

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

P11-88-683

**П.Г. Акишин**

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА  
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ  
С ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИЕЙ  
ФЕРРОМАГНЕТИКА**

Направлено в "Журнал вычислительной математики  
и математической физики"

**1988**

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее эффективных методов расчета трехмерных магнитоэстатических полей является метод объемных интегральных уравнений<sup>/1/</sup>.

Пусть  $\vec{B}(\vec{a})$ ,  $\vec{H}(\vec{a})$ ,  $\vec{M}(\vec{a})$  есть индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля в т.  $\vec{a}$ ;  $\vec{H}^s(\vec{a})$  - поле от токовых обмоток;  $G$  - область, заполненная ферромагнетиком. Тогда имеет место следующее интегральное уравнение

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) + \frac{\nabla \vec{a}}{4\pi} \left( \int_G (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}) dV_{\vec{x}} \right). \quad /1/$$

Величины  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{M}$  связаны соотношениями

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu(|\vec{B}|) \mu_0} \vec{B}, \quad /2/$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}, \quad /3/$$

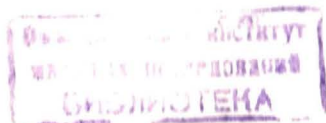
где  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума,  $\mu$  - магнитная проницаемость, нелинейным образом зависящая от  $|\vec{B}|$ .

Согласно<sup>/1/</sup>, дискретизация /1/ производится следующим образом. Область  $G$  разбивается на подобласти  $\{Q_i\}$ :  $G = \bigcup_{i=1}^N Q_i$ .

В каждом  $Q_i$  берется центр  $\vec{a}_i$ .  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  в  $Q_i$  приближаются постоянными значениями  $\vec{B}_i$ ,  $\vec{H}_i$ ,  $\vec{M}_i$  /  $\vec{B}_i$ ,  $\vec{H}_i$ ,  $\vec{M}_i$  - удовлетворяют /2/, /3//. Итоговая дискретизованная система уравнений имеет следующий вид:

$$\vec{H}_i = \vec{H}^s(\vec{a}_i) + \frac{\nabla \vec{a}}{4\pi} \left( \sum_{j=1}^N \int_{Q_j} (\vec{M}_j, \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}_i|}) dV_{\vec{x}} \right) / \vec{a} = \vec{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad /4/$$

Цель настоящей работы состоит в изучении данного подхода в случае наличия у области  $G$  осевой симметрии, причем наличие осевой симметрии у магнитного поля не предполагается.





$$\vec{B} = \vec{H}^s + ([D] + [E])\vec{M}, \quad /1.5/$$

где  $[E]$  - единичная матрица размера  $3N \times 3N$ .

В предположении ограниченности модуля намагниченности,  
 $|\vec{M}| \leq C_0 < \infty$ ,

имеет место теорема /2/.

Теорема

Система /1.5/ имеет хотя бы одно решение.

Вопросы единственности решений у систем типа /1.5/ рассматриваются в /3, 4/.

Рассмотрим структуру матриц  $[A_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}]$ . Имеют место сле-

дующие равенства:

$$G_{j_2}^{i_2} = [U]^{i_2-1} G_{j_2}^1, \quad \bar{a}_{j_1}^{i_1} = [U]^{i_1-1} \bar{a}_{j_1}^1. \quad /1.6/$$

Из /1.2/ и /1.6/ вытекает

$$[A_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}] = \begin{cases} [U]^{i_2-1} [A_{j_1, j_2}^{i_1-i_2+1, 1}] [U^T]^{i_2-1} & i_1 \geq i_2, \\ [U]^{i_2-1} [A_{j_1, j_2}^{L+i_1-i_2+1, 1}] [U^T]^{i_2-1} & i_2 > i_1. \end{cases} \quad /1.7/$$

Отсюда следует, что коэффициенты матрицы  $[D]$  из /1.5/ получаются комбинацией коэффициентов  $L \cdot N^2$  матриц

$$[A_{j, k}^{i, 1}] \quad (i=1, \dots, L; j, k=1, \dots, N),$$

что позволяет практически в  $L$  раз сократить затраты на подго-

товку матрицы  $[D]$ . Пусть  $\phi_j = \frac{(j-1)2\pi}{L}$ ,  $S_1^j = 1$ ,  $S_2^j = \text{Cov} \phi_j$ ,

$$S_3^j = \text{Sin} \phi_j, \quad S_4^j = \text{Cov}^2 \phi_j, \quad S_5^j = \text{Cov} \phi_j \cdot \text{Sin} \phi_j \quad (j=1, \dots, L).$$

Из /1.7/ несложно показать, что

$$[A_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}] = \begin{cases} \sum_{k=1}^5 S_k^{i_2} \cdot [\bar{A}(k)_{j_1, j_2}^{i_1-i_2+1}] & i_1 \geq i_2, \\ \sum_{k=1}^5 S_k^{i_2} \cdot [\bar{A}(k)_{j_1, j_2}^{L+i_1-i_2+1}] & i_2 > i_1. \end{cases} \quad /1.8/$$

причем элементы матрицы  $[\bar{A}_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}]$  /размеры  $3 \times 3$  / есть линейная комбинация элементов матрицы  $[A_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}]$  с коэффициентами, не зависящими от  $i_1, j_1, j_2$ .

Из /1.3/, /1.8/ следует, что

$$[C_{\ell, m}] = \begin{cases} \sum_{k=1}^5 S_k^m [\bar{C}(k)_{\ell-m+1, 1}] & \ell \geq m \\ \sum_{k=1}^5 S_k^m [\bar{C}(k)_{L+\ell-m+1, 1}] & m > \ell \end{cases}$$

где  $[\bar{C}(k)_n]$  - матрица размера  $[3N \times 3N]$  с коэффициентами, являющимися линейной комбинацией коэффициентов матрицы  $[C_n, 1]$ .

Этот факт означает, что матрицу  $[D]$  из /1.5/ можно представить в виде суммы пяти матриц, причем каждая матрица - произведение блочно-циркулянтной и диагональной матриц.

Для решения нелинейной дискретизованной системы /1.5/ будем использовать итерационный процесс из /3/:

$$\vec{B}_{k+1} = \mu_0 \vec{H}^s + ([D] + [E])\vec{M}(\vec{B}_k), \quad \vec{B}_0 = \vec{H}^s, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad /1.9/$$

Процесс /1.9/ заканчивается, если невязка на  $k$ -шаге уравнения /1.5/ становится меньше наперед заданной величины. При использовании быстрых алгоритмов умножения блочно-циркулянтной матрицы на вектор /5/ для одного шага итерационного процесса /1.9/ требуется порядка  $N^2 L \ln L$  операций.

Таким образом, учет осевой симметрии ферромагнетика позволяет в  $O(L)$  раз сократить вычислительные затраты на подготовку матрицы дискретизованных уравнений и в  $O(L/\ln L)$  раз - затраты на итерационный процесс решения нелинейной системы.

## 2. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим ситуацию, когда магнитная проницаемость  $\mu$  является постоянной в пределах области  $\Omega$ . Модель с постоянным значением  $\mu$  хорошо приближает истинную картину распределения поля при малых его значениях. В этом случае /1/ редуцируется к граничному интегральному уравнению

$$H(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) - \frac{\nabla \vec{a}}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{(\vec{M}(\vec{x}), d\vec{S}_x)}{|\vec{x} - \vec{a}|}. \quad /2.1/$$

Учитывая /2/, /3/, имеем

$$\frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu} = \mu_0 \bar{H}^s(\bar{a}) - \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \oint_{DG} \frac{(\bar{dS}_x, \bar{B}(1 - \frac{1}{\mu}))}{|\bar{x} - \bar{a}|} \quad /2.2/$$

Граница DG разбивается на граничные элементы  $\{G_i\}$ ,

$$DG = \bigcup_{i=1}^N G_i,$$

причем в дальнейшем будет предполагаться, что  $G_i$  - плоские. Полагая  $\bar{B}(\bar{a})$  постоянным в пределах элемента  $G_i$  и равным  $\bar{B}_i$  и выбирая точки наблюдения  $\bar{a}_i$  в центроидах  $G_i$ , получаем следующую дискретизованную систему уравнений:

$$\frac{\bar{B}_i}{\mu} = \mu_0 \bar{H}^s(\bar{a}_i) - \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \left[ \sum_{j=1}^N \oint_{G_j} \frac{(\bar{B}_j \bar{dS})}{|\bar{x} - \bar{a}|} (1 - \frac{1}{\mu}) \right] /_{\bar{a}=\bar{a}_i} \quad /2.3/$$

Сокращенно /2.3/ можно записать в виде

$$\frac{\bar{B}}{\mu} = \mu_0 \bar{H}^s - [A] \bar{B} (1 - \frac{1}{\mu}), \quad /2.4/$$

где  $\bar{B}, \bar{H}^s$  - векторы размерности  $3N$ , аналогичные введенным в разделе 1, а  $[A]$  есть матрица размера  $[3N \times 3N]$ . Заметим, что матрица  $[A]$  в /2.4/ имеет, по крайней мере,  $2N$  нулевых собственных значений. Поэтому при численном решении /2.4/ при больших значениях  $\mu$  имела место численная неустойчивость.

Пусть  $\bar{n}(\bar{x})$  - внешняя нормаль к DG в т.  $\bar{x}$ . Для пересчета поля в произвольную точку наблюдения в /2.1/ фактически необходимо знать значение  $(\bar{B}(\bar{x}), \bar{n}(\bar{x}))$ . Пусть  $\bar{n}_i$  - внешняя нормаль к  $G_i$ . Аналогично /8/, умножим /2.3/ скалярно на  $\bar{n}_i$ . Пусть  $\sigma_j = (\bar{B}_j, \bar{n}_j)$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Имеем следующую систему уравнений

$$\frac{\sigma_i}{\mu} = \mu_0 (\bar{H}^s(\bar{a}_i), \bar{n}_i) - (\bar{n}_i, \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \left[ \sum_{j=1}^N (1 - \frac{1}{\mu}) \int_{G_j} \frac{\sigma_j \bar{dS}}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right]) /_{\bar{a}=\bar{a}_i} \quad /2.5/$$

$i = 1, 2, \dots, N.$

Сокращенно /2.5/ можно записать в виде

$$\frac{\bar{\sigma}}{\mu} = \mu_0 \bar{H}^s + [\bar{D}] \bar{\sigma} (1 - \frac{1}{\mu}), \quad /2.6/$$

где  $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)^T$

$$\bar{H}^s = ((\bar{n}_1, \bar{H}^s(\bar{a}_1)), (\bar{n}_2, \bar{H}^s(\bar{a}_2)), \dots, (\bar{n}_N, \bar{H}^s(\bar{a}_N)))^T.$$

Матрица  $[D]$  в /2.6/ есть матрица размера  $[N \times N]$  с элементами  $\{d_{ij}\}$ ,

$$d_{ij} = -(\bar{n}_i, \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \int_{G_j} \frac{\bar{dS}}{|\bar{x} - \bar{a}|}) /_{\bar{a}=\bar{a}_i}$$

Для решения /2.6/ использовался итерационный процесс, аналогичный /1.9/,

$$\bar{\sigma}_{k+1} = \mu_0 \bar{H}^s + ([D] + [E]) (1 - \frac{1}{\mu}) \bar{\sigma}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{\sigma}_0 = \bar{H}^s \mu_0. \quad /2.7/$$

Учет осевой симметрии для /2.5/ проводится аналогично нелинейному случаю. При этом матрица  $[D]$  в /2.6/ является блочно-циркулянтной /в отличие от нелинейного случая, где она была суммой произведений блочно-циркулянтных и диагональных матриц/. Аналогично нелинейному случаю в  $O(L)$  раз сокращаются вычислительные затраты на подготовку коэффициентов матрицы  $[D]$  и в  $O(L/\ln L)$  раз затраты на один шаг итерационного процесса /2.7/.

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Теория, изложенная в разд.1, была реализована в виде комплекса программ на Фортране. Тестовые расчеты показали полное

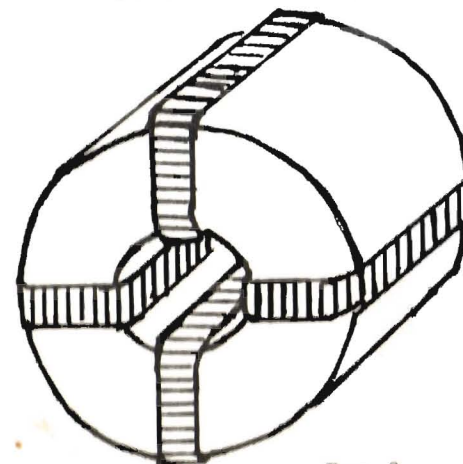


Рис.2

совпадение всех результатов с расчетами, проведенными с применением программ из /7/. Комплекс программ использовался для расчета поля магнита, изображенного на рис.2. На рис.3,4 приводится разбиение ядра магнита, использованное для моделирования, при этом учитывалась симметрия поля относительно плоскости OZY. Первоначально выбирались значения  $N=15, L=16$ , затем  $L=32$  и  $L=64$ . При этом  $\phi_0$  делился пополам, а затем еще раз пополам. В табл.1 приводятся

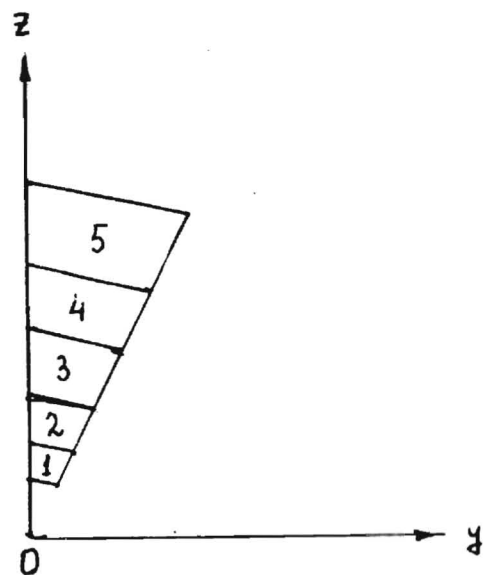


Рис. 3

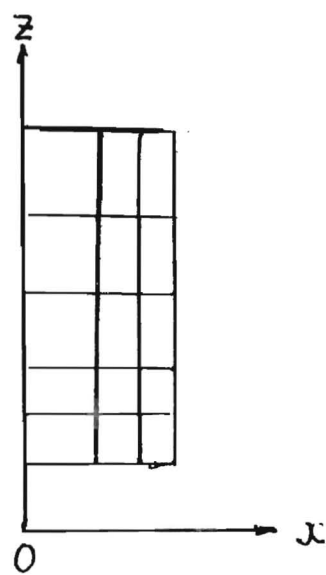


Рис. 4

значения основной компоненты индукции магнитного поля в элементах 1-5 /рис.3/ при различных разбиениях. Число итераций во всех трех случаях равно 250. Размерность решаемых нелинейных систем уравнений была 720, 1440, 2880 неизвестных, время центрального процессора машины ЕС-1061 равнялось соответственно 15'41", 31'30", 65'02".

Результаты раздела 2 использовались для пространственного моделирования поля мультипольного корректора нуклотрона ЛВЭ ОИЯИ /рис.5, 6/. При этом значительные трудности вызвало вычисление поля от токовых обмоток /рис.7,8/. Рассмотрим подробнее процедуру вычисления поля от круговых элементов этих обмоток. Введем переменные  $r, \phi, R, \psi$  /рис.7,8/. Для произвольной точки  $\bar{A}$  с координатами  $\bar{A}(x, y, z)$  имеем

$$r \cos \phi = R \psi,$$

$$x = r \sin \phi + x_0,$$

$$y = R \sin \psi,$$

$$z = R \cos \psi.$$

/3.1/

При этом единичный вектор  $\bar{E}(r, R, \phi)$  направления тока в т.  $\bar{A}$  есть

$$\bar{E}(r, R, \phi) = (\cos \phi, -\cos \psi \sin \phi, \sin \psi \cdot \sin \phi)^T.$$

/3.2/

Таблица 1

| Элем. | L = 16 | L = 32 | L = 64 |
|-------|--------|--------|--------|
| I     | 19524  | 19821  | 19523  |
|       |        |        | 19287  |
|       |        | 18906  | 18813  |
| II    | 17652  | 17913  | 17948  |
|       |        |        | 17740  |
|       |        | 17055  | 17318  |
| III   | 16891  |        | 16768  |
|       |        | 17171  | 17215  |
|       |        |        | 16982  |
| IV    | 16177  | 16333  | 16570  |
|       |        |        | 16057  |
|       |        | 16479  | 16545  |
| V     | 15273  |        | 16271  |
|       |        | 15649  | 15880  |
|       |        |        | 15384  |
|       |        | 15676  | 15812  |
|       |        |        | 15497  |
|       |        | 14897  | 15114  |
|       |        |        | 14643  |

По закону Био-Саварра при постоянной плотности тока  $RJ$  вклад поля  $\bar{H}$  одного кругового элемента в произвольную точку наблюдения равен

$$\bar{H} = RJ \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_{r_1}^{r_2} [\bar{E}(r, R, \phi) \times \frac{\bar{A}(r, R, \phi) - \bar{a}}{|\bar{A}(r, R, \phi) - \bar{a}|^3}] |\det| dr dR d\phi. \quad /3.3/$$

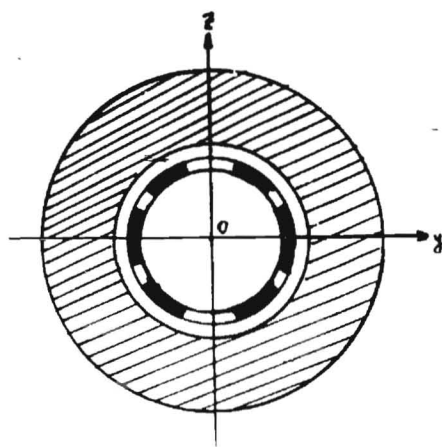


Рис. 5

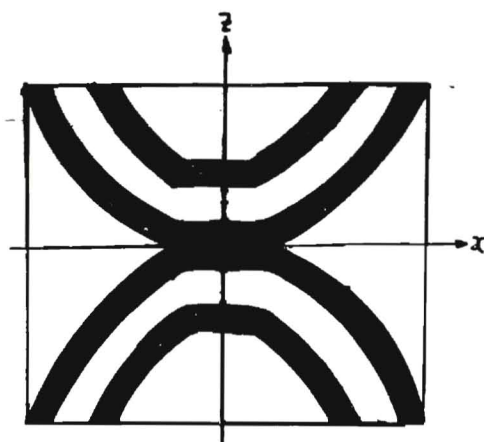


Рис. 6

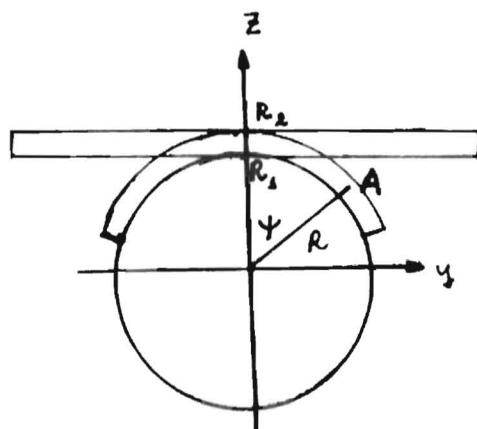


Рис. 7

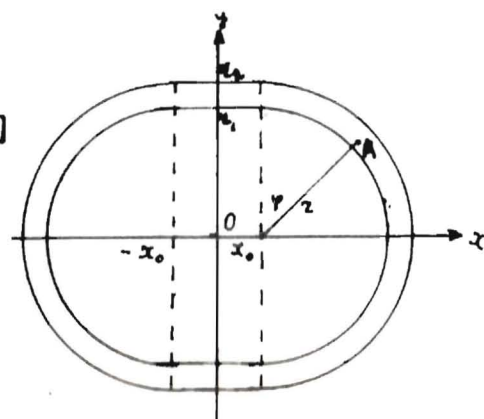


Рис. 8

где  $\det$  - якобиан перехода от координат  $r, R, \phi$  к координатам  $X, Y, Z$ . В данном случае  $|\det|$  равен  $r$ . Интеграл в /3.3/ вычислялся методом средних. Так как точку наблюдения  $\bar{a}$  в процессе расчетов приходится выбирать достаточно близко к обмотке, а подынтегральная функция сингулярна, необходимо использовать очень мелкое разбиение области интегрирования. Для уменьшения счетного времени интегралы из /3.3/ вычислялись на матричном процессоре ЕС-2706, что резко сократило вычислительные затраты центрального процессора ЕС-1061 и астрономическое время прохождения задачи. Расчеты проводились для трех

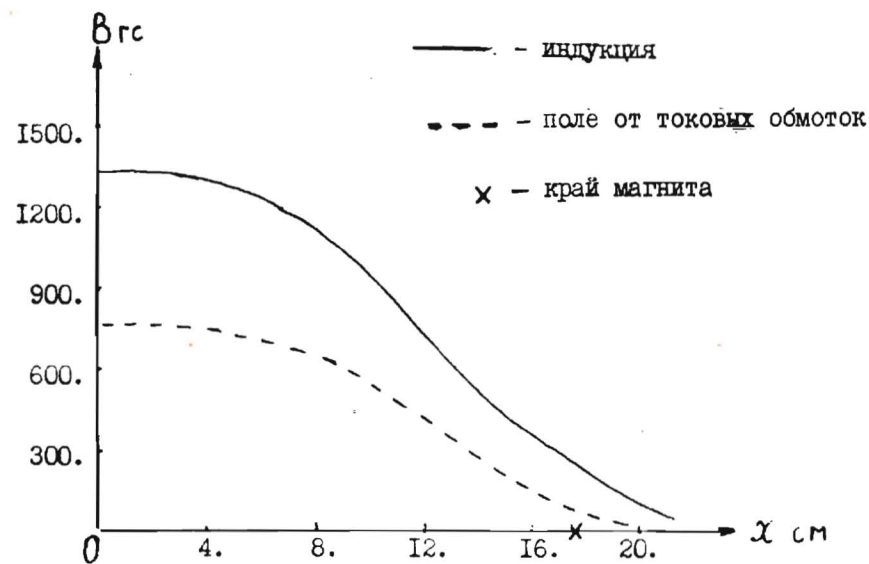


Рис. 9

Таблица 2

| $x, \text{см}$ | 0      | 4      | 8      | 12    | 16    | 20    |
|----------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| L              |        |        |        |       |       |       |
| 32             | 1379,2 | 1344,7 | 1175,4 | 798,9 | 371,3 | 121,5 |
| 64             | 1324,1 | 1290,7 | 1125,7 | 757,3 | 340,3 | 101,8 |
| 128            | 1302,3 | 1269,5 | 1106,3 | 741,1 | 328,4 | 94,2  |

типов разбиений:  $N = 31, L = 32, N = 31, L = 64$  и  $N = 31, L = 128$ . При этом для сокращения числа неизвестных учитывалась симметрия поля относительно плоскости  $OZY$ .

На рис.9 приведен график  $z$ -компоненты поля вдоль оси магнита, а в табл.2 даются в сравнении значения  $z$ -компоненты поля для различных разбиений. Размерность решаемых линейных систем уравнений была 992, 1984 и 3968 неизвестных, время центрального процессора машины ЕС-1061 равно соответственно  $10'14''$ ,  $20'52''$  и  $40'44''$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Newman M.J., Trowbridge C.W., Turner L.R. GFUN: An Interactive Program as an Aid to Magnet Design. - In: Proc. 4th Int. Conf. on Magnet Technology, 1972, Brookhaven.
2. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, P11-81-826, Дубна, 1981.
3. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, 11-83-427, Дубна, 1983.
4. Akishin P.G., Zhidkov E.P., Kravtsov V.D. Commun. of JINR E11-87-101, Dubna, 1987.
5. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. - В сб.: Вычислительные процессы и системы, т.1, М.: Наука, 1983, с.124.
6. Акишин П.Г. и др. ОИЯИ, P11-85-973, Дубна, 1985.
7. Акишин П.Г. ОИЯИ, P11-86-522, Дубна, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел  
14 сентября 1988 года.

Акишин П.Г.

P11-88-683

Об одном методе расчета магнитных полей  
в системах с осесимметричной конфигурацией  
ферромагнетика

Метод интегральных уравнений используется для вычисления поля в магнитных системах с осевой симметрией ферромагнетика. Исследуются свойства симметрии матриц дискретизованных уравнений. Предлагается итерационный метод решения возникающих линейных и нелинейных систем уравнений. Приводятся результаты численных расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G.

P11-88-683

The Magnetic Field Calculation  
Method for the Systems with Rotational  
Symmetry of Ferromagnet

Integral equation method was used for calculation of the field in magnetic systems having rotational symmetry of the ferromagnet. The properties of symmetry of matrices of discretized equations are investigated. The iterational method for solving arising linear and nonlinear equation systems is proposed. Some numerical results are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988