сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-714

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, И.Е.Жидкова

ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСОВ $2\nu_z+2\nu_x=3$, $3\nu_z-\nu_x=2$, $4\nu_z+\nu_x=4$ НА АМПЛИТУДЫ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

1988

При изучении нелинейных эффектов в теории циклических ускорителей [I-4] принято представлять компоненты магнитного поля в виде рядов по степеням поперечных отклонений x, z от равновесной орбиты. Исследование различных нелинейных резонансов высокого порядка [3-7,I0] приводит к необходимости учета в уравнениях движения нелинейностей все более высокого порядка. Как правило, нелинейные резонансы рассматриваются методом усреднения [8] в первом, в редких случаях во втором приближениях. Однако учет в уравнениях нелинейностей более высокого порядка требует рассмотрения резонансов также в более высоком приближении по степеням малого параметра.

В настоящей работе получены усредненные уравнения в третьем приближении по малому параметру (что соответствует полному числу оборотов частицы в ускорителе) для нелинейных резонансов $2\nu_z + 2\nu_x = 3$, $3\nu_z - \nu_x = 2$, $4\nu_z + \nu_x = 4$, проходящих достаточно близко от рабочей точки синхрофазотрона ОИЯИ. При этом преследуются в основном две цели:

I. Выяснить возможность применения машинной аналитики (с использованием системы REDUCE-3.2) [9] для указанной задачи.

2. Провести сравнительный анализ указанных резонансов в различных приближениях по степеням малого параметра.

Исходная система уравнений в третьем приближении по малому параметру имеет вид:

$$x'' + \nu_x^2 x = \varepsilon F_{x1} + \varepsilon^2 F_{x2} + \varepsilon^3 F_{x3}, \qquad \text{(I)}$$

$$z'' + \nu_z^2 z = \varepsilon F_{z1} + \varepsilon^2 F_{z2} + \varepsilon^3 F_{z3},$$

где F_{xk}, F_{zk} $(k=1,2,3)$ - полиномы от x, x', z, z' ($'$ означает дифференцирование по θ) с периодическими по θ коэффициентами $A_{kj}(\theta)$, $B_{kj}(\theta)$, ε - малый параметр. Явный вид функций F_{xk}, F_{zk} смотри в работе [I0]. Функции $A_{kj}(\theta)$ и $B_{kj}(\theta)$ разлагаются в ряд Фурье:

$$A_{\kappa j}(\theta) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} a_{\kappa j\alpha}\, e^{i\frac{2\pi}{T}\alpha\theta}, \qquad (2)$$

$$B_{\kappa j}(\theta) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} b_{\kappa j\alpha}\, e^{i\frac{2\pi}{T}\alpha\theta},$$

где T – период. Постоянные $a_{\kappa j\alpha}$, $b_{\kappa j\alpha}$ и T связаны с реальной магнитной структурой конкретного циклического ускорителя. Кроме того, обозначим:

$$\begin{aligned}
a^{(cos)}_{\kappa j\alpha} &= a_{\kappa j\alpha} + a_{\kappa j,-\alpha}, \\
a^{(sin)}_{\kappa j\alpha} &= i\,(a_{\kappa j\alpha} - a_{\kappa j,-\alpha}), \\
b^{(cos)}_{\kappa j\alpha} &= b_{\kappa j\alpha} + b_{\kappa j,-\alpha}, \\
b^{(sin)}_{\kappa j\alpha} &= i\,(b_{\kappa j\alpha} - b_{\kappa j,-\alpha}).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Проделав все необходимые преобразования и вычисления с помощью системы $REDUCE$ - 3.2 (так же как и в работе /10/), получаем следующие усредненные уравнения для вышеперечисленных резонансов:

I. В первом приближении (т.е. с точностью ε): для резонанса $2\nu_z + 2\nu_x = 3$:

$$\begin{aligned}
a'_x &= 0, \\
a'_z &= 0, \\
\varphi' &= \frac{\varepsilon}{\nu_z} b_{100},
\end{aligned} \qquad (4_{\mathrm{I}})$$

для резонанса $3\nu_z - \nu_x = 2$:

$$\begin{aligned}
a'_x &= 0, \\
a'_z &= 0, \\
\varphi' &= \frac{3}{2\nu_z}\varepsilon b_{100}
\end{aligned} \qquad (5_{\mathrm{I}})$$

для резонанса $4\nu_z + \nu_x = 4$:

$$\begin{aligned}
a'_x &= 0, \\
a'_z &= 0, \\
\varphi' &= \frac{2}{\nu_z}\varepsilon b_{100}.
\end{aligned} \qquad (6_{\mathrm{I}})$$

Здесь a_x, a_z – переменные, соответствующие амплитуде по направлению x и z соответственно, $\varphi = k_x\psi_x + k_z\psi_z$ (для резонанса $k_x\nu_x + k_z\nu_z = q$) и ψ_x, ψ_z – переменные, соответствующие фазе, b_{100} – расстройка (отклонение от идеального резонанса).

II. Во втором приближении (т.е. с точностью ε^2):

для резонанса $2\nu_x + 2\nu_z = 3$:

$$\begin{aligned}
a'_x &= a_x(a_z^2 H_{11}\sin\varphi + a_z^2 H_{14}\cos\varphi) + a_x(a_x^2 H_{18} + a_z^2 H_{19}), \\
a'_z &= a_z(a_x^2 H_{21}\sin\varphi + a_x^2 H_{24}\cos\varphi) + a_z H_{27}, \\
\varphi' &= (a_x^2 H_{32} + a_z^2 H_{33})\sin\varphi + (a_x^2 H_{35} + a_z^2 H_{36})\cos\varphi + \\
&\quad + (H_{313} + a_x^2 H_{314} + a_z^2 H_{315}),
\end{aligned} \qquad (4_{\mathrm{II}})$$

для резонанса $3\nu_z - \nu_x = 2$:

$$\begin{aligned}
a'_x &= a_x(a_x^2 H_{18} + a_z^2 H_{19}), \\
a'_z &= a_z H_{27}, \\
\varphi' &= H_{313} + a_x^2 H_{314} + a_z^2 H_{315},
\end{aligned} \qquad (5_{\mathrm{II}})$$

для резонанса $4\nu_z + \nu_x = 4$:

$$\begin{aligned}
a'_x &= a_x(a_x^2 H_{18} + a_z^2 H_{19}), \\
a'_z &= a_z H_{27}, \\
\varphi' &= H_{313} + a_x^2 H_{314} + a_z^2 H_{315}.
\end{aligned} \qquad (6_{\mathrm{II}})$$

Здесь и в дальнейшем все коэффициенты $H_{\kappa j}$ и $H_{\kappa jn}$ различны для различных резонансов и в явном виде приведены в приложении I.

III. В третьем приближении (с точностью ε^3):

для резонанса $2\nu_z + 2\nu_x = 3$.

$$\begin{aligned}
a'_x &= a_x(a_x^2 H_{11}\sin\varphi + a_z^2 H_{14}\cos\varphi) + a_x(a_x^2 H_{18} + a_z^2 H_{19}), \\
a'_z &= a_z(a_x^2 H_{21}\sin\varphi + a_z^2 H_{24}\cos\varphi) + a_z(H_{27} + a_x^2 H_{28} + a_z^2 H_{29}), \\
\varphi' &= (a_x^2 H_{32} + a_z^2 H_{33})\sin\varphi + (a_x^2 H_{35} + a_z^2 H_{36})\cos\varphi + \\
&\quad + (H_{313} + a_x^2 H_{314} + a_z^2 H_{315}),
\end{aligned} \qquad (4_{\mathrm{III}})$$

для резонанса $3\nu_z - \nu_x = 2$

$$
\begin{aligned}
a'_x &= a_x\,(a_x^2 H_{18} + a_z^2 H_{19}), \\
a'_z &= a_z\,(H_{27} + a_x^2 H_{28} + a_z^2 H_{29}), \\
\varphi' &= H_{313} + a_x^2 H_{314} + a_z^2 H_{315},
\end{aligned}
\qquad (5_{III})
$$

для резонанса $4\nu_z + \nu_x = 4$

$$
\begin{aligned}
a'_x &= a_z^4 H_{13}\sin\varphi + a_z^4 H_{16}\cos\varphi + a_x(a_x^2 H_{18} + a_z^2 H_{19}), \\
a'_z &= a_x a_z^3 H_{23}\sin\varphi + a_x a_z^3 H_{26}\cos\varphi + a_z(H_{27} + a_x^2 H_{28} + a_z^2 H_{29}), \\
\varphi' &= \frac{1}{a_x}\Big\{a_z^2(a_x^2 H_{35} + a_z^2 H_{36})\sin\varphi + \\
&\quad + a_z^2(a_x^2 H_{311} + a_z^2 H_{312})\cos\varphi\Big\} + \\
&\quad + (H_{313} + a_x^2 H_{314} + a_z^2 H_{315}).
\end{aligned}
\qquad (6_{III})
$$

В первом приближении усредненные уравнения (4_I), (5_I) и (6_I) имеют очевидное решение $a_x = C_x = const$, $a_z = C_z = const$. Постоянные C_x, C_z определяются в начальный момент условиями инжекции частиц и, следовательно, влияние резонансов определяется условиями инжекции.

Рассмотрим уравнения для этих резонансов во втором приближении, т.е. системы (4_{II}), (5_{II}) и (6_{II}).

Рассмотрим сначала систему

$$
\begin{aligned}
a'_x &= a_x\,(a_x^2 H_{18} + a_z^2 H_{19}), \\
a'_z &= a_z H_{27}.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Из второго уравнения (7) находим:

$$
a_z = a_{z_0} e^{H_{27}\theta}, \qquad (8)
$$

где a_{z_0} – начальная (при $\theta = 0$) амплитуда частицы. Учитывая явный вид H_{27} (см. приложение I), для резонансов $3\nu_z - \nu_x = 2$ и $4\nu_z + \nu_x = 4$ получаем:

$$
a_z = a_{z_0} e^{\frac{1}{4\nu_z^2}\varepsilon^2 b_{100}^2 \theta}, \qquad (9)
$$

где b_{100} – расстройка. При θ : $\theta = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ амплитуда a_z является медленно растущей (от значения a_{z_0}) функцией. Таким образом, ограниченность амплитуды a_z в окрестности резонансов $3\nu_z - \nu_x = 2$ и $4\nu_z + \nu_x = 4$ определяется условиями инжекции, которые определяют начальную амплитуду a_{z_0}.

Используя решение (8), для амплитуды a_x в системе (7) получаем уравнение Бернулли, откуда находим a_x :

$$
a_x = \frac{1}{\sqrt{e^{-\int 2a_{z_0}^2 H_{19} e^{2H_{27}\theta} d\theta} \cdot \left\{C + \int -2H_{18} e^{\int 2a_{z_0}^2 H_{19} e^{2H_{27}\theta} d\theta} d\theta\right\}}}, \qquad (10)
$$

где C – константа интегрирования. При некоторых параметрах магнитного поля $a_{kj\alpha}$, $b_{kj\alpha}$ (входящих в постоянные H_{18}, H_{19}, H_{27}) амплитуды a_x будут ограничены в окрестностях резонансов $3\nu_z - \nu_x = 2$, и $4\nu_z + \nu_x = 4$ при $\theta = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$. При наличии возможности варьирования этих параметров можно добиться ограниченности амплитуды a_x.

Рассмотрим теперь систему усредненных уравнений (4_{II}) для резонанса $2\nu_z + 2\nu_x = 3$ во втором приближении. Если выполнены ограничения

$$
\left|a_{223}^{(\cos)}\right| \le \varepsilon, \quad \left|a_{223}^{(\sin)}\right| \le \varepsilon, \quad \left|b_{213}^{(\cos)}\right| \le \varepsilon, \quad \left|b_{213}^{(\sin)}\right| \le \varepsilon, \qquad (11)
$$

то, пренебрегая членами порядка ε^3 и выше, мы свели систему (4_{II}) к системе уравнений вида (5_{II}) и, следовательно, получаем в явном виде решения для a_x и a_z вида (9),(10).

Таким образом, мы получаем, что во втором приближении устойчивость движения частицы в окрестности каждого резонанса (т.е. ограниченность амплитуд) достигается: 1) условиями инжекции, что гарантирует ограниченность амплитуды a_z, 2) выбором при возможности параметров магнитного поля a_{110}, a_{120} (входящих в H_{18}, H_{19}), чем достигается ограниченность амплитуды a_x и 3) для резонанса $2\nu_z + 2\nu_x = 3$, выполнением дополнительных ограничений (11).

Перейдем теперь к третьему приближению. Рассмотрим систему (5_{III}) для резонанса $3\nu_z - \nu_x = 2$. Если выполнено ограничение

$$
\left|-\frac{b_{100}}{4\nu_z^2}\left(b_{210} + \nu_x^2 b_{230}\right)\right| \le \varepsilon, \qquad (12)
$$

то, пренебрегая членами порядка ε^4 и выше, получаем для амплитуд систему уравнений

$$
\begin{aligned}
a'_x &= a_x\,(a_x^2 H_{18} + a_z^2 H_{19}), \\
a'_z &= a_z\,(H_{27} + a_z^2 H_{29}).
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Для амплитуды a_z имеем уравнение Бернулли, откуда находим

$$a_z = \frac{1}{\sqrt{e^{-\int 2H_{27}d\theta}\left\{\int -2H_{29}e^{\int 2H_{27}d\theta}d\theta + C\right\}}}, \qquad (I4)$$

где C – постоянная интегрирования. Подставляя полученное решение в первое уравнение (I3), получаем для a_x также уравнение Бернулли, откуда

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{e^{-\int 2a_z^2 H_{19}d\theta}\cdot\left\{-2H_{18}e^{\int 2a_z^2 H_{19}d\theta}d\theta + C_1\right\}}}, \qquad (I5)$$

где a_z определяется формулой (I4), C_1 -константа. Подбирая, при наличии возможности, соответствующим образом параметры магнитного поля $a_{kj\alpha}$, $b_{kj\alpha}$, входящие в коэффициенты H_{27}, H_{29} и H_{18}, H_{19}, можно добиться ограниченности амплитуд a_x, a_z в окрестности резонанса $3\nu_z - \nu_x = 2$ при $\theta = O(\frac{1}{\varepsilon^3})$ и если выполнены ограничения (I2).

Рассмотрим теперь систему уравнений (4_{III}) для резонанса $2\nu_z + 2\nu_x = 3$. Если выполнены ограничения:

$$\left|-\frac{1}{16\nu_x}a_{223}^{(cos)}\right| \le \varepsilon^2, \qquad \left|\frac{1}{16\nu_x}a_{223}^{(sin)}\right| \le \varepsilon^2, \qquad (I6)$$

$$\left|-\frac{1}{16\nu_x}b_{213}^{(cos)}\right| \le \varepsilon^2, \qquad \left|\frac{1}{16\nu_x}b_{213}^{(sin)}\right| \le \varepsilon^2,$$

и, кроме того, выполнено неравенство (I2), то, пренебрегая членами порядка ε^4 и выше, мы сводим систему (4_{III}) к системе вида (5_{III}) и в явном виде получаем для амплитуд a_x, a_z решения вида (I4),(I5). Ограничения (I6) накладываются на те же самые параметры магнитного поля, что и во втором приближении для этого резонанса. Но ограничения (I6) более жесткие, чем (II). Кроме того, появляется дополнительное условие (I2).

При исследовании системы (6_{III}) для резонанса $4\nu_z + \nu_x = 4$ поступаем аналогично. Если выполнено ограничение (I2) и, кроме того,

$$\left|\frac{1}{32\nu_x}\left(a_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 a_{374}^{(sin)}\right)\right| \le \varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{32\nu_x}\left(a_{324}^{(cos)} - \nu_z^2 a_{374}^{(cos)}\right)\right| \le \varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{32\nu_z}\left(b_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)}\right)\right| \le \varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{32\nu_z}\left(b_{324}^{(cos)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)}\right)\right| \le \varepsilon,$$

то сводим систему уравнений (6_{III}) к системе вида (5_{III}) и получаем в явном виде решения вида (I4),(I5).

Таким образом, можно добиться ограниченности амплитуд a_x, a_z под влиянием каждого из трех резонансов в третьем приближении (т.е. при точности до членов порядка ε^3 включительно и для $\theta = O(\frac{1}{\varepsilon^3})$), выполнив указанные выше ограничения для коэффициентов $a_{kj\alpha}$, $b_{kj\alpha}$ разложения (2).

Следует подчеркнуть, что предполагаемые нами ограничения являются достаточными, но не необходимыми.

Более общий способ исследования аналогичных систем уравнений заключается в построении интегралов движения. Для исследуемых в настоящей работе резонансов ограничения на параметры магнитного поля в этом случае становятся более жесткими. Результаты приведены в приложении II.

Таким образом, получены достаточные условия устойчивости поведения частицы под влиянием каждого из трех резонансов: $2\nu_z + 2\nu_x = 3$, $3\nu_z - \nu_x = 2$, $4\nu_z + \nu_x = 4$, в третьем (с точностью ε^3) приближении.

Приложение I

Резонанс $3\nu_z - \nu_x = 2$.

$$H_{18} = \frac{\varepsilon^2}{4} a_{130} \left(3\nu_x^2 a_{130} + a_{110}\right),$$

$$H_{19} = \frac{\varepsilon^2}{2} a_{130} \left(\nu_z^2 a_{140} + a_{120}\right),$$

$$H_{27} = \frac{\varepsilon^2}{4\nu_z^2} b_{100}^2,$$

$$H_{28} = -\frac{\varepsilon^3}{4\nu_z^2} b_{100} \left(\nu_x^2 b_{230} + b_{210}\right),$$

$$H_{29} = -\frac{3}{8\nu_z^2} \varepsilon^3 b_{100} \left(b_{220} + \nu_z^2 b_{240}\right),$$

$$H_{313} = \frac{3}{2\nu_z} \varepsilon b_{100},$$

$$H_{314} = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{8\nu_x}\left(\nu_x^2 a_{230} + 3a_{210}\right) - \frac{3}{4\nu_z}\left(\nu_x^2 b_{230} + b_{210}\right)\right],$$

$$H_{315} = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{4\nu_x}\left(\nu_z^2 a_{240} + a_{220}\right) - \frac{3}{8\nu_z}\left(3b_{220} + \nu_z^2 b_{240}\right)\right] - \frac{\varepsilon^3}{2\nu_x} b_{100} a_{140} b_{110}.$$

Резонанс $2\nu_z + 2\nu_x = 3$.

$$H_{11} = -\frac{\varepsilon^2}{16\nu_x} a_{223}^{(\cos)},$$

$$H_{14} = \frac{\varepsilon^2}{16\nu_x} a_{223}^{(\sin)},$$

$$H_{18} = \frac{\varepsilon^2}{4} a_{130} \left(3\nu_x^2 a_{130} + a_{110}\right),$$

$$H_{19} = \frac{\varepsilon^2}{2} a_{130} \left(\nu_z^2 a_{140} + a_{120}\right),$$

$$H_{21} = -\frac{\varepsilon^2}{16\nu_z} b_{213}^{(\cos)},$$

$$H_{24} = \frac{\varepsilon^2}{16\nu_z} b_{213}^{(\sin)},$$

$$H_{27} = \frac{\varepsilon^2}{4\nu_z^2} b_{100}^2,$$

$$H_{28} = -\frac{\varepsilon^3}{4\nu_z^2} b_{100} \left(\nu_x^2 b_{230} + b_{210}\right),$$

$$H_{29} = -\frac{3}{8\nu_z^2} \varepsilon^3 b_{100} \left(\nu_z^2 b_{240} + b_{220}\right),$$

$$H_{32} = -\frac{\varepsilon^2}{8\nu_z} b_{213}^{(\sin)},$$

$$H_{33} = -\frac{\varepsilon^2}{8\nu_x} a_{223}^{(\sin)},$$

$$H_{35} = -\frac{\varepsilon^2}{8\nu_z} b_{213}^{(\cos)},$$

$$H_{36} = -\frac{\varepsilon^2}{8\nu_x} a_{223}^{(\cos)},$$

$$H_{313} = \frac{\varepsilon}{\nu_z} b_{100} - \frac{\varepsilon^3}{4\nu_z^3} b_{100}^3,$$

$$H_{314} = -\frac{\varepsilon^2}{4\nu_x} \left[2\nu_x\left(\nu_x^2 b_{230} + b_{210}\right) + \nu_z\left(\nu_x^2 a_{230} + 3a_{210}\right)\right],$$

$$H_{315} = -\frac{\varepsilon^2}{4\nu_x\nu_z} \left[\nu_x\left(\nu_z^2 b_{240} + b_{220}\right) + 2\nu_z\left(\nu_z^2 a_{240} + a_{220}\right)\right].$$

Резонанс $4\nu_z + \nu_x = 4$.

$$H_{13} = \frac{\varepsilon^3}{32\nu_x} \left(a_{324}^{(\sin)} - \nu_z^2 a_{374}^{(\sin)}\right),$$

$$H_{16} = \frac{\varepsilon^3}{32\nu_x} \left(a_{324}^{(\cos)} - \nu_z^2 a_{374}^{(\cos)}\right),$$

$$H_{18} = \frac{\varepsilon^2}{4} a_{130} (3\nu_x^2 a_{130} + a_{110}) ,$$

$$H_{19} = \frac{\varepsilon^2}{2} a_{130} (\nu_z^2 a_{140} + a_{120}) ,$$

$$H_{23} = \frac{\varepsilon^3}{32\nu_z} \left(b_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)} \right) ,$$

$$H_{26} = \frac{\varepsilon^3}{32\nu_z} \left(b_{324}^{(cos)} - \nu_z^2 b_{344}^{(cos)} \right) ,$$

$$H_{27} = \frac{\varepsilon^2}{4\nu_z^2} b_{100}^2 ,$$

$$H_{28} = -\frac{\varepsilon^2}{4\nu_z^2} b_{100} (\nu_x^2 b_{230} + b_{210}) ,$$

$$H_{29} = -\frac{3}{8\nu_z^2} \varepsilon^3 b_{100} (\nu_z^2 b_{240} + b_{220}) ,$$

$$H_{35} = \frac{\varepsilon^3}{8\nu_z} \left(\nu_z^2 b_{344}^{(cos)} - b_{324}^{(cos)} \right) ,$$

$$H_{36} = \frac{\varepsilon^3}{32\nu_x} \left(\nu_z^2 a_{374}^{(cos)} - a_{324}^{(cos)} \right) ,$$

$$H_{311} = \frac{\varepsilon^3}{8\nu_z} \left(b_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)} \right) ,$$

$$H_{312} = \frac{\varepsilon^3}{32\nu_x} \left(a_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 a_{374}^{(sin)} \right) ,$$

$$H_{313} = \frac{2\varepsilon}{\nu_z} b_{100} - \frac{\varepsilon^3}{2\nu_z^3} b_{100}^3 ,$$

$$H_{314} = -\frac{\varepsilon^2}{8\nu_x\nu_z} \left[8\nu_x (\nu_x^2 b_{230} + b_{210}) + \nu_z (\nu_x^2 a_{230} + a_{210}) \right] ,$$

$$H_{315} = -\frac{\varepsilon^2}{4\nu_x\nu_z} \left[2\nu_x (\nu_z^2 b_{240} + 3 b_{220}) + \nu_z (\nu_z^2 a_{240} + a_{220}) \right] + \frac{\varepsilon^3}{2\nu_x} b_{100} a_{140} b_{110} .$$

Рассмотрим систему усредненных уравнений (4_{II}) для резонанса $2\nu_z + 2\nu_x = 3$ во втором приближении. Если $a_{223}^{(sin)}$ и $b_{213}^{(sin)}$ разного знака и, кроме того,

$$1.\ \left| \frac{1}{2} \nu_x b_{213}^{(sin)} a_{130} (3\nu_x^2 a_{130} + a_{110}) \right| \le \varepsilon ,$$

$$2.\ \left| \nu_x b_{213}^{(sin)} a_{130} (\nu_z^2 a_{140} + a_{120}) \right| \le \varepsilon , \qquad (18)$$

$$3.\ \left| \frac{1}{2\nu_z} b_{100}^2 a_{223}^{(sin)} \right| \le \varepsilon ,$$

$$4.\ \frac{1}{8} \left| b_{213}^{(sin)} a_{223}^{(cos)} + a_{223}^{(sin)} b_{213}^{(cos)} \right| \le \varepsilon ,$$

то получаем (для $\theta = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$) интеграл движения вида:

$$\left| \nu_x b_{213}^{(sin)} \right| a_x^2 + \left| \nu_z a_{223}^{(sin)} \right| a_z^2 = Const + O(\varepsilon^3) , \qquad (19)$$

т.е. ограниченность амплитуд достигается удовлетворением достаточных условий (18). Теперь обратимся к третьему приближению. Рассмотрим систему (4_{III}) для резонанса $2\nu + 2\nu_x = 3$. Если $a_{223}^{(sin)}$ и $b_{213}^{(sin)}$ разного знака и выполнены условия:

$$1.\ \left| \nu_z a_{130} b_{213}^{(sin)} (\nu_z^2 a_{140} + a_{120}) - \varepsilon \frac{\nu_x}{2\nu_z^2} b_{100} (\nu_x^2 b_{230} + b_{210}) \right| \le \varepsilon^2 ,$$

$$2.\ \left| \nu_x b_{213}^{(sin)} a_{130} (\nu_z^2 a_{140} + a_{120}) \right| \le \varepsilon^2 , \qquad (20)$$

$$3.\ \left| \frac{1}{2\nu_z} b_{100}^2 a_{223}^{(sin)} \right| \le \varepsilon^2 .$$

$$4.\quad \frac{1}{8}\left| b_{213}^{(sin)} a_{223}^{(cos)} + a_{223}^{(sin)} b_{213}^{(cos)} \right| \le \varepsilon^2 ,$$

$$5.\quad \frac{3}{4}\left| \frac{1}{\nu_z} b_{100} a_{223}^{(sin)} (\nu_z^2 b_{240} + b_{220}) \right| \le \varepsilon ,$$

то получаем (при $\theta = O(\frac{1}{\varepsilon^3})$) интеграл движения вида:

$$\left|\nu_x b_{213}^{(sin)}\right| a_x^2 + \left|\nu_z a_{223}^{(sin)}\right| a_z^2 = const + O(\varepsilon^4), \qquad (21)$$

т.е. ограниченность амплитуд достигается удовлетворением достаточных условий (20).

Рассмотрим теперь систему усредненных уравнений (6_{III}) для резонанса $4\nu_z + \nu_x = 4$. Если выполнены следующие условия: $a_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 a_{374}^{(sin)}$ и $b_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)}$ разного знака и, кроме того:

$$1.\quad \frac{1}{8}\Big| \left(b_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)}\right)\left(a_{324}^{(cos)} - \nu_z^2 a_{374}^{(cos)}\right) + \left(a_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 a_{374}^{(sin)}\right)\left(b_{324}^{(cos)} - \nu_z^2 b_{344}^{(cos)}\right) \Big| \le \varepsilon ,$$

$$2.\quad \frac{1}{2}\left| \nu_x a_{130} (3\nu_x^2 a_{130} + a_{110})\left(b_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)}\right) \right| \le \varepsilon^2 , \qquad (22)$$

$$3.\quad \frac{3}{4}\left| \frac{1}{\nu_z} b_{100} (\nu_z^2 b_{240} + b_{220})\left(\nu_z^2 a_{374}^{(sin)} - a_{324}^{(sin)}\right) \right| \le \varepsilon ,$$

$$4.\quad \frac{1}{2}\left| \frac{1}{\nu_z} b_{100}^2 \left(a_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 a_{374}^{(sin)}\right) \right| \le \varepsilon^2 ,$$

$$5.\quad \Big| \nu_z a_{130} (\nu_z^2 a_{140} + a_{120})\left(b_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)}\right) - \frac{\nu_x}{2\nu_z} \varepsilon b_{100} (\nu_x^2 b_{230} + b_{210})\left(a_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 a_{374}^{(sin)}\right) \Big| \le \varepsilon^2 ,$$

то из первых двух уравнений системы (6_{III}) получаем интеграл движения вида

$$\left|\nu_x \left(b_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 b_{344}^{(sin)}\right)\right| a_x^2 + \left|\nu_z \left(a_{324}^{(sin)} - \nu_z^2 a_{374}^{(sin)}\right)\right| a_z^2 = \qquad (23)$$
$$= Const + O(\varepsilon^4) ,$$

который имеет место при $\theta = O(\frac{1}{\varepsilon^4})$, т.е. ограниченность амплитуд a_x, a_z в окрестности резонанса $4\nu_z + \nu_x = 4$ достигается выполнением достаточных условий (22).

Обратимся теперь к уравнению (5_{III}) для резонанса $3\nu_z - \nu_x = 2$. Если $\nu_z^2 a_{140} + a_{120}$ и $-b_{100}(\nu_x^2 b_{230} + b_{210})$ разного знака и выполнено:

$$1.\quad \frac{1}{4\nu_z^2}\left| -b_{100} a_{130} (3\nu_x^2 a_{130} + a_{110})(\nu_z^2 b_{230} + b_{210}) \right| \le \varepsilon ,$$

$$2.\quad \frac{b_{100}^2}{2\nu_z^2}\left| a_{130} (\nu_x^2 a_{140} + a_{120}) \right| \le \varepsilon^2 , \qquad (24)$$

$$3.\quad \frac{3}{4\nu_z^2}\left| -a_{130} (\nu_z^2 a_{140} + a_{120}) b_{100} (b_{220} + \nu_z^2 b_{240}) \right| \le \varepsilon ,$$

то при $\theta = O(\frac{1}{\varepsilon^3})$ получаем интеграл движения вида:

$$\frac{1}{2\nu_z^2}\left| -b_{100} (\nu_x^2 b_{230} + b_{210}) \right| a_x^2 + \left| a_{130} (\nu_z^2 a_{140} + a_{120}) \right| a_z^2 = \qquad (25)$$
$$= Const + O(\varepsilon^4) .$$

Ограниченность амплитуд a_x, a_z достигается удовлетворением достаточных условий (24).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, Москва, 1962.
2. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, Москва, 1970.
3. Guignard G. A General Treatment of Resonances in Accelerators, CERN 78-11, Geneva, 1978.
4. Schoch A. Theory of Linear and Nonlinear Perturbations of Betatron Oscillations in Alternating Gradient Synchrotrons, CERN 57-21, Geneva, 1958.

5. Балбеков В.И., Чирков П.Н. ИФВЭ 82-133, Серпухов, 1982; ИФВЭ 83-150, Серпухов, 1983.
6. Белов В.П., Макаров А.А. НИИЭФА, П-Б-0611, Ленинград, 1983.
7. Безногих Ю.Д. и др. ОИЯИ, Р9-9120, Дубна, 1975.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Наука, Москва, 1974.
9. Hearn A.C. REDUCE User's Manual, Version 3.2, Rand Corporation, Santa Monica, CA 90406, USA, 1985.
10. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, Р11-87-452, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 сентября 1988 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика