) собственных значений λ и соответствующих им собственных векторов $\mathcal{U}(\lambda)$ матрицы $\mathbb{C}$ (I.2) в значительной мере обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, вычислительные (итерационные по сути, например, [I+3]) методы, являющиеся основными при решении спектральных задач $A\hat{\mathcal{U}} = \hat{\lambda}\hat{\mathcal{U}}$, где A - целиком заполненная - несимметрическая матрица, значительно проще реализуются на ЭВМ в случае матриц вида $\mathbb{C}$ (I.2). На это, в частности, обращали ещё внимание в своем фундаментальном обзоре [4] Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева. Во-вторых, замена спектральной задачи с квадратной матрицей A общего вида спектральной задачей (I.I),(I.2) привлекательна (в связи с отмеченным выше преимуществом) ещё и потому, что в литературе описан ряд методов, позволяющих выполнить устойчивое преобразование подобия (т.е. с сохранением λ , а, следовательно, и чисел обусловленности - $(Cond(A) = Cond(\mathbb{C})$) при переходе к трехдиагональной матрице $\mathbb{C}$ (I.2). Учитывая исключительную важность как теоретического, так и особенно практического значения такого преобразования, мы приводим ниже (в целях полноты изложения и удобства) ряд ссылок (и комментарии к ним в основном из [4]) на монографии и работы, в которых рассматривались методы такого сведения (в общем случае несимметрических матриц $A \neq A^T$) и обсуждались возникающие при этом проблемы. В частности, в главе 6 из классической монографии [I] Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой и в фундаментальном справочном пособии [5] В. В. Воеводина и Ю. А. Кузнецова описан биортогональный алгоритм Ланцоша, некоторые аспекты которого освещены в работе Ямамото [I2] . Вопросам сведения посвящена и 6 глава другой фундаментальной монографии [3] Дж. Х. Уилкинсона, а также известная работа [I3] В. Н. Кублановской (с двухкратным применением метода Хессенберга) и работа Рейни [II] . Вальтман и Ламберт [I4] преобразование подобия осуществляют на каждом шаге над двумя строками и двумя столбцами матрицы A при помощи матриц более общего вида, чем матрицы вращения. Вещественная матрица A общего вида может быть также подобно преобразована в несимметрическую трехдиагональную $\mathbb{C}$ (I.2) с использованием процесса Бауэра (в модификации Рейни и Хабетлер [I5]).

Обсуждение численных проблем сведения произвольной несимметрической матрицы A к $\mathbb{C}$ (I.2) имеет место и в § I. 7 специализированной монографии [6] В. П. Ильина и Ю. И. Кузнецова, а также в известной монографии [2] В. В. Воеводина. В случае же симметрических матриц $A = A^T$ информацию о методах сведения A к $\mathbb{C} = \mathbb{C}^T$ можно найти, например, в [I+6] , а также в монографии [7] Х. Д. Икрамова и справочном пособии [8] Уилкинсона Р, а также в фундаментальной монографии [9] Н. С. Бахвалова и в других работах.

Следует отметить также, в-третьих, что матрицы $\mathbb{C}$ (I.2) играют и самостоятельную (выделенную) роль при решении многих задач вычислительной математики и математической физики (см., например, фундаментальную монографию [I0] А. А. Самарского и Е. С. Николаева, а также уже отмеченную монографию [6] и т.д.).

Отметим теперь ряд обстоятельств, позволяющих также лучше понять вычислительные аспекты проблем и методов нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathbb{C}$ (I.2).

Во-первых, для вычисления собственных значений (в том числе полного спектра - $\hat{\lambda}$) матриц $(A = A^T) \leftrightarrow [\lambda, (\mathbb{C} = \mathbb{C}^T)]$ широко (см., например, [I, 5, 6]) используются $L{\cdot}R$ - , QR - алгоритмы, метод бисекций, а также методы прямых и обратных итераций (см., например, [5, 6, 2, 8]). При этом любой из указанных методов не нарушает трехдиагональную структуру исходной матрицы $\mathbb{C} = \mathbb{C}^T$ и в каждой из итераций. Если же $\mathbb{C} \neq \mathbb{C}^T$, то в итерационной процедуре QR - алгоритма нарушается трехдиагональная структура исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.2), что делает этот алгоритм менее эффективным (по затратам памяти ЭВМ) при больших размерностях матриц $\mathbb{C}$ (см., например, § 3. II [6] или § 47 [2]).

x) Предположение о вещественности поля K не ограничивает общности результатов настоящей работы, поскольку они легко могут быть переписаны и в комплексной арифметике. В одной из следующих работ мы выполним это обобщение.

Метод же бисекций для несимметрических матриц $C \neq C^T$ применим лишь после определенных модификаций (см., например,[8]). Методы прямых и обратных итераций и LR – алгоритм применимы как в случае $C=C^T$, так и в случае $C \neq C^T$, но LR – метод устойчив лишь (формально) для положительно определенных матриц (см., например, § 3. I0 [6]).

Во-вторых, приступая к разработке новых методов вычисления собственных значений и собственных векторов матриц C (I.2) всегда следует иметь в виду (а перечисленные выше методы уже учитывают эту особенность) неустойчивую природу λ к возмущениям самой матрицы $A \leftrightarrow C$, которая (как справедливо отмечено, например, в гл. I § 6, 7 [I] и § 89 [I8]) не обязательно связана с наличием кратных собственных значений и тем более жордановых клеток. Эта неустойчивость (в силу линейной зависимости $[A\hat{U}(\hat{\lambda}) = \hat{\lambda}\hat{U}(\hat{\lambda})] \longleftrightarrow [CU(\lambda) = \lambda U(\lambda)]$) приводит неизбежно к неустойчивости в вычислении собственного вектора $[\hat{U}(\hat{\lambda})] \leftrightarrow [U(\lambda)]$. Более того, как будет ясно из примеров, которые мы приведем в одной из следующих публикаций, эта неустойчивость может приводить не только к возмущению $[\hat{U}(\hat{\lambda})] \longleftrightarrow [U(\lambda)]$, но и к изменению числа собственных векторов, отвечающих данному $\hat{\lambda} \leftrightarrow \lambda$, что теоретически возможно только при наличии кратных собственных значений. Из тех же примеров будет ясно, что различная степень устойчивости разных методов при вычислении λ может приводить даже „к замене" чисто вещественного спектра λ на комплексный.

В-третьих, даже без учета анализа проблем устойчивости следует иметь в виду, что перечисленные выше методы по разному „реагируют" на практическое определение внутренней структуры[x)] матриц $A \leftrightarrow C$, т.е. на практическое вычисление всех их линейно независимых собственных векторов. Так, LR – алгоритм фактически не применяют (см., например, § I5[20], [I]), а метод бисекций вообще нельзя (см., например, § 47[2]) применить для вычисления собственных векторов $[A \leftrightarrow C]$ – матриц. QR – алгоритм применим как для матриц простой (т.е. когда все собственные значения $\{\lambda_i \neq \lambda_j\}$ и соответствующие им собственные векторы различны и их общее число совпадает с размерностью матриц) структуры (в том числе с быстро сгущающимся спектром), так и для матриц не простой

x) Замечание I. Если A – матрица простой структуры, то $A = U^{*}\Lambda U$, $\{\lambda_i \neq \lambda_j\}$, где $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, U – унитарная (ортогональная) матрица, столбцы которой есть собственные векторы A. Теорема [3,5]. Для того, чтобы матрица $A \leftrightarrow C$ была бы простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы для каждого корня λ_i геометрической кратности q_i и алгебраической кратности K_i ранг ($\equiv r_i$) матриц $(A-\lambda_i E)$ был бы равен $r_i = m - K_i$, где m – порядок матриц A. Напомним, что (см., например, § 7. 30 [5]) геометрическая кратность собственного значения совпадает с максимальным числом линейно независимых собственных векторов, относящихся к данному собственному значению. В то же время кратность K_i собственного значения λ как корня характеристического многочлена $det(A-\lambda E)=0$ называется алгебраической кратностью. При этом $q_i \leq K_i$.

структуры (например, жордановоподобных, когда имеются кратные (в том числе комплексно сопряженные) собственные значения и число (геометрическая кратность) отвечающих им линейно-независимых собственных векторов не превосходит алгебраической кратности данного собственного значения). Однако применение QR – алгоритма эффективно только при одновременном нахождении как собственных значений, так и соответствующих им собственных векторов, и этот метод, как правило, не применяют для нахождения только собственных векторов по известным собственным значениям. Кроме того, QR – алгоритм, как уже отмечали выше, не сохраняет ширину ленты в итерационной процедуре в случае $C \neq C^T$. Перечисленные только что обстоятельства снижают достоинства QR-алгоритма, и поэтому часто предпочтение в практической работе на ЭВМ отдают методом прямой и обратной итераций (см., например, § 47[2], § 3, I2[6], § 3, гл. 9 [3]; § I8, часть II [8]). Однако методы прямой и обратной итерации, весьма эффективные в случае матриц простой структуры, несколько теряют это достоинство в случае, например, жордановоподобных матриц с несколькими клетками Жордана для одного и того же собственного значения. Это обусловлено в значительной мере желательностью выбора хорошего начального приближения для уменьшения числа итераций при решении систем уравнений с матрицами C (I.2) даже при известных собственных значениях.

Замечание 2. Отмеченная выше неустойчивость вычисления собственных векторов при заданных собственных значениях является „специфической и устранимой", что и позволило построить указанные уже выше, а также приводимые нами ниже новые рекуррентные методы их устойчивого вычисления. Теоретической основой, обусловившей успешность таких построений, является совместность однородных систем уравнений $(C-\lambda E)U(\lambda)=0$ в силу известной теоремы Кронекера-Капелли (см., например, [I8], [I9]), а также неполнота ранга матриц $(C-\lambda E)$ (так как $[rank(C-\lambda E)] < m$) для любого собственного значения λ (с учетом его алгебраической кратности). Но, как известно (см., например, §26, 27 [5], §36+4I [2]), совместность и неполнота ранга обеспечивают поиск устойчивых решений как указанных однородных систем, так (в общем случае) и неоднородных систем уравнений с такими матрицами.

Прежде чем перейти теперь к изложению наших результатов, мы приведем для полноты картины ряд необходимых сведений из ранее выполненных нами работ. Из [I6] следует, что если матрица C (I.2)- невырожденная и имеет ненулевые все главные угловые миноры, а также ненулевые диагональные элементы $\{q_i \neq 0\}_{i=1}^{m}$, то для элементов обратной к ней матрицы $B = C^{-1}$ справедливо следующее алгебраическое представление

$$
(B_{ij} = q_i^{-1}\cdot \tilde{B}_{ij}) = q_i^{-1}\cdot\begin{cases} \tilde{B}_{ii}\cdot\prod\limits_{j=j+1}^{i}\beta_j, & \text{если } 1\le j\le i\le m, \\ \tilde{B}_{ii}\cdot\prod\limits_{j=i+1}^{j}\hat{\beta}_j, & \text{если } 1\le i\le j\le m \end{cases} \quad \text{, где} \tag{I.3}
$$

$$
\left.\begin{aligned} &\tilde{B}_{kk} = (\Lambda_{k+1}+G_{k-1}-1)^{-1},\ k=1,2,\dots,m \quad \text{, если } \Lambda_k\neq 0 \text{ и } G_k\neq 0 \quad \text{, то} \\ &\beta_{k+1} = -(\tilde{p}_{k+1}\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}),\ \tilde{p}_{k+1} = p_{k+1}\cdot q_k^{-1};\ \hat{\beta}_{k+1} = -(\tilde{z}_{k+1}\cdot G_k^{-1}),\ \tilde{z}_{k+1} = z_{k+1}\cdot q_{k+1}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{I.4}
$$

$$
\left.\begin{aligned} &G_{i-1} = 1-\gamma_{i+1}\cdot G_i^{-1},\ G_m = G_{m-1} = 1,\ i=m-1,m-2,\dots,1 \\ &\Lambda_{j+1} = 1-\gamma_j\cdot\Lambda_j^{-1},\ \Lambda_1=\Lambda_2=1,\ j=2,3,\dots,m \\ &\gamma_k = p_k\cdot z_k/(q_{k-1}\cdot q_k);\ \gamma_1=\gamma_{m+1}=0;\ k=2,3,\dots,m \end{aligned}\right\} \tag{I.5}
$$

При этом[I7] если некоторые из главных угловых миноров матрицы C (I.2) обращаются в нуль, то имеют место равенства

$$
\left.\begin{aligned} &(\Lambda_k=0)\to[\Lambda_{k-1}=\gamma_{k-1},\Lambda_{k+1}=\infty,\Lambda_{k+2}=1;\ \Lambda_k\cdot\Lambda_{k+1}=-\gamma_k] \\ &(G_k=0)\to[G_{k+1}=\gamma_{k+2},\ G_{k-1}=-\infty,\ G_{k-2}=1;\ G_k\cdot G_{k-1}=-\gamma_{k+1}] \end{aligned}\right\}. \tag{I.6}
$$

В [I7] отметили, что в случае всех ненулевых главных угловых миноров справедливы также следующие два равенства

$$
\prod_{j=i}^{m}\frac{\Lambda_{j+1}}{G_j} = [\tilde{B}_{ii}^{-1}(\Lambda,G) = (G_{i-1}+\Lambda_{i+1}-1)] = \prod_{j=1}^{i}\frac{G_{j-1}}{\Lambda_j}. \tag{I.7}
$$

И, наконец, напомним, что в [I7] мы использовали также следующие последовательности при вычислении собственных значений трехдиагональных матриц C (I.2) ,

$$
\left.\begin{aligned} &\tau_i = \gamma_i/(1-\tau_{i-1});\ \tau_1=0;\ i=2,3,\dots,m \\ &(\tau_{k-1}\equiv 1)\to[\tau_k=\infty,\ \tau_{k+1}=0;\ \tau_k\cdot\tau_{k+1}=-\gamma_{k+1}] \end{aligned}\right\} \tag{I.8}
$$

$$
\left.\begin{aligned} &S_{i-1} = \gamma_i/(1-S_i);\ S_m=0;\ i=m,m-1,\dots,2 \\ &(S_n=1)\to[S_{n-1}=\infty,\ S_{n-2}=0;\ S_{n-1}\cdot S_{n-2}=-\gamma_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{I.9}
$$

$$
\left.\begin{aligned} &T_i = p_i\cdot z_i/(q_{i-1}-T_{i-1});\ T_1=0;\ i=2,3,\dots,m \\ &(T_{n-1}=q_{n-1})\to[T_n=\infty,\ T_{n+1}=0;\ T_n\cdot T_{n+1}=-p_{n+1}\cdot z_{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{I.10}
$$

$$
\left.\begin{aligned} &F_{i-1} = p_i\cdot z_i/(q_i-F_i);\ F_m=0;\ i=m,m-1,\dots,2 \\ &(F_n=q_n)\to[F_{n-1}=\infty,\ F_{n-2}=0;\ F_{n-1}\cdot F_{n-2}=-p_{n-1}\cdot z_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{I.11}
$$

$$
\left.\begin{aligned} &L_i = q_i-p_i\cdot z_i/L_{i-1};\ L_1=q_1;\ i=2,3,\dots,m \\ &(L_{n-1}=0)\to[L_n=\infty,\ L_{n+1}=q_{n+1};\ L_{n-1}\cdot L_n=-p_n\cdot z_n \end{aligned}\right\} \tag{I.12}
$$

$$
\left.\begin{aligned} &\tilde{L}_{i-1} = q_{i-1}-p_i\cdot z_i/\tilde{L}_i;\ \tilde{L}_m=q_m;\ i=m,m-1,\dots,2 \\ &(\tilde{L}_n=0)\to[\tilde{L}_{n-1}=\infty,\ \tilde{L}_{n-2}=q_{n-1};\ \tilde{L}_n\cdot\tilde{L}_{n-1}=-p_n\cdot z_n \end{aligned}\right\}. \tag{I.13}
$$

Итак, будем предполагать в дальнейшем, что собственные значения матрицы C (I.2) (независимо от её структуры) найдены одним из указан-

x) Здесь введены символы L и $\tilde{L}$ вместо λ и $\tilde{\lambda}$, которые были использованы нами в [I7] .

ных выше методов либо с использованием результатов [I7] . (Напомним, что в случае кратных собственных значений результаты [I7] будут обобщены нами в одной из следующих работ).

2. Методы нахождения собственных векторов вещественных трехдиагональных матриц, основанные на явном учете информации об их главных угловых минорах и нулевых элементах

В этом параграфе мы получим методы отыскания собственных векторов матрицы C (I.2) произвольной структуры, отличные от ранее известных. Если учесть соотношения (I.3)+(I.I3), то можно показать справедливость следующего результата.

Теорема I. Пусть x) λ - любое точное (некратное) собственное значение трехдиагональной матрицы C (I.2) с ненулевыми внедагональными элементами, т.е. $\{z_k\neq 0, p_k\neq 0\}_{k=2}^{m}$. Тогда независимо от всех остальных собственных значений элементы собственного вектора ($U(\lambda)=\{U_i(\lambda)\}_{i=1}^{m}$), соответствующего указанному собственному значению λ , могут быть определены в виде

$$
\left.\begin{aligned} &U_i(\lambda) = Const_\lambda\cdot U_i'(\lambda) \quad \text{, где} \\ &Const_\lambda = \Big\{\sum_{i=1}^{m}[U_i'(\lambda)]^2\Big\}^{-\frac{1}{2}},\ i=1,2,\dots,m \end{aligned}\right\}. \tag{2.I}
$$

Здесь $\{U_i'(\lambda)\}_{i=1}^{m}$ определяются одним из следующих шестнадцати способов:

I. Прямые процессы:

$$
\left.\begin{aligned} &U_i'(\lambda) = \Big[\prod_{n=2}^{i}\Big(-\frac{q_{n-1}(\lambda)}{z_n}\Lambda_n(\lambda)\Big) = \prod_{n=1}^{i-1}\Big(-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}(\lambda)}\cdot G_n^{-1}(\lambda)\Big)\Big]\cdot U_1'(\lambda) \\ &U_i'(\lambda) = \Big[\prod_{n=2}^{i}\Big(-\frac{p_n}{q_n(\lambda)}\cdot\tau_n^{-1}(\lambda)\Big) = \prod_{n=1}^{i-1}\Big(-\frac{q_n(\lambda)}{z_{n+1}}\cdot S_n(\lambda)\Big)\Big]\cdot U_1'(\lambda) \\ &U_i'(\lambda) = \Big[\prod_{n=2}^{i}\Big(-\frac{p_n}{T_n(\lambda)}\Big) = \prod_{n=1}^{i-1}\Big(-\frac{F_n(\lambda)}{z_{n+1}}\Big)\Big]\cdot U_1'(\lambda) \\ &U_i'(\lambda) = \Big[\prod_{n=2}^{i}\Big(-\frac{L_{n-1}(\lambda)}{z_n}\Big) = \prod_{n=2}^{i}\Big(-\frac{p_n}{\tilde{L}_n(\lambda)}\Big)\Big]\cdot U_1'(\lambda);\ i=2,3,\dots,m \end{aligned}\right\} \text{, где} \tag{2.2}
$$

$U_1'(\lambda)$ - любое (в частности, равное I).

x) **В этой теореме мы не обсуждаем вопросы вычисления собственных векторов при кратных собственных значениях λ , по причине того , что эти вопросы тесно связаны с анализом структуры пространства собственных векторов матриц C (I.2) и на этих вопросах мы остановимся ниже. Здесь и всюду далее, если λ - заданы с плохой точностью, т.е. получены без использования, например, результатов [I7], то используется обычная процедура[5] их уточнения.**

II. Обратные процессы:

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{U}'_K(\lambda) &= \Big[\prod_{n=K+1}^{m}\Big(-\frac{\tau_n}{q_{n-1}(\lambda)}\Lambda_n^{-1}(\lambda)\Big) = \prod_{n=K+1}^{m}\Big(-\frac{q_n(\lambda)}{P_n}\cdot G_{n-1}(\lambda)\Big)\Big]\cdot \mathcal{U}'_m(\lambda)\\
\mathcal{U}'_K(\lambda) &= \Big[\prod_{n=K+1}^{m}\Big(-\frac{q_n(\lambda)}{P_n}\cdot \tau_n(\lambda)\Big) = \prod_{n=K+1}^{m}\Big(-\frac{q_{n-1}(\lambda)}{\tau_n} S_{n-1}^{-1}(\lambda)\Big)\Big]\cdot \mathcal{U}'_m(\lambda)\\
\mathcal{U}'_K(\lambda) &= \Big[\prod_{n=K+1}^{m}\Big(-\frac{T_n(\lambda)}{P_n}\Big) = \prod_{n=K+1}^{m}\Big(-\frac{\tau_n}{F_{n-1}(\lambda)}\Big)\Big]\cdot \mathcal{U}'_m(\lambda)\\
\mathcal{U}'_K(\lambda) &= \Big[\prod_{n=K+1}^{m}\Big(-\frac{\tau_n}{L_{n-1}(\lambda)}\Big) = \prod_{n=K+1}^{m}\Big(-\frac{\tilde{L}_n(\lambda)}{P_n}\Big)\Big]\cdot \mathcal{U}'_m(\lambda)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

, где

$\mathcal{U}'_m(\lambda)$ – любое (в частности, равное I), $K = m-1, m-2, \dots, 1$.

Здесь $\gamma_i(\lambda) = P_i\cdot\tau_i/(q_{i-1}(\lambda)\cdot q_i(\lambda))$; $\gamma_1(\lambda)=0$; $i=2,3,\dots,m$; $\{q_n(\lambda)=(q_n-\lambda)\}_{n=1}^{m}$ (2.4)

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda_{i+1}(\lambda) = 1-\gamma_i(\lambda)/\Lambda_i(\lambda)\ ;\ \Lambda_1(\lambda)=\Lambda_2(\lambda)=1\ ;\ i=2,3,\dots,m.\\
&(\Lambda_n(\lambda)=0)\to[\Lambda_{n+1}(\lambda)=\infty,\ \Lambda_{n+2}(\lambda)=1\ ;\ \Lambda_n(\lambda)\cdot\Lambda_{n+1}(\lambda)=-\gamma_n(\lambda)]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&G_{i-1}(\lambda) = 1-\gamma_{i+1}(\lambda)/G_i(\lambda)\ ;\ G_m(\lambda)=G_{m-1}(\lambda)=1;\ i=m-1,m-2,\dots,1\\
&(G_n(\lambda)=0)\to[G_{n-1}(\lambda)=\infty,\ G_{n-2}(\lambda)=1\ ;\ G_n(\lambda)\cdot G_{n-1}(\lambda)=-\gamma_{n+1}(\lambda)]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_i(\lambda) = \gamma_i(\lambda)/(1-\tau_{i-1}(\lambda))\ ;\ \tau_1(\lambda)=0\ ;\ i=2,3,\dots,m\\
&(\tau_{n-1}(\lambda)=1)\to[\tau_n(\lambda)=\infty,\ \tau_{n+1}(\lambda)=0\ ;\ \tau_n(\lambda)\cdot\tau_{n+1}(\lambda)=-\gamma_{n+1}(\lambda)]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&S_{i-1}(\lambda) = \gamma_i(\lambda)/(1-S_i(\lambda))\ ;\ S_m(\lambda)=0\ ;\ i=m,m-1,\dots,2\\
&(S_n(\lambda)=1)\to[S_{n-1}(\lambda)=\infty,\ S_{n-2}(\lambda)=0\ ;\ S_{n-1}(\lambda)\cdot S_{n-2}(\lambda)=-\gamma_{n-1}(\lambda)]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

$$\left.\begin{aligned}
&T_i(\lambda) = P_i\,\tau_i/(q_{i-1}(\lambda)-T_{i-1}(\lambda))\ ;\ T_1(\lambda)=0\ ;\ i=2,3,\dots,m\\
&(T_{n-1}(\lambda)=q_{n-1}(\lambda))\to[T_n(\lambda)=\infty,\ T_{n+1}(\lambda)=0\ ;\ T_n(\lambda)\cdot T_{n+1}(\lambda)=-P_{n+1}\tau_{n+1}]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

$$\left.\begin{aligned}
&F_{i-1}(\lambda) = P_i\,\tau_i/(q_i(\lambda)-F_i(\lambda))\ ;\ F_m(\lambda)=0\ ;\ i=m,m-1,\dots,2.\\
&(F_n(\lambda)=q_n(\lambda))\to[F_{n-1}(\lambda)=\infty,\ F_{n-2}(\lambda)=0\ ;\ F_{n-1}(\lambda)\cdot F_{n-2}(\lambda)=-P_{n-1}\tau_{n-1}]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&L_i(\lambda) = q_i(\lambda)-P_i\,\tau_i/L_{i-1}(\lambda)\ ;\ L_1(\lambda)=q_1(\lambda)\ ;\ i=2,3,\dots,m\\
&(L_{n-1}(\lambda)=0)\to[L_n(\lambda)=\infty,\ L_{n+1}(\lambda)=q_{n+1}(\lambda);\ L_{n-1}(\lambda)\cdot L_n(\lambda)=-P_n\,\tau_n]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{L}_{i-1}(\lambda) = q_{i-1}(\lambda)-P_i\,\tau_i/\tilde{L}_i(\lambda)\ ;\ \tilde{L}_m(\lambda)=q_m(\lambda)\ ;\ i=m,m-1,\dots,2\\
&(\tilde{L}_n(\lambda)=0)\to[\tilde{L}_{n-1}(\lambda)=\infty,\ \tilde{L}_{n-2}(\lambda)=q_{n-1}(\lambda)\ ;\ \tilde{L}_n(\lambda)\cdot\tilde{L}_{n-1}(\lambda)=-P_n\,\tau_n]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

При этом имеют место следующие соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda_{i+1}(\lambda)+G_{i-1}(\lambda)-1=0\ ;\ i=1,2,\dots,m\\
&T_i(\lambda)+F_i(\lambda)-q_i(\lambda)=0;\ i=1,2,\dots,m\\
&L_i(\lambda)+\tilde{L}_i(\lambda)-q_i(\lambda)=0;\ i=1,2,\dots,m\\
&\tau_i(\lambda)+S_i(\lambda)-1=0;\ i=1,2,\dots,m
\end{aligned}\right\}, \qquad (2.13)$$

а последовательности $\{\Lambda_i\}$, $\{G_i\}$, $\{\tau_i\}$, $\{S_i\}$, $\{T_i\}$, $\{F_i\}$, $\{L_i\}$ и

$\{\tilde{L}_i\}$ связаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda_i(\lambda)=\gamma_i(\lambda)\cdot G_{i-1}^{-1}(\lambda)\ ;\ i=2,3,\dots,m\\
&\tau_i(\lambda)=\gamma_i(\lambda)\cdot\Lambda_i^{-1}(\lambda)\ ;\ i=2,3,\dots,m\\
&S_i(\lambda)=\gamma_{i+1}(\lambda)\cdot G_i^{-1}(\lambda)\ ;\ i=2,3,\dots,m
\end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

$$\left.\begin{aligned}
&T_i(\lambda)=q_i(\lambda)\cdot\tau_i(\lambda)\ ;\ i=1,2,\dots,m\\
&L_i(\lambda)=q_i(\lambda)-T_i(\lambda)\ ;\ i=1,2,\dots,m\\
&F_i(\lambda)=q_i(\lambda)\cdot S_i(\lambda)\ ;\ i=1,2,\dots,m\\
&\tilde{L}_i(\lambda)=q_i(\lambda)-F_i(\lambda)\ ;\ i=1,2,\dots,m
\end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_i(\lambda)=\gamma_i(\lambda)\cdot S_{i-1}^{-1}(\lambda)\ ;\ i=2,3,\dots,m\\
&T_i(\lambda)=P_i\cdot\tau_i\cdot F_{i-1}^{-1}(\lambda)\ ;\ i=2,3,\dots,m\\
&L_{i-1}(\lambda)=P_i\cdot\tau_i\cdot\tilde{L}_i^{-1}(\lambda)\ ;\ i=2,3,\dots,m
\end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Доказательство (= проверка). Если для матрицы ($\mathbb{C}-\lambda E$) последовательности $\{\Lambda_i\}$, $\{G_i\}$, $\{S_i\}$, $\{F_i\}$, $\{L_i\}$ и $\{\tilde{L}_i\}$ определить в виде $(2.5)_{1)}$+$(2.12)_{1)}$, что формально совпадает с (I.5)+(I.6) и (I.8)+(I.13), дополнить их равенствами $(2.5)_{2)}$+$(2.12)_{2)}$ и образовать выражения (2.1)+(2.3), то нетрудно проверить, что для каждого из полученных таких образом векторов $\mathcal{U}(\lambda)$ выполняется тождество $(\mathbb{C}-\lambda E)\mathcal{U}(\lambda)\equiv 0$. Аналогичным образом (путем подстановки) проверяются равенства (2.13)+(2.16). Отметим, что такой метод проверки результата вместо его доказательства мы избрали, учитывая размеры (объем) публикации.

Следствие I. Из шестнадцати точных алгебраических представлений теоремы I для собственных векторов $\mathcal{U}'(\lambda)$ могут быть получены следующие восемь рекуррентных представлений:

I. Правая „модифицированная" (с неявным учетом обращения в нуль верхних главных угловых миноров) классическая монотонная прогонка.

2. Левая „модифицированная" (с неявным учетом обращения в нуль нижних главных угловых миноров) классическая монотонная прогонка.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Если } \mathcal{U}'_{K+1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\tilde{d}_K|<\infty, \text{ то}\\
\qquad b_K\,\mathcal{U}'_{K+1}(\lambda)\\
\text{Если } |\tilde{d}_K|=\infty, \text{ то}\\
\qquad 0\\
\text{Если } \mathcal{U}'_{K+1}(\lambda)=0 \text{ либо } \tilde{d}_K=0, \text{ то}\\
\quad -\frac{\tau_{K+2}}{P_{K+1}}\,\mathcal{U}'_{K+2}(\lambda);\ \mathcal{U}'_m(\lambda)=1;\ K=m-1,\dots,1
\end{array}\right\} = \mathcal{U}'_K(\lambda) = \left\{\begin{array}{l}
\text{Если } \mathcal{U}'_{K-1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\tilde{\Omega}_K|<\infty, \text{ то}\\
\qquad \tilde{b}_K\,\mathcal{U}'_{K-1}(\lambda)\\
\text{Если } |\tilde{\Omega}_K|=\infty, \text{ то}\\
\qquad 0\\
\text{Если } \mathcal{U}'_{K-1}(\lambda)=0 \text{ либо } \tilde{\Omega}_K=0, \text{ то}\\
\quad -\frac{P_{K-1}}{\tau_K}\,\mathcal{U}'_{K-2}(\lambda)\ ;\ \mathcal{U}'_1(\lambda)=1\ ;\ K=2,3,\dots,m
\end{array}\right. \qquad (2.17)$$

3. Правая „комбинированная" (с неявным учетом обращающихся в нуль нижних главных угловых миноров) прогонка.

4. Левая „комбинированная" (с неявным учетом обращающихся в нуль верхних главных угловых миноров) прогонка.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } \mathcal{U}'_{k+1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\tilde{\Omega}_k|<\infty, \text{ то} \\ \qquad \tilde{b}^{-1}_{k+1}\,\mathcal{U}'_{k+1}(\lambda) \\ \text{Если } |\tilde{\Omega}_k|=\infty, \text{ то} \\ \qquad 0 \\ \text{Если } \mathcal{U}'_{k+1}(\lambda)=0 \text{ либо } \tilde{\Omega}_k=0, \text{ то} \\ \quad -\dfrac{r_{k+2}}{p_{k+1}}\,\mathcal{U}'_{k+2}(\lambda);\ \mathcal{U}'_m(\lambda)=1,\ k=m-1,\dots,1. \end{array}\right\} = \mathcal{U}'_k(\lambda) = \left\{\begin{array}{l} \text{Если } \mathcal{U}'_{k-1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\tilde{d}_k|<\infty, \text{ то} \\ \qquad \tilde{b}_{k+1}\,\mathcal{U}'_{k-1}(\lambda) \\ \text{Если } |\tilde{d}_k|=\infty, \text{ то} \\ \qquad 0 \\ \text{Если } \mathcal{U}'_{k-1}(\lambda)=0 \text{ либо } \tilde{d}_k=0, \text{ то} \\ \quad -\dfrac{p_{k-1}}{r_k}\,\mathcal{U}'_{k-2}(\lambda);\ \mathcal{U}'_1(\lambda)=1;\ k=2,3,\dots,m. \end{array}\right. \qquad (2.18)$$

5. Правая „модифицированная" (с явным учетом обращающихся в нуль верхних главных угловых миноров) классическая монотонная прогонка.

6. Левая „модифицированная" (с явным учетом обращающихся в нуль нижних главных угловых миноров) классическая монотонная прогонка.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } \mathcal{U}'_{i+1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\Phi_i|<\infty, \text{ то} \\ \qquad -\left(\dfrac{r_{i+1}}{\Phi_i}\right)\cdot\mathcal{U}'_{i+1}(\lambda) \\ \text{Если } \mathcal{U}'_{i+1}(\lambda)=0 \text{ либо } \Phi_i=0, \text{ то} \\ \qquad -\dfrac{r_{i+2}}{p_{i+1}}\cdot\mathcal{U}'_{i+2}(\lambda) \\ \text{Если } |\Phi_i|=\infty, \text{ то} \\ \quad 0;\ \mathcal{U}'_m(\lambda)=1.\ i=m-1,\dots,1 \end{array}\right\} = \mathcal{U}'_i(\lambda) = \left\{\begin{array}{l} \text{Если } \mathcal{U}'_{i-1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\Psi_i|<\infty, \text{ то} \\ \qquad -\left(\dfrac{p_i}{\Psi_i}\right)\cdot\mathcal{U}'_{i-1}(\lambda) \\ \text{Если } \mathcal{U}'_{i-1}(\lambda)=0 \text{ либо } \Psi_i=0, \text{ то} \\ \qquad -\dfrac{p_{i-1}}{r_i}\,\mathcal{U}'_{i-2}(\lambda) \\ \text{Если } |\Psi_i|=\infty, \text{ то} \\ \qquad 0;\ \mathcal{U}'_1(\lambda)=1;\ i=2,3,\dots,m. \end{array}\right. \qquad (2.19)$$

7. Правая „комбинированная" (с явным учетом обращающихся в нуль нижних главных угловых миноров) прогонка.

8. Левая „комбинированная" (с явным учетом обращающихся в нуль верхних главных угловых миноров) прогонка.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } \mathcal{U}'_{i+1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\Psi_{i+1}|<\infty, \text{ то} \\ \qquad -\left(\dfrac{\Psi_{i+1}}{p_{i+1}}\right)\mathcal{U}'_{i+1}(\lambda) \\ \text{Если } \Psi_{i+1}=0, \text{ то} \\ \qquad 0 \\ \text{Если } \mathcal{U}'_{i+1}(\lambda)=0 \text{ либо } |\Psi_{i+1}|=\infty, \text{ то} \\ \quad -\dfrac{r_{i+2}}{p_{i+1}}\mathcal{U}'_{i+2}(\lambda);\ \mathcal{U}'_m(\lambda)=1,\ i=m-1,\dots,1 \end{array}\right\} = \mathcal{U}'_i(\lambda) = \left\{\begin{array}{l} \text{Если } \mathcal{U}'_{i-1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\Phi_{i-1}|<\infty, \text{ то} \\ \qquad -\left(\dfrac{\Phi_{i-1}}{r_i}\right)\cdot\mathcal{U}'_{i-1}(\lambda) \\ \text{Если } \Phi_{i-1}=0, \text{ то} \\ \qquad 0 \\ \text{Если } \mathcal{U}'_{i-1}(\lambda)=0 \text{ либо } |\Phi_{i-1}|=\infty, \text{ то} \\ \quad -\dfrac{p_{i-1}}{r_i}\mathcal{U}'_{i-2}(\lambda);\ \mathcal{U}'_1(\lambda)=1;\ i=2,3,\dots,m \end{array}\right. \qquad (2.20)$$

Здесь:

$$b_k=-r_{k+1}/[\tilde{d}_k\equiv(q_k(\lambda)+p_k\cdot b_{k-1})];\quad b_1=-r_2\,q_1^{-1}(\lambda);\quad k=2,3,\dots,m-1, \qquad (2.21)$$

$$\tilde{b}_k=-p_k/[\tilde{\Omega}_k\equiv(q_k(\lambda)+r_{k+1}\,\tilde{b}_{k+1})];\quad \tilde{b}_m=-p_m\,q_m^{-1}(\lambda);\quad k=m-1,\dots,2, \qquad (2.22)$$

$$\Psi_i=q_i(\lambda)-r_{i+1}(\Psi_{i+1}^{-1}\cdot p_{i+1})\quad;\ \Psi_m=q_m(\lambda);\ i=m-1,\dots,1. \qquad (2.23)$$

$$\Phi_i=q_i(\lambda)-p_i\,(\Phi_{i-1}^{-1}\cdot r_i)\ ;\quad \Phi_1=q_1(\lambda)\ ;\ i=2,3,\dots,m\ ; \qquad (2.24)$$

$$\Psi_i=q_i(\lambda)\cdot G_{i-1}(\lambda)\quad;\quad \Phi_i(\lambda)=q_i(\lambda)\,\Lambda_{i+1}(\lambda)\ ;\ i=1,2,\dots,m. \qquad (2.25)$$

Доказательство справедливости процессов (2.I7)+(2.20) непосредственно следует из определения последовательностей $\{b_k\}$, $\{\tilde{b}_k\}$, $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ (2.2I)+(2.25) и теоремы I.

Замечание 3. Выше мы ввели понятия правой (левой) модифицированных классических монотонных прогонок, поскольку в них (в отличие от им соответствующих классических аналогов) явно заданы „алгоритмы перешагивания", сохраняющие последовательный порядок вычисления компонент собственного вектора $\{\mathcal{U}_i(\lambda)\}$ в случае явного (неявного) обращения в нуль соответствующих верхних (нижних) угловых миноров. Аналогично нами введены также понятия правой (левой) комбинированных прогонок (с явным (неявным) учетом информации об обращающихся в нуль соответствующих главных угловых минорах). Классические аналоги последнего типа прогонок авторам не известны. При этом терминам комбинированный мы стремились подчеркнуть зависимость от $\{G_i\}$ компонент векторов $\{\mathcal{U}(\lambda)\}$ в схемах правых прогонок и наоборот зависимость от $\{\Lambda_i\}$ в схемах левых прогонок, в то время как в классических схемах обычно принят обратный характер зависимости.

Следствие 2. Пусть λ – любое некратное вещественное собственное значение вещественной трехдиагональной матрицы $\mathbf{C}$ (I.2) с ненулевыми внедиагональными элементами. Тогда (независимо от всех остальных собственных значений) вектор, ему соответствующий, $\mathcal{U}'(\lambda)=\{\mathcal{U}'_i(\lambda)\}_{i=1}^m$ в (2.I) может быть найден одним из двух следующих способов:

I. Рекуррентный метод общего вида на основе нижних главных угловых миноров.

2. Рекуррентный метод общего вида на основе верхних главных угловых миноров.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } \mathcal{U}'_{i-1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\tilde{L}_i(\lambda)|<\infty, \text{ то} \\ \qquad -\dfrac{p_i}{\tilde{L}_i(\lambda)}\,\mathcal{U}'_{i-1}(\lambda) \\ \text{Если } \mathcal{U}'_{i-1}(\lambda)=0 \text{ либо } \tilde{L}_i(\lambda)=0, \text{ то} \\ \qquad -\dfrac{p_{i-1}}{r_i}\,\mathcal{U}'_{i-2}(\lambda) \\ \text{Если } \tilde{L}_i(\lambda)=\infty, \text{ то} \\ \qquad 0, \text{ где} \\ \mathcal{U}'_1(\lambda)=1,\ i=2,3,\dots,m \end{array}\right\} = \mathcal{U}'_i(\lambda) = \left\{\begin{array}{l} \text{Если } \mathcal{U}'_{i+1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|L_i(\lambda)|<\infty, \text{ то} \\ \qquad -\dfrac{r_{i+1}}{L_i(\lambda)}\,\mathcal{U}'_{i+1}(\lambda) \\ \text{Если } \mathcal{U}'_{i+1}(\lambda)=0 \text{ либо } L_i(\lambda)=0, \text{ то} \\ \qquad -\dfrac{r_{i+2}}{p_{i+1}}\,\mathcal{U}'_{i+2}(\lambda) \\ \text{Если } L_i(\lambda)=\infty, \text{ то} \\ \qquad 0, \text{ где } \mathcal{U}'_m(\lambda)=1,\ i=m-1,m-2,\dots,1 \end{array}\right. \qquad (2.26)$$

Здесь $\tilde{L}_i(\lambda)$ есть (2.I2) и $L_i(\lambda)$ – (2.II).

Доказательство процессов (2.26) легко получить с учетом правых частей в $(2.2)_{4)}$ и (2.I2), а также левых частей в $(2.3)_{4)}$ и (2.II).

Отметим также, что указанные процессы являются основными в практической реализации на ЭВМ, если λ известны с хорошей точностью, например, вычислены с использованием результатов [I7].

Легко видеть, что если λ - комплексное, то последовательности $\{\tilde{L}_i(\lambda)\}$ и $\{L_i(\lambda)\}$ -комплексные и имеет место следующий результат.

Следствие 3. Если λ - некратное комплексное собственное значение, т.е.

$$\lambda = a + b\cdot i \tag{2.27}$$

вещественной трехдиагональной матрицы $\mathbf{C}$ (I.2) с ненулевыми внедиагональными элементами, то в (2.I) собственный вектор имеет вид

$$\mathcal{U}(\lambda) = \{\mathcal{U}'_n(\lambda) = (X_n(\lambda) + Y_n(\lambda)\cdot i)\}_{n=1}^{m} \quad \text{, где:} \tag{2.28}$$

Если $0 < [|\tilde{L}(\lambda)|, |L(\lambda)|] < \infty$, то

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} X_n(\lambda) = -P_n\,[\tilde{A}_n(\lambda)\cdot X_{n-1}(\lambda) + \tilde{B}_n(\lambda)\cdot Y_{n-1}(\lambda)]/(\tilde{A}_n^2(\lambda) + \tilde{B}_n^2(\lambda)) \\ Y_n(\lambda) = -P_n\,[\tilde{A}_n(\lambda)\, Y_{n-1}(\lambda) - \tilde{B}_n(\lambda)\cdot Y_{n-1}(\lambda)]/(\tilde{A}_n^2(\lambda) + \tilde{B}_n^2(\lambda)) \quad \text{, где} \\ X_1(\lambda) = 1, \quad Y_1(\lambda) = 1, \quad n = 2, 3, \cdots, m \end{array}\right\} & \\ \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} X_k(\lambda) = -\tau_{k+1}\,[A_k(\lambda)\cdot X_{k+1}(\lambda) + B_k(\lambda)\cdot Y_{k+1}(\lambda)]/(A_k^2(\lambda) + B_k^2(\lambda)) \\ Y_k(\lambda) = -\tau_{k+1}\,[A_k(\lambda)\cdot Y_{k+1}(\lambda) - B_k(\lambda)\cdot X_{k+1}(\lambda)]/(A_k^2(\lambda) + B_k^2(\lambda)) \quad \text{, где} \\ X_m(\lambda) = 1, \quad Y_m(\lambda) = 1, \quad k = m-1, m-2, \cdots, 1 \end{array}\right\} & \end{array}\right. \tag{2.29}$$

Если $|\tilde{L}_n(\lambda)| = 0$, $|L_n(\lambda)| = 0$, то

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\tau_{n+2}}{P_{n+1}} X_{n+2}(\lambda) = X_n(\lambda) = -\frac{P_{n-1}}{\tau_n} X_{n-2}(\lambda) \\ -\frac{\tau_{n+2}}{P_{n+1}} Y_{n+2}(\lambda) = Y_n(\lambda) = -\frac{P_{n-1}}{\tau_n} Y_{n-2}(\lambda) \end{array}\right\} \tag{2.30}$$

Если $|\tilde{L}_n(\lambda)| = \infty$, $|L_n(\lambda)| = \infty$, то

$$X_n(\lambda) = 0, \quad Y_n(\lambda) = 0 \tag{2.3I}$$

При этом $\tilde{L}_n(\lambda)$ и $L_n(\lambda)$ в (2.26) есть

$$\begin{array}{l} \tilde{L}_n(\lambda) = \tilde{A}_n(\lambda) + \tilde{B}_n(\lambda)\cdot i \quad ; \; n = 1, 2, \cdots, m \\ L_n(\lambda) = A_n(\lambda) + B_n(\lambda)\cdot i \quad ; \; n = 1, 2, \cdots, m \quad \text{, где} \end{array} \tag{2.32}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \tilde{A}_{n-1}(\lambda) = (q_{n-1} - a) - P_n\cdot\tau_n\,\tilde{A}_n(\lambda)/(\tilde{A}_n^2(\lambda) + \tilde{B}_n^2(\lambda)); \; n = m, m-1, \cdots, 2 \\ \tilde{B}_{n-1}(\lambda) = -[b - P_n\cdot\tau_n\,\tilde{B}_n(\lambda)/(\tilde{A}_n^2(\lambda) + \tilde{B}_n^2(\lambda))] \quad ; \; n = m, m-1, \cdots, 2 \\ \tilde{A}_m(\lambda) = q_m - a \quad \text{и} \quad \tilde{B}_m(\lambda) = -b \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} A_n(\lambda) = (q_n - a) - P_n\,\tau_n\,A_{n-1}(\lambda)/(A_{n-1}^2(\lambda) + B_{n-1}^2(\lambda)) \; ; \; n = 2, 3, \cdots, m \\ B_n(\lambda) = -[b - P_n\,\tau_n\,B_{n-1}(\lambda)/(A_{n-1}^2(\lambda) + B_{n-1}^2(\lambda))] \quad ; \; n = 2, 3, \cdots, m \\ A_1(\lambda) = q_1 - a \quad \text{и} \quad B_1(\lambda) = -b \end{array}\right\} \end{array}\right\} \tag{2.33}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (|\tilde{L}_k(\lambda)| = 0) \rightarrow [|\tilde{L}_{k-1}(\lambda)| = \infty, \; \tilde{A}_{k-2}(\lambda) = q_{k-2} - a, \; \tilde{B}_{k-2}(\lambda) = -b \; ; \\ \quad (\tilde{A}_k(\lambda) + \tilde{B}_k(\lambda)\cdot i)(\tilde{A}_{k-1}(\lambda) + \tilde{B}_{k-1}(\lambda)\cdot i) = -P_k\cdot\tau_k] \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} (|L_{k-1}(\lambda)| = 0) \rightarrow [|L_k(\lambda)| = \infty, \; A_{k+1}(\lambda) = q_{k+1} - a, \; B_{k+1}(\lambda) = -b \; ; \\ \quad (A_{k-1}(\lambda) + B_{k-1}(\lambda)\cdot i)(A_k(\lambda) + B_k(\lambda)\cdot i) = -P_k\,\tau_k] \end{array}\right\} \end{array}\right\} \tag{2.34}$$

Справедливость этого результата непосредственно вытекает из следствия 2 с учетом особенностей комплексной арифметики. При этом следует иметь в виду, что при наличии двух комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda = a + b\cdot i$ и $\bar{\lambda} = a - b\cdot i$ соответствующие им собственные векторы имеют вид $\mathcal{U}(\lambda) = X(\lambda) + Y(\lambda)\cdot i$ и $\bar{\mathcal{U}}(\lambda) = X(\lambda) - Y(\lambda)\cdot i$.

Замечание 4. Итак, выше в теореме I были получены методы вычисления всех собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям $\{\lambda_i \neq \lambda_j\}_{i,j=1}^{m}$ матрицы $\mathbf{C}$ (I.2), у которой все внедиагональные элементы $\{P_i \neq 0$ и $\tau_i \neq 0\}_{i=2}^{m}$ отличны от нуля. Указанные матрицы, как известно, составляют подмножество множества матриц простой структуры. Примером таких матриц являются самосопряженные $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$ (либо соответственно симметрические $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$) матрицы. Однако при условиях $\{P_i \neq 0$ и $\tau_i \neq 0\}$ не все матрицы $\mathbf{C}$ (I.2) имеют все различные собственные значения и соответствующие им различные собственные векторы, образующие полный базис пространств E_m (либо соответственно R_m), в которых действует оператор $\mathbf{C}$ (I.2). При тех же условиях $\{P_n \neq 0$ и $\tau_n \neq 0\}_{n=2}^{m}$ матрицы $\mathbf{C}$ (I.2) могут иметь также как простую структуру (т.е. кратные собственные значения, но соответствующий им полный базис из собственных векторов), так и не простую структуру (т.е. кратные собственные значения и набор из соответствующих им собственных векторов, не образующих полный базис в указанных пространствах E_m (R_m)). Например, если матрицы $\mathbf{C}$ (I.2) имеют двухдиагональный вид

$$\mathbf{C}_{\blacktriangleleft} = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ P_2 & \ddots & \\ 0 & \ddots & P_m\; q_m \end{bmatrix} \quad \text{либо} \quad \mathbf{C}_{\blacktriangle} = \begin{bmatrix} q_1\;\tau_2 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \tau_m \\ 0 & & q_m \end{bmatrix} \quad \text{, то} \tag{*}$$

в случае всех различных диагональных элементов $\{(q_i \neq q_j) \leftrightarrow (\lambda_i \neq \lambda_j)\}_{i,j=1}^{m}$ они являются матрицами простой структуры, а при наличии кратных диагональных элементов (что то же самое - кратных собственных значений) они уже не являются матрицами простой структуры а, например, жордановоподобны. Если A - жордановоподобная матрица, то существует невырожденная матрица $\mathcal{U}$, такая, что $\mathcal{U}^{-1} H \mathcal{U} = A$, где H - матрица Жордана. Если у двухдиагональных матриц $\mathbf{C}_{\blacktriangle}$ или $\mathbf{C}_{\blacktriangleleft}$ (*) все диагональные элементы $\{q_i = q\}_{i=1}^{m}$ одинаковые, то такие матрицы принято называть ящиками Жордана. При этом каждый ящик Жордана (независимо от его размерности) имеет лишь один собственный вектор, как в случае канонического [3,18] вида $\{\tau_k = \tau$ либо $p_k = p\}_{k=2}^{m}$, так и в общем [3] не каноническом случае $\{\tau_k \neq \tau$ либо $p_k \neq p\}_{k=2}^{m}$. Отсюда следует, что равенство нулю отдельных (изолированных) ($p_k = 0$) либо (и) ($\tau_k = 0$) при фиксированных к из интервала $2 \leqslant k \leqslant m$ также существенным образом влияет на структуру пространства собственных векторов матрицы C (I.2). Следующие лемма и теорема дают ответы на вопросы структуры пространства, а также способы вычисления собственных векторов матрицы C (I.2) в зависимости от значений внедиагональных элементов $\{p_k, \tau_k\}_{k=2}^{m}$.

Лемма I. Пусть C (I.2)-вещественная трехдиагональная матрица, среди $\{\lambda_k\}_{k=1}^{m}$ всех собственных значений которой имеются $\{\lambda_i = \dots = \lambda_{i+k}\}$ одна группа (либо соответственно несколько различных групп) кратных вещественных (либо комплексных) собственных значений. Тогда:

I. Если элементы такой матрицы удовлетворяют одному из следующих условий:

A) $[\{\tau_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$, а $\{p_k = 0\}_{k=2}^{m}]$ либо $[\{p_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$, а $\{\tau_k = 0\}_{k=2}^{m}]$;

B) $\{\tau_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$, а некоторые из $p_i = 0$ при любых i из интервала $2 \leqslant i \leqslant m$ либо $\{p_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$, а некоторые из $\tau_j = 0$ при любых j из интервала $2 \leqslant j \leqslant m$;

C) $[\{\tau_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$ и $\{p_k \neq 0\}_{k=2}^{m}]$,

то такая матрица:

а) не является матрицей простой структуры,

в) каждая из указанных групп её кратных собственных значений принадлежит лишь одному (своему) ящику Жордана.

II. Если же внедиагональные элементы матрицы C (I.2)

D) ($\tau_k = 0 = p_k$)

обращаются в нуль одновременно при любых k из интервала $2 \leqslant k \leqslant m$, т.е. матрица C (I.2) распадается на систему не связанных между собой трехдиагональных подматриц меньшей размерности, то структура пространства собственных векторов такой матрицы однозначно определяется структурой подпространств собственных векторов трехдиагональных подматриц, прямой суммой которых она является.

Доказательство леммы начнем с доказательства её II – второго пункта. На самом деле. Условия ($\tau_k = 0 = p_k$) при любом k из интервала $2 \leqslant k \leqslant m$ позволяют разложить матрицу C (I.2) в прямую сумму трехдиагональных подматриц C_i меньшей размерности, т.е.

$$C = \begin{bmatrix} \boxed{C_1} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \boxed{C_2} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 \ddots & \\ 0 & & \boxed{C_i} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что пространство R_m, в котором определен оператор (матрица) C (I.2), распадается в прямую сумму

$$R_m = R_1 + R_2 + \dots + R_i$$

подпространств, структура каждого из которых однозначно определяется структурой подпространства собственных векторов каждой из подматриц C_j, $1 \leqslant j \leqslant i$, что и доказывает утверждение пункта II°. Доказательство утверждений пункта I° леммы начнем с $\mathrm{I}^{\circ}_{A)}$. На самом деле. Если элементы матрицы C (I.2) удовлетворяют одному из условий $\mathrm{I}^{\circ}_{A)}$, то такие матрицы (как уже отмечалось выше) являются двухдиагональными. С другой стороны, наличие у двухдиагональных матриц групп одинаковых собственных значений (опять-таки, как уже отмечалось выше) эквивалентно наличию групп одинаковых диагональных элементов. Следовательно, выполняя $Q_\triangleleft = P C_\triangleleft P^{-1}$ либо $Q_\triangleright = P C_\triangleright P^{-1}$ – преобразования подобия (перестановки строк и столбцов) у двухдиагональных матриц $C_\triangleleft$ или $C_\triangleright$, их всегда можно будет привести к двухдиагональному же виду. В результате все одинаковые диагональные элементы будут объединены по группам, т.е. стоять подряд на диагонали двухдиагональных матриц $Q_\triangleright$ или $Q_\triangleleft$. Далее, учитывая условия $\{p_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$ либо $\{\tau_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$, можем над двухдиагональными матрицами $Q_\triangleright$ либо $Q_\triangleleft$ выполнить дальнейшие преобразования подобия по „уничтожению" над(под)диагональных элементов –(p_k либо τ_k), разделяющих группы одинаковых диагональных элементов, поскольку указанные нули на под(над)диагоналях в двухдиагональных матрицах являются своеобразными „индикаторами" соседних ящиков Жордана. В результате проделанных операций двухдиагональные матрицы $C_\triangleright$ либо $C_\triangleleft$ обретают вид неканонической матрицы Жордана. Таким образом, показали, что матрицы C (I.2) при условиях $\mathrm{I}^{\circ}_{A)}$ подобны матрицам Жордана, которые состоят из ящиков Жордана, каждый из которых, в свою очередь, не является матрицей простой структуры. И показали также, что каждое собственное значение матриц C (I.2) при условиях $\mathrm{I}^{\circ}_{A)}$ принадлежит одному лишь (своему) ящику Жордана.

Доказательство утверждений леммы при условиях $\mathrm{I}^{\circ}_{C)}$ опирается на три следующих факта. Во-первых, $\tau_{(C-\lambda E)}$ – ранг матрицы ($C - \lambda E$) для любого λ не может быть меньше, чем $m-1$, т.е. $\tau_{(C-\lambda E)} \geqslant m-1$, если $\{p_k \neq 0$ и $\tau_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$. Это связано (см. § I.3.10 [6]) с неразложимостью матриц C (I.2) при таких условиях на её элементы, т.е. невозможностью (см. § I.5.2. [6]) сведения C (I.2) к блочно-треугольному виду путем только перестановки её строк и столбцов. Во-вторых, для того чтобы $\mathbb{C}$ (I.2) была бы простой структуры, необходимо и достаточно (как следует из теоремы, приведенной в замечании I) выполнение равенств $\tau_{(\mathbb{C}-\lambda E)} = m - K_\lambda$ для всех λ, где K_λ – алгебраическая кратность собственного значения λ. В-третьих, для матриц любой структуры (см. § 7.3I [5]) имеет место равенство $\tau_{(\mathbb{C}-\lambda E)} = m - q_\lambda$ для всех λ, где q_λ – геометрическая кратность собственного значения λ и $q_\lambda \leqslant K_\lambda$.

Поскольку $det(\mathbb{C}-\lambda E) = 0$, то с учетом „во – первых" в этом случае всегда имеем $\tau_{(\mathbb{C}-\lambda E)} = m-1$. Отсюда, а также из „в – третьих" и условия леммы о кратности λ следует, что $q_\lambda = 1$, т.е. для данного кратного λ существует лишь один ящик Жордана, и следовательно, $\mathbb{C}$ (I.2) имеет не простую структуру. Итак, утверждение леммы при условиях $I^{\circ}_{C)}$ доказано. Для доказательства утверждений леммы при условиях $I^{\circ}_{B)}$ по сути следует повторить все рассуждения предыдущего этапа, имея в виду следующее.

Если, например, $\{\rho_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$ и лишь некоторые из $\tau_k = 0$, то, учитывая, что λ – собственное значение, т.е. $det(\mathbb{C}-\lambda E) = 0$, имеем $\tau_{(\mathbb{C}-\lambda E)} = m-1$. В этом нетрудно убедиться, вычеркнув первую строку и последний столбец у матрицы ($\mathbb{C} - \lambda E$). Аналогично доказательство и при $\{\tau_k \neq 0\}_{k=2}^{m}$ и некоторых равных нулю $\rho_k = 0$. Лемма доказана.

Следствие 4. При условиях $I^{\circ}_{A,B,C)}$ на элементы матрица $\mathbb{C}$ (I.2):

1. Имеет простую структуру тогда и только тогда, если все её собственные значения различны.

2. Если в её спектре имеются кратные собственные значения, то $\mathbb{C}$ (I.2) всегда непростой структуры.

Замечание 5. При теоретическом анализе структуры пространства собственных векторов при различных условиях на элементы матрицы $\mathbb{C}$(I.2) в лемме I мы не включили (по причине сложности анализа) в рассмотрение условия на внедиагональные элементы $\{\rho_k, \tau_k\}_{k=2}^{m}$ вида

E) $[(\tau_{K_1} = 0$ и $\rho_{K_1} \neq 0$), но ($\rho_{K_2} = 0$ и $\tau_{K_2} \neq 0$)] либо [($\rho_{K_1} = 0$ и $\tau_{K_1} \neq 0$), но ($\tau_{K_2} = 0$ и $\rho_{K_2} \neq 0$)] при любых $2 \leqslant K_1; K_2 \leqslant m$, удовлетворяющих условиям $K_1 < K_2$. Матрицы $\mathbb{C}$ (I.2) при таких условиях на внедиагональные элементы могут иметь в случае кратных собственных значений как простую, так и не простую структуру.

Замечание 6. Условия A, B, E на элементы матрицы $\mathbb{C}$ (I.2) являются следствием общих условий

$$F)\ \begin{cases} [(\ \tau_{K_1} = 0 \text{ и } \rho_{K_1} \neq 0\ ) \text{ либо } (\ \rho_{K_1} = 0 \text{ и } \tau_{K_1} \neq 0\ )], \\ [(\ \tau_{K_2} = 0 \text{ и } \rho_{K_2} \neq 0\ ) \text{ либо } (\ \rho_{K_2} = 0 \text{ и } \tau_{K_2} \neq 0\ )], \ldots, \\ [(\ \tau_{K_N} = 0 \text{ и } \rho_{K_N} \neq 0\ ) \text{ либо } (\ \rho_{K_N} = 0 \text{ и } \tau_{K_N} \neq 0\ )], \text{ где} \end{cases}$$

$2 \leqslant K_1 \leqslant K_2 \leqslant K_3 \leqslant \cdots \leqslant K_N \leqslant m$. Следовательно, матрицы $\mathbb{C}$ (I.2) с условиями C, D и F на их элементы охватывают трехдиагональные матрицы самого общего вида. Следующая теорема поэтому даёт численный (количественный) ответ на вопросы вычисления собственных векторов матриц $\mathbb{C}$ (I.2) самого общего вида.

Теорема 2. Пусть $\mathbb{C}$ (I.2) – вещественная трехдиагональная матрица общего вида, т.е. её элементы удовлетворяют любому из условий C, D, F леммы I. Тогда, построив с учетом анализа условий D и F целочисленные интервалы[x)]

$$[1, S_1-1], [S_1, S_2-1], \ldots, [S_i, S_{i+1}-1], \ldots, [S_{n-1}, S_n-1], [S_n, m] \quad \text{и} \tag{2.35}$$

$$[S_i, K_1-1], [K_1, K_2-1], \ldots, [K_\ell, K_{\ell+1}-1], \ldots, [K_{N-1}, K_N-1], [K_N, S_{i+1}-1], \quad \text{где} \tag{2.36}$$

$$\{2 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant m\} \text{ и } \{S_i+1 \leqslant K_1 \leqslant \cdots \leqslant S_{i+1}-1\},$$

собственные векторы такой матрицы, соответствующие любым (в том числе кратным) собственным значениям λ_j с номерами j из интервалов $j \in [S_i, S_{i+1}-1]$, а также соответствующие им присоединенные (=циклические) (см., например, § 74 [I8] или § 8 гл. 5 [I9]) векторы **можно найти** как решения систем уравнений в общем случае с трехдиагональными матрицами меньшей размерности, чем размерности исходной матрицы $\mathbb{C}$(I.2):

I°. Пусть здесь и всюду далее λ_j – любое собственное значение матрицы $\mathbb{C}$ (I.2) при любых $j \in [K_\ell, K_{\ell+1}-1] \subset [S_i, S_{i+1}-1]$ для любых ℓ. Тогда, если для $\tau_{K_{\ell 1}} = 0$ выполняются условия $K_{\ell 1} < K_\ell$ и $\{\tau_i \neq 0\}_{i=K_{\ell 1}+1}^{K_\ell}$, и для $\rho_{K_{\ell 2}} = 0$ выполняются условия $K_{\ell+1} < K_{\ell 2}$ и $\{\rho_i \neq 0\}_{i=K_{\ell+1}}^{K_{\ell 2}-1}$, а также здесь и всюду далее существуют такие $j' \neq j$ для любых $1 \leqslant j' \leqslant m$, что $\lambda_j = \lambda_{j'}$, то

I. Если $j' \notin [K_{\ell 1}, K_\ell - 1]$ и $j' \notin [K_{\ell+1}, K_{\ell 2}-1]$, то

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{\mathbb{C}}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_\ell}^{K_{\ell+1}-1} = 0, & \text{если } j' \notin [K_\ell, j-1] \\ \tilde{\mathbb{C}}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_\ell}^{K_{\ell+1}-1} = U(\lambda_{j'})\Big|_{K_\ell}^{K_{\ell+1}-1}, & \text{если } j' \in [K_\ell, j-1] \\ \overset{\circ}{\mathbb{C}}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_{\ell 1}}^{K_\ell-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline -\tau_{K_\ell} U_{K_\ell}(\lambda_j) \end{bmatrix}, & \\ \hat{\mathbb{C}}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_{\ell+1}}^{K_{\ell 2}-1} = \begin{bmatrix} -\rho_{K_{\ell+1}} U_{K_{\ell+1}-1}(\lambda_j) \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} & \end{array}\right\} \tag{2.37}$$

---

x) Здесь S_i – номер пары ($\tau_{S_i} = 0 = \rho_{S_i}$)-внедиагональных элементов матрицы $\mathbb{C}$ (I.2), обращающихся в нуль одновременно (условие D), а K_n -номера любых (над) поддиагональных элементов матриц $\mathbb{C}$ (I.2) в интервале $(S_i+1) \leqslant K_n \leqslant (S_{i+1}-1)$, обращающихся в нуль, но не одновременно (условие F). Таким образом интервалами $[1, S_1-1], [S_i, S_{i+1}-1]_{i=1}^{n-1}, [S_n, m]$ исходная матрица $\mathbb{C}$ (I.2) разбивается на систему ($n+1$) не связанным между собой трехдиагональных матриц. Каждая из таких матриц, в свою очередь, интервалами $[S_i, K_1-1], [K_\ell, K_{\ell+1}-1]_{\ell=1}^{N-1}, [K_N, S_{i+1}-1]$ разбивается на связанные блоки (также трехдиагональные матрицы, но ещё меньшей размерности).

2. Если $j' \in [K_{i1}, K_\ell - 1]$ и $j' \notin [K_{\ell+1}, K_{i2}-1]$, то

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_{i1}}^{K_{\ell+1}-1} = U(\lambda_{j''})\Big|_{K_{i1}}^{K_{\ell+1}-1}, \text{ где } \lambda_{j''} = \lambda_j,\ j'' \in [K_{i1}, j-1] \\ &\hat{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_{\ell+1}}^{K_{i2}-1} = \begin{bmatrix} -P_{K_{\ell+1}} U_{K_{\ell+1}-1}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.38)$$

3. Если $j' \in [K_{\ell+1}, K_{i2}-1]$ и $j' \notin [K_{i1}, K_\ell - 1]$ (или $j' \in [K_{i1}, K_\ell - 1]$), а $j' \in [\tilde{K}_{i1}, \tilde{K}_{i+1}-1]$ и $j' \notin [\tilde{K}_{i+1}, K_{i2}-1]$ при $K_{\ell+1} \leq \tilde{K}_{i1} < \tilde{K}_{i+1} < K_{i2}$, то

$$\left.\begin{aligned} &U(\lambda_j)\Big|_{K_{i1}}^{\tilde{K}_{i1}-1} = 0 \\ &\tilde{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{\tilde{K}_{i1}}^{\tilde{K}_{i+1}-1} = 0 \\ &\hat{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{\tilde{K}_{i+1}}^{K_{i2}-1} = \begin{bmatrix} -P_{\tilde{K}_{i+1}} U_{\tilde{K}_{i+1}-1}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.39)$$

II°. Пусть $K_{i1} = K_\ell$ и $K_{\ell+1} < K_{i2}$, тогда:

I. Если $j' \notin [\tilde{K}_{i1}, j-1]$ и $j' \notin [K_{\ell+1}, K_{i2}-1]$, где здесь и всюду далее в пункте II° $\tilde{K}_{i1} < (K_{i1} = K_\ell)$ такое, что существует $\tau_{\tilde{K}_{i1}} \neq 0$ а $\{\tau_s = 0\}_{s=\tilde{K}_{i1}+1}^{K_{i1}}$, то

$$\left.\begin{aligned} &U(\lambda_j)\Big|_{\tilde{K}_{i1}}^{K_\ell - 1} = 0 \\ &\tilde{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_\ell}^{K_{\ell+1}-1} = 0 \\ &\hat{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_{\ell+1}}^{K_{i2}-1} = \begin{bmatrix} -P_{K_{\ell+1}} U_{K_{\ell+1}-1}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.40)$$

2. Если $j' \notin [\tilde{K}_{i1}, j-1]$ и $j' \in [\tilde{K}_{i+1}, \tilde{K}_{i+2}-1]$ $(\in [K_{\ell+1}, K_{i2}-1])$ при $(K_{\ell+1} \leq \tilde{K}_{i+1} < \tilde{K}_{i+2} < K_{i2})$, то

$$\left.\begin{aligned} &U(\lambda_j)\Big|_{\tilde{K}_{i1}}^{\tilde{K}_{i+1}} = 0 \\ &\tilde{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{\tilde{K}_{i+1}}^{\tilde{K}_{i+2}-1} = 0 \\ &\hat{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{\tilde{K}_{i+2}}^{K_{i2}-1} = \begin{bmatrix} -P_{\tilde{K}_{i+2}} U_{\tilde{K}_{i+2}-1}(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.41)$$

3. Если $j' \in [\tilde{K}_{i1}, j-1]$ и $\tau_{K_\tau} = 0$ и $\{\tau_s \neq 0\}_{s=K_\tau+1}^{\hat{K}_{i1}}$ $(S_i \leq K_\tau < \tilde{K}_{i1})$, то

$$\left.\begin{aligned} &\hat{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{\tilde{K}_{i1}}^{K_{i2}-1} = U(\lambda_{j'})\Big|_{\tilde{K}_{i1}}^{K_{i2}-1} \\ &\tilde{\tilde{C}}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_\tau}^{\tilde{K}_{i1}-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{\tilde{K}_{i1}} U_{\tilde{K}_{i1}}(\lambda_j) \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.42)$$

III°. Пусть $K_{i1} < K_\ell$ и $K_{\ell+1} = K_{i2}$, тогда

I. Если $j' \notin [K_{i1}, j-1]$, то

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_\ell}^{K_{\ell+1}-1} = 0 \\ &\tilde{\tilde{C}}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_{i1}}^{K_\ell - 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{K_\ell} U_{K_\ell}(\lambda_j) \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.43)$$

2. Если $j' \in [K_{i1}, j-1]$, то

$$\tilde{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_{i1}}^{K_{\ell+1}-1} = U(\lambda_j)\Big|_{K_{i1}}^{K_{\ell+1}-1} \qquad (2.44)$$

IV°. Пусть $K_{i1} = K_\ell$ и $K_{\ell+1} = K_{i2}$, а также существует такое $\tilde{K}_{s1} < (K_\ell = K_{i1})$,

что $\tau_{\tilde{K}_{s1}} \neq 0$, но $\{\tau_i = 0\}_{i=\tilde{K}_{s1}+1}^{K_\ell}$, тогда

I. Если $j' \in [\tilde{K}_{s1}, j-1]$, то

$$\tilde{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_\ell}^{K_{\ell+1}-1} = U(\lambda_{j'})\Big|_{K_\ell}^{K_{\ell+1}-1} \qquad (2.45)$$

2. Если $j' \notin [\tilde{K}_{s1}, j-1]$, то

$$\tilde{C}(\lambda_j)\,U(\lambda_j)\Big|_{K_\ell}^{K_{\ell+1}-1} = 0 \qquad (2.46)$$

Всюду выше использовали обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\hat{C}(\lambda)\,U(\lambda)\Big|_i^j \equiv \begin{bmatrix} q_i(\lambda) & \tau_{i+1} & & & \\ P_{i+1} & q_{i+1}(\lambda) & \tau_{i+2} & & \\ & & \cdots & & \\ & & P_{j-1} & q_{j-1}(\lambda) & \tau_j \\ & & & P_j & q_j(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i(\lambda) \\ U_{i+1}(\lambda) \\ \cdots \\ U_{j-1}(\lambda) \\ U_j(\lambda) \end{bmatrix} \\ &U(\lambda)\Big|_i^j \equiv (U_i(\lambda), U_{i+1}(\lambda), \cdots, U_j(\lambda))^T \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_i U_i(\lambda) \end{bmatrix} \equiv (0, 0, \cdots, 0, (-\tau_i U_i(\lambda)))^T \\ &\begin{bmatrix} -P_i U_{i-1}(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \equiv ((-P_i U_{i-1}(\lambda)), 0, \cdots, 0, 0)^T \end{aligned}\right\} \qquad (2.47)$$

где

T – знак транспонирования, а также полагаются равными нулю все неуказанные в соответствующих интервалах каждого из построенных матричных процессов компоненты как собственных, так и присоединенных векторов. Например, для процессов II° пункта полагается $\{U_i(\lambda_j) = 0\}_{i=1}^{\tilde{K}_{i1}-1}$ и $\{U_i(\lambda_j) = 0\}_{i=K_{i2}}^{m}$.

Доказательство теоремы основано на лемме I, а также на громоздком логическом анализе (с учетом условий D и F в общем случае на элементы матрицы), который мы здесь опускаем в силу ограниченности объема публикации[x]. Отметим лишь, что доказательство существенным образом опирается на разбиение матрицы C (I.2) в соответствии с (2.35) и (2.36) на несвязанные трехдиагональные подматрицы и связанные блоки. Доказательство также стало возможным благодаря фактам $\det \tilde{C}(\lambda) = 0$ и $\det \tilde{\tilde{C}}(\lambda) \neq 0 \neq \det \hat{C}(\lambda)$, где $\tilde{C}(\lambda)$ – трехдиагональные матрицы размерностей $(K_{\ell+1} - K_\ell)$ в соответствующих одноименных интервалах, а также $\tilde{\tilde{C}}(\lambda)$ и $\hat{C}(\lambda)$ – трехдиагональные матрицы соответствующих размерностей. На доказательстве $\det \tilde{C}(\lambda) = 0$ и $[\det \tilde{\tilde{C}}(\lambda) \neq 0 \neq \det \hat{C}(\lambda)]$ (опять-таки в силу ограниченности объема данной работы) мы остановимся в следующей публикации. Нетрудно видеть, что для построения присоединенных (=циклических)

---

[x] Логика всего доказательства воспроизведена в соответствующих программах, которые будут также опубликованы. Несмотря на внешнюю громоздкость приведенных результатов, программы, их реализующие, обладают более высокой эффективностью в сравнении с известными.

векторов, дополняющих собственные векторы до полного базиса в R_m в случае кратных собственных значений и матриц непростой структуры, мы воспользовались, как видно, например, из $(2.37)_{2)}$ известными процессами [I8 и I9] . Теорема установлена.

Замечание 7. Нетрудно видеть, что пункт IV теоремы 2 соответствует условию С) леммы I. Отметим также, что: I). Решение всех однородных систем уравнений $\hat{C}(\lambda)U(\lambda)=0$ (для любого λ в том числе кратного) со своей, как видели, матрицей $\hat{C}(\lambda)$ осуществляется методами (2.26) либо (2.27)+(2.34) теоремы I. 2). Решение же соответствующих неоднородных систем с невырожденными матрицами $\hat{\hat{C}}(\lambda)$ и $\hat{C}(\lambda)$ осуществляется любыми известными методами, в частности немонотонной прогонки. Ниже мы остановимся на проверке известных требований[x)] к свойством базисов из собственных векторов и для полноты картины проверим эти свойства для наших представлений.

Лемма 2. Пусть C(I.2) - вещественная несимметрическая трехдиагональная матрица, удовлетворяющая условиям теоремы I, т.е. все её собственные значения различны и все внедиагональные элементы отличны от нуля. Пусть также C^T - матрица, транспонированная к ней. Тогда собственные векторы матриц C и C^T , записанные в виде любого из представлений теоремы I, линейно независимы, но не образуют полные ортогональные системы в R_m , а образуют лишь биортогональные системы:

$$\left.\begin{cases}(C-\lambda E)\Phi(\lambda)=0 & \text{и}\quad (C^T-\mu E)\Psi(\lambda)=0\\ (\Phi(\lambda_i),\Phi^T(\lambda_j))\neq 0 & \text{и}\quad (\Psi(\lambda_j),\Psi(\lambda_i))\neq 0\end{cases}\right\}\ \text{но}\ (\Phi(\lambda),\Psi(\lambda))=0\ . \qquad (2.48)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательности $\left\{\prod_{k=2}^{n}[-q_{k-1}(\lambda)\Lambda_k(\lambda)]\ ;\ \prod_{k=2}^{n}[-q_k^{-1}(\lambda)\tau_k^{-1}(\lambda)]\ ;\ \prod_{k=2}^{n}[-T_k^{-1}(\lambda)]\ \text{и}\ \prod_{k=2}^{n}[-L_{k-1}^{-1}(\lambda)]\right\}_{n=1}^{m}$, где $\prod_{k=2}^{1}[\cdot]=1$, а $\{\Lambda_k(\lambda),\tau_k(\lambda),\ T_k(\lambda)\ \text{и}\ L_k(\lambda)\}$ определены в теореме I, инвариантны относительно процедуры транспонирования матрицы C (I.2). Из указанного свойства сразу следует, что если в соответствии с теоремой I выбрать, например, собственные векторы матрицы C (I.2) в виде $\{\Phi_n(\lambda)=P_n\varphi_n(\lambda)\}_{n=1}^{m}$ для любого λ , то собственные векторы транспонированной матрицы C^T запишутся в виде

$$\{\Psi_n(\mu)=R_n\varphi_n(\mu)\}_{n=1}^{m}\ ,\ \text{где}$$

$$\varphi_n(\alpha)=\prod_{k=2}^{n}[-T_k^{-1}(\alpha)]\ ,\ n=1,2,\dots,m\ ;\ \alpha=\begin{cases}\lambda\\ \mu\end{cases} \qquad (2.49)$$

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}p_k\quad \text{и}\quad R_n=\prod_{k=2}^{n}r_k\ ,\ \text{где}\ P_1=1=R_1\ ;\ n=2,3,\dots,m\ .$$

Аналогично можно поступить и с другими представлениями теоремы I, выбрав лишь в другом виде последовательности $\{P_n, R_n\}$. Используя теперь (2.49), легко показать (2.48).

x) Известно, что собственные значения вещественных матриц C и C^T совпадают. Собственные же векторы каждой из матриц C или C^T линейно независимы, но не образуют ортогональных систем . Однако эти системы образуют биортогональные базисы.

Заключение

В заключение настоящей работы отметим, что получены новые эффективные методы (теоремы I и 2) нахождения собственных векторов любых вещественных трехдиагональных матриц без всяких ограничений на их элементы и поведение главных угловых миноров.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н. Н. Говоруну за интерес к настоящим исследованиям и предоставленную возможность работы над ними.

Литература

I. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М.,Физматиз, I963.

2. В. В. Воеводин. Вычислительные основы линейной алгебры. М.,Наука, I977.

3. Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М., Наука, I970.

4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. В сборнике: Вычислительные методы линейной алгебры. Параллельные вычисления. Под редакцией В.В.Воеводин (записки научных семинаров ЛОМИ, том, 54). Наука , Ленинградское отделение, Ленинград, I975.

5. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. Матрицы и вычисления. М., Наука, I984.

6. В. П. Ильин, Ю. И. Кузнецов. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М., Наука , I985.

7. Х. Д. Икрамов. Численные методы для симметрических линейных систем. М., Наука , I988.

8. Уилкинсон Райнш. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М., Маш. стр., I976.

9. Н. С. Бахвалов, Численные методы. М., Наука , т.I, I973.

I0. А. А. Самарский, Е. С. Николаев. Метод решения сеточных уравнений. М., Наука, I978.

II. J.W.Rainey. On comparatively stable tridiagonalization methods. Numer.Math.,1969.13, N°.4,316-322 .

I2. T.Yamamoto. On Lanczos 'algorithm for tri-diagonalization . J.Sch.Hiroshima Unw. Ser.A-I,1968,32,N°.2,256-284 .

I3. Кублановская В. Н. Приведение произвольной матрицы к трехдиагональному виду. ЖВМ и МФ , I964. 4,№ 3, 544.

14. W.L.Walmann.,R.J.Lambert . T-algorithm for tridiagonalization. SIAM J. Appl.Math., 1965,13,N°.4,1069-1078 .
15. J.W.Rainey ,G.J.Habetler. An application of the LR factorization to sequential tridiagonalization methods.SIAM J. Appl.Math. 1969,17,N°.1,212-221 .
16. Г. А. Емельяненко, Т. Т. Рахмонов. ОИЯИ, РII-87-524, Дубна,1987.
17. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, РII-88-~~541~~ 451, РII-88-~~542~~ 452, РII-88-~~543~~ 453, Дубна, 1988.
18. В. В. Воеводин. Линейная алгебра. М., Наука , 1980.
19. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Линейная алгебра. М.,Наука, 1978.
20. В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. Начало теории вычислительных метод. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. Минск, Наука и техника , 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 октября 1988 года.

Емельяненко Г.А., Им Ен Сек

Р11-88-736

О методах нахождения собственных векторов вещественных трехдиагональных матриц

Получены новые эффективные методы нахождения собственных векторов любых вещественных трехдиагональных матриц.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Im Yen Sec

P11-88-736

On Eigenvalue Vector Calculation Methods for Real Tridiagonal Matrices

Effective (unknown until) methods for eigenvalue vector calculation for any real tridiagonal matrices are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988