сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-722

И.Е.Жидкова

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ КРЫЛОВА – БОГОЛЮБОВА В ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Для уравнений с линейной частью, имеющей периодические коэффициенты)

1988

В основе теории бетатронных колебаний в циклических ускорителях лежит исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений [2,3] вида:

$$x''+(1-n_o(\theta))x = \varepsilon F_{x1}+\varepsilon^2 F_{x2}+\dots$$
$$z''+n_o(\theta)z = \varepsilon F_{z1}+\varepsilon^2 F_{z2}+\dots \quad , \qquad \text{(I)}$$

где $n_o(\theta)$ – периодическая по θ функция, связанная с показателем магнитного поля, F_{xk}, F_{zk} $(k=1,2,\dots)$ – полиномы от x, x', z, z' и периодические по θ функции, ε – малый параметр ($'$ – дифференцирование по θ).

Для таких задач даже в линейном приближении получаются дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами (уравнение типа Хилла) и нахождение области устойчивых решений представляется трудоемкой задачей. При учете нелинейных членов задача еще более усложняется, и достаточно общей теории подобных уравнений не существует. Можно воспользоваться методом усреднения [3] и получить усредненные (укороченные) уравнения, которые либо интегрируются, либо позволяют исследовать движение на фазовой плоскости.

В настоящей работе описывается комплекс программ, реализующих метод усреднения для системы вида (I) до членов порядка $\varepsilon^n (n=1,2,\dots)$ включительно.

Решение системы (I) исследуется в окрестности резонанса $k_x x+k_z z = q$, где k_x, k_z, q – целые. В этой окрестности

$$n_o(\theta) = n_{oo}(\theta)+\varepsilon\cdot\Delta_z\cdot g_z(\theta) \quad , \qquad (2)$$

где Δ_z – расстройка (отклонение от идеального резонанса), $n_{oo}(\theta) = n_o(\theta)$ точно в резонансе (при $\Delta_z=0$) и

$$g_z(\theta)= 2i\left\{\frac{a_z(f_z'+i\nu_z f_z)e^{i\nu_z\theta} - a_z^*\left[(f_z^*)'-i\nu_z f_z^*\right]e^{-\nu_z\theta}}{a_z f_z e^{i\nu_z\theta} + a_z^* f_z^* e^{-i\nu_z\theta}}\right\} \quad ,$$

ν_x, ν_z – частоты бетатронных колебаний по x и z соответственно, а $f_z(\theta)$ – периодическая по θ комплексная функция (функция Флоке), которая связана с решением однородного уравнения $z''+n_{oo}(\theta)z=0$, a_z – произвольная комплексная постоянная, определяемая из начальных условий. Функция $g_z(\theta)$ – действительная. Аналогичным образом вводится расстройка Δ_x (и функция $g_x(\theta)$), что позволяет в дальнейшем работать с резонансами вида $k_x X=q$ (т.е. при $z=0$).

Учитывая (2), от системы (I) переходим к системе уравнений вида:

$$x''+(1-n_{oo}(\theta))x=\varepsilon(F_{x1}-\Delta_x g_x(\theta)\,x)+\varepsilon^2F_{x2}+\dots$$
$$z''+n_{oo}(\theta)z=\varepsilon(F_{z1}-\Delta_z\,g_z(\theta)\,z)+\varepsilon^2F_{z2}+\dots \qquad (3)$$

Делая в (3) замену переменных

$$x=A_x\,f_x(\theta)e^{i\nu_x\theta}+A_x^*\,f_x^*(\theta)e^{-i\nu_x\theta},$$
$$x'=A_x(f_x'(\theta)+i\nu_x f_x(\theta))e^{i\nu_x\theta}+A_x^*\left[(f_x^*(\theta))'-i\,\nu_x f_x^*(\theta)\right]e^{-i\nu_x\theta}, \qquad (4)$$
$$z=A_z f_z(\theta)e^{i\nu_z\theta}+A_z^*\,f_z^*(\theta)e^{-i\nu_z\theta},$$
$$z'=A_z(f_z'(\theta)+i\nu_z f_z(\theta))e^{-i\nu_z\theta}+A_z^*\left[(f_z^*(\theta))'-i\,\nu_z f_z^*(\theta)\right]e^{-i\nu_z\theta},$$

получаем в новых переменных систему уравнений в стандартной форме /I/:

$$A_x'=-\frac{1}{2i}\,f_x^*(\theta)e^{-i\nu_x\theta}(\varepsilon\tilde F_{x1}+\varepsilon^2\tilde F_{x2}+\dots),$$
$$(A_x^*)'=\frac{1}{2i}f_x(\theta)e^{i\nu_x\theta}(\varepsilon\tilde F_{x1}+\varepsilon^2\tilde F_{x2}+\dots), \qquad (5)$$
$$A_z'=-\frac{1}{2i}\,f_z^*(\theta)e^{-i\nu_z\theta}(\varepsilon\tilde F_{z1}+\varepsilon^2\tilde F_{z2}+\dots),$$
$$(A_z^*)'=\frac{1}{2i}\,f_z(\theta)e^{i\nu_z\theta}(\varepsilon\tilde F_{z1}+\varepsilon^2\tilde F_{z2}+\dots).$$

Теперь, используя некоторые замены переменных /I/, реализующие метод усреднения, получаем систему усредненных уравнений для новых комплексных переменных c_1,c_2,c_3,c_4 , не зависящих от θ :

$$c_1'=S_{11}c_1+\dots+S_{14}c_4+S_{15}c_1^2+\dots+S_{134}c_4^3+\dots$$
$$c_2'=S_{21}c_1+\dots+S_{24}c_4+S_{25}c_1^2+\dots+S_{134}c_4^3+\dots \qquad (6)$$
$$c_3'=S_{31}c_1+\dots+S_{34}c_4+S_{35}c_1^2+\dots+S_{134}c_4^3+\dots$$
$$c_4'=S_{41}c_1+\dots+S_{44}c_4+S_{45}c_1^2+\dots+S_{134}c_4^3+\dots,$$

где S_{kj} $(k=1,2,3,4\ ;\ j=1,2,\dots,134,\dots)$ – числовые коэффициенты ($S_{1j}=S_{2j}^*$, $S_{3j}=S_{4j}^*$) , связанные с реальной магнитной структурой конкретного ускорителя.

Введя обозначение $\varphi=k_x\Psi_x+k_z\Psi_z$, где $\Psi_{x,z}$ – переменные, соответствующие фазе, и сделав замену переменных

$$c_1=\frac{1}{2i}\,a_x e^{i\Psi_x}, \qquad c_2=-\frac{1}{2i}\,a_x e^{-i\Psi_x},$$
$$c_3=\frac{1}{2i}\,a_z e^{i\Psi_z}, \qquad c_4=-\frac{1}{2i}\,a_z e^{-i\Psi_z}, \qquad (7)$$
$$S_{kj}=\alpha_{kj}e^{i\beta_{kj}}, \qquad S_{kj}^*=\alpha_{kj}\,e^{-i\beta_{kj}},$$
$$k=1,2,3,4\ ;\quad j=1,2,\dots,134,\dots,$$

переходим к усредненной системе трех дифференциальных уравнений первого порядка в действительных переменных от a_x, a_z и φ :

$$a_x'=P_x(a_x,a_z)\sin\varphi+Q_x(a_x,a_z)\cos\varphi+R_x(a_x,a_z),$$
$$a_z'=P_z(a_x,a_z)\sin\varphi+Q_z(a_x,a_z)\cos\varphi+R_z(a_x,a_z), \qquad (8)$$
$$\varphi'=P_\varphi(a_x,a_z)\sin\varphi+Q_\varphi(a_x,a_z)\cos\varphi+R_\varphi(a_x,a_z),$$

где P_α, Q_α и R_α ($\alpha = x, z, \varphi$) – полиномы от a_x, a_z с числовыми коэффициентами, которые зависят, в частности, от функций Флоке f_x, f_z. Таким образом, изучение решений системы (I) сведено к изучению решений системы (8).

Все преобразования, связанные с построением системы уравнений вида (8), реализованы при помощи системы аналитического программирования REDUCE - 3.2 /4/.

Для построения усредненной системы уравнений вида (8) необходимо задать:

I. Конкретный вид правой части уравнения (I), т.е. функции $F_{x1}, F_{x2}, \ldots, F_{z1}, F_{z2}, \ldots$;

2. Явный вид резонанса, в окрестности которого надо построить усредненную систему уравнений.

3. Порядок аппроксимации n: $n=1, n=2, \ldots$

Для $n=2$ счет занимает 2-4 часа (в зависимости от исходного уравнения) времени центрального процессора и требует от I,5 до 3 М байтов оперативной памяти на ЭВМ ЕС-I06I. Кроме того, все промежуточные результаты и окончательный результат записываются на диск. Время счета существенно зависит от правой части системы (I) и порядка аппроксимации n, помимо этого, есть более слабая зависимость и от вида конкретного резонанса. Так, при $n=3$ может потребоваться 4–5М байтов оперативной памяти, а время счета может вырасти более чем в 2 раза.

В качестве тестов было проведено сравнение полученных укороченных уравнений (при $n=2$) для резонансов $2\nu_z - \nu_x = 1$ и $3\nu_x = 2$ с аналогичными результатами для тех же самых резонансов, но полученных с помощью описанного ранее пакета программ /5/. Доказана их идентичность.

Литература

I. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Аналитические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, Москва, I974.

2. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, Москва, I962.

3. Брук Г., Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, Москва, I962.

4. Hearn A.C. REDUCE User's Manual, Version 3.2, Rand Corporation, Santa Monica, CA 90406, USA, 1985.

5. Жидкова И.Е. ОИЯИ, РII - 88 - 7I6, Дубна, I988.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 сентября I988 года.

Жидкова И.Е. P11-88-722

Программная реализация метода усреднения Крылова - Боголюбова в высших приближениях для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. /Для уравнений с линейной частью, имеющей периодические коэффициенты/.

Дано описание пакета программ, реализующего метод усреднения Крылова - Боголюбова в высших приближениях для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Описаны возможности программ и реализуемый метод, даны оценки времени счета, требуемой оперативной памяти для работы с уравнениями, линейная часть которых имеет периодические коэффициенты.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод автора.

Zhidkova I.E. P11-88-722

Program Realization of Krylov - Bogolubov Averaging Method in High Approximations Applied to the System of Two Nonlinear Second Order Differential Equations with the Linear Part Having Periodic Coefficients

The program package for Krylov - Bogolubov averaging method in high approximations applied to the system of two nonlinear second order differential equations with the constant coefficients is described. The possibilities of programs, global algorithm, time and central processor memory estimations are done for equations which have the periodic coefficients before its linear part.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988