



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

A 62

P11-88-606 e

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, И.Е.Жидкова

УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА $3\nu_x = 2$
В ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ
ПО МЕТОДУ КРЫЛОВА - БОГОЛЮБОВА

1988

Система медленного вывода пучка из синхрофазотрона ОИЯИ основана на использовании свойств резонанса радиальных бетатронных колебаний $3\nu_x=2$

В работах [5-10] расчет приближенных значений параметров выводной системы производился как численно, так и аналитически в первом приближении метода усреднения Крылова-Боголюбова [3].

В настоящей работе исследование проводится в третьем приближении по методу усреднения [3].

При анализе резонанса $3\nu_x=2$ движение частиц рассматривается в медианной плоскости ($z=0$), поэтому уравнение бетатронных колебаний можно записать в виде [1,2,10]

$$x'' + \nu_x^2 x = \epsilon F_{x1} + \epsilon^2 F_{x2} + \epsilon^3 F_{x3} \quad (1)$$

где F_{x1}, F_{x2}, F_{x3} - полиномы от x, x' с периодическими по θ коэффициентами $A_{kj}(\theta)$ (' означает дифференцирование по θ), ϵ - малый параметр. Все обозначения и общий вид функций F_{xk} смотри в работе [10].

$A_{kj}(\theta)$ представляется в виде ряда Фурье:

$$A_{kj}(\theta) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} a_{kj\alpha} e^{i\frac{2\pi}{T}\alpha\theta} \quad (2)$$

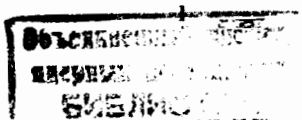
Постоянные $a_{kj\alpha}$ и период T связаны с реальной магнитной структурой конкретного ускорителя.

Все преобразования, связанные с реализацией метода усреднения, были выполнены с помощью системы аналитического программирования REDUCE-32 [11].

В первом приближении усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a^2 (\alpha \sin 3\psi + \gamma \cos 3\psi) \quad , \\ \dot{\psi} &= a (-\gamma \sin 3\psi + \alpha \cos 3\psi) + v \quad , \end{aligned} \quad (3)$$

где a и ψ - переменные, соответствующие амплитуде и фазе, и



$$\alpha = -\frac{\epsilon}{8\sqrt{x}} a_{112}^{(\text{Sin})} \quad (4)$$

$$\gamma = -\frac{\epsilon}{8\sqrt{x}} a_{112}^{(\text{Cos})}$$

$$\beta = +\frac{\epsilon}{2\sqrt{x}} a_{100}$$

$$a_{112}^{(\text{Sin})} = 1(a_{11,+2} - a_{11,-2}), \quad a_{112}^{(\text{Cos})} = a_{11,+2} + a_{11,-2} \quad (5)$$

где $a_{11,t2}$ - коэффициенты ряда Фурье (2), и a_{100} - член ряда (2), соответствующий расстройке. $a_{kj\alpha}^{(\text{Sin})}$, $a_{kj\alpha}^{(\text{Cos})}$ - соответствуют коэффициентам при разложении $A_{kj}(\theta)$ в ряд Фурье по синусам и косинусам.

Для системы (3) построен интеграл движения:

$$A \cos 3\psi - B \sin 3\psi = -\frac{3}{2} D \frac{1}{a} + C \frac{1}{a^3} \quad (6)$$

где

$$A = -a_{112}^{(\text{Sin})} \quad (7)$$

$$B = -a_{112}^{(\text{Cos})}$$

$$D = 4a_{100}$$

C - произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Предположив, что $a_{112}^{(\text{Cos})} = 0$, от системы уравнений (3) перейдем к системе

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \alpha a^2 \sin 3\psi, \\ \dot{\psi} &= \alpha a \cos 3\psi - \beta \end{aligned} \quad (8)$$

а интеграл движения (6) принимает вид

$$\cos 3\psi = -\frac{3}{2} \frac{D}{A} \frac{1}{a} + \frac{C}{A} \frac{1}{a^3} \quad (9)$$

что совпадает с результатом работы [9].

Сделаем замену переменных

$$u = a \cos \psi, \quad v = a \sin \psi \quad (10)$$

от системы (8) переходим к системе уравнений

$$\dot{v} = -\alpha(v^2 - u^2) - \beta v \quad (11)$$

$$\dot{u} = 2\alpha uv - \beta v$$

на плоскости (v, u) . Для этой системы уравнений находим особые точки:

$$F_0 = (0, 0), \quad F_1 = \left(0, -4 \frac{a_{100}}{a_{112}^{(\text{Sin})}}\right) \quad (12)$$

$$F_3 = \left(-2\sqrt{3} \frac{a_{100}}{a_{112}^{(\text{Sin})}}, 2 \frac{a_{100}}{a_{112}^{(\text{Sin})}}\right), \quad F_2 = \left(2\sqrt{3} \frac{a_{100}}{a_{112}^{(\text{Sin})}}, 2 \frac{a_{100}}{a_{112}^{(\text{Sin})}}\right).$$

Можно показать, что F_0 является устойчивой точкой типа центр, а остальные три - неустойчивыми точками типа седло. Используя интеграл движения, можно построить на фазовой плоскости траектории движения. Например, для $\alpha < 0$, $\beta < 0$ или $a_{112}^{(\text{Sin})} > 0$, $a_{100} > 0$ фазовые траектории имеют вид

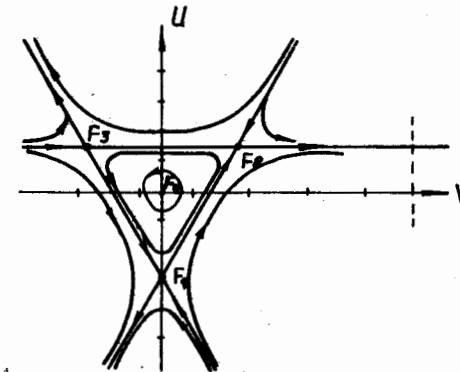


Рис. I

Фазовые траектории совпадают с полученными в работе /7/.

На рис.1 видно, что вокруг точки F_0 существует область устойчивого движения, в которой фазовые траектории являются замкнутыми кривыми, и область неустойчивого движения, в которой фазовые траектории уходят в бесконечность. Границей этих областей является треугольник с вершинами в точках неустойчивого равновесия, в которых частота радиальных бетатронных колебаний $\dot{\nu}_x = 2/3$.

Размер области устойчивости стремится к нулю при $a_{100} \rightarrow 0$, $a_{112}^{(\text{Sin})} \rightarrow \infty$. Следовательно, вывод пучка может быть осуществлен изменением показателя магнитного поля от рабочего значения до резонансного ($a_{100} \rightarrow 0$), этот результат совпадает с результатами работы /7/.

Во втором приближении усредненная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a^2(\alpha \sin 3\psi + \gamma \cos 3\psi) + \delta a^3, \\ \dot{\psi} &= a(-\gamma \sin 3\psi + \alpha \cos 3\psi) + \nu + \lambda a^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где α, ν, γ приведены в (4), а

$$\delta = \frac{\epsilon^2}{4} a_{130}(a_{110} + 3\nu_x^2 a_{130}), \quad (14)$$

$$\lambda = -\frac{\epsilon^2}{8\nu_x} (\nu_x^2 a_{230} + 3a_{210}).$$

Интеграл движения имеет вид

$$A \cos 3\psi - \nu \sin 3\psi = -\frac{3}{2} D \frac{1}{a} + c \frac{1}{a^3} - \frac{3}{4} E a + O(\epsilon^2), \quad (15)$$

где A, ν и D даны в (7), а

$$E = \epsilon (\nu_x^2 a_{230} + 3a_{210}). \quad (16)$$

$$\text{При } a_{210} \in (-\frac{3}{2}\nu_x^2 - \Delta, -\frac{3}{2}\nu_x^2 + \Delta), \text{ где } \Delta = O(\epsilon^2) \text{ и} \quad (17)$$

$a_{kj\alpha}^{(\text{Cos})} = 0$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \alpha a^2 \sin 3\psi, \\ \dot{\psi} &= \alpha a \cos 3\psi + \nu + \lambda a^2 \end{aligned} \quad (18)$$

и интеграл движения:

$$\cos 3\psi = -3 \left[\frac{D}{2A} \frac{1}{a} + \frac{E}{4A} a \right] + \frac{C}{A} \frac{1}{a^3} + O(\epsilon^2). \quad (19)$$

Переходя с помощью замены переменных (10) на фазовую плоскость, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \alpha(u^2 - v^2) + \delta u + \lambda u(u^2 + v^2), \\ \dot{u} &= 2\alpha uv - \delta v - \lambda v(u^2 + v^2) \end{aligned} \quad (20)$$

и интеграл движения:

$$4u^3 - 3u(u^2 + v^2) = -\frac{3}{2} \frac{D}{A} (u^2 + v^2) - \frac{3}{4} \frac{E}{A} (u^2 + v^2)^2 + \tilde{C} + O(\epsilon^2), \quad (21)$$

где $\tilde{C} = \frac{C}{A}$.

Система (20) имеет следующие особые точки:

$$F_0 = (0, 0) \quad F_1 = \left(0, \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda}}{2\lambda} \right),$$

$$F_2 = \left(\frac{\sqrt{3}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda})}{4\lambda}, \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda}}{4\lambda} \right),$$

$$F_3 = \left(\frac{-\sqrt{3}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda})}{4\lambda}, \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda}}{4\lambda} \right),$$

$$F_4 = \left(0, \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda}}{2\lambda} \right),$$

$$F_5 = \left(\frac{\sqrt{3}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda})}{4\lambda}, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda}}{4\lambda} \right),$$

$$F_6 = \left(\frac{-\sqrt{3}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda})}{4\lambda}, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\lambda}}{4\lambda} \right).$$

Можно доказать, что особые т.т. F_0, F_4, F_5, F_6 являются центрами, а т.т. F_1, F_2, F_3 - седлами. Зная эти точки и используя интеграл движения, можно нарисовать фазовые траектории плоскости (v, u) . Например, при $\alpha < 0, \nu < 0, \lambda > 0$ (что соответствует $a_{112}^{(\text{Sin})} > 0, a_{100} > 0$ и $a_{210} < -\frac{\nu_x^2}{3} a_{230}$) фазовые траектории имеют вид

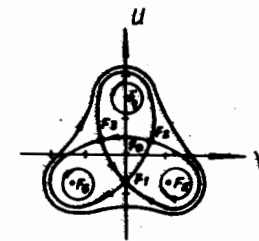


Рис.2

Система уравнений (18), (20), интеграл движения (19), (21) и фазовые траектории на рисунке 2 совпадают (с точностью до членов порядка выше ϵ^2) с результатами работ [7, 9].

При сравнении фазовых траекторий в окрестности резонанса в первом (рисунок 1) и во втором (рисунок 2) приближениях хорошо видно, как усложняется картина на фазовой плоскости. Центральная область устойчивости становится криволинейным треугольником, с координатами вершин, лежащих внутри треугольника, соответствующего области устойчивости в первом приближении. Следовательно, исследование поведения частиц в окрестности резонанса на фазовой плоскости во втором приближении позволяет провести более точный по сравнению с первым приближением качественный анализ об условиях вывода пучка из ускорителя. Отказавшись от ограничения (17) и от предположения, что $a_{kj\alpha}^{(\cos)} = 0$, можно сделать этот анализ еще более точным, так как разложение (2) периодических коэффициентов исходного уравнения (1) позволяет получить уравнения (3), (13), имеющие более общий вид, чем исследованные системы уравнений (8) и (18).

В третьем приближении система усредненных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a^2 (\alpha \sin 3\psi + \gamma \cos 3\psi) + a^4 (\xi_1 \sin 3\psi + \zeta_1 \cos 3\psi) + \delta_1 a^3, \\ \dot{\psi} &= a(-\gamma \sin 3\psi + \alpha \cos 3\psi) + a^3 (\xi_2 \sin 3\psi + \zeta_2 \cos 3\psi) + \nu + \lambda_1 a^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где α, ν, γ приведены в (4),

$$\delta_1 = \delta - \frac{\epsilon^3}{16 \sqrt{x}} a_{100} (a_{110} + 3 \sqrt{x}^2 a_{130}),$$

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{\epsilon^3}{8} a_{100} a_{130} (a_{110} + 3 \sqrt{x}^2 a_{130}),$$

$$\xi_1 = \frac{\epsilon^3}{32 \sqrt{x}^2} \left\{ 3(a_{112} a_{212})^{(\cos)} - \sqrt{x}^3 a_{342}^{(\sin)} - 3 \sqrt{x} a_{312}^{(\sin)} \right\},$$

$$\xi_2 = \frac{\epsilon^3}{32 \sqrt{x}^2} \left\{ 3(a_{112} a_{212})^{(\sin)} - \sqrt{x}^3 a_{342}^{(\cos)} + 5 \sqrt{x} a_{312}^{(\cos)} \right\},$$

$$\zeta_1 = \frac{\epsilon^3}{32 \sqrt{x}^2} \left\{ -3(a_{112} a_{212})^{(\sin)} - \sqrt{x}^3 a_{342}^{(\cos)} - 3 \sqrt{x} a_{312}^{(\cos)} \right\},$$

$$\zeta_2 = \frac{\epsilon^3}{32 \sqrt{x}^2} \left\{ 3(a_{112} a_{212})^{(\cos)} + \sqrt{x}^3 a_{342}^{(\sin)} - 5 \sqrt{x} a_{312}^{(\sin)} \right\},$$

α, δ и λ приведены в (14). 6

Предположив, что $a_{110} \in (-\frac{3}{2}\sqrt{x}^2 - \Delta, -\frac{3}{2}\sqrt{x}^2 + \Delta)$, (25) где $\Delta = O(\epsilon^3)$, и пренебрегая всеми членами порядка выше ϵ^3 , можно построить интеграл движения

$$A \cos 3\psi - B \sin 3\psi = -3 \left(\frac{D}{2} \frac{1}{a} + \frac{E}{4} a \right) + c \frac{1}{a^3} + O(\epsilon^3), \quad (26)$$

где A, B и D заданы в (7), а $E = \lambda_1 / 8 \sqrt{x}$.

Зная интеграл движения (26), можно провести более полный качественный анализ системы (23) на фазовой плоскости.

Полученные в настоящей работе результаты позволяют сделать численные оценки основных параметров резонансной системы и получить некоторые характеристики пучка на входе в поле отклоняющего септума магнита.

Литература

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклически ускорителей. Физматгиз, М., 1962.
2. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, Москва, 1970.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, Москва, 1974.
4. Schoch A. Theory of Linear and Non-linear Perturbations of Betatron Oscillations in Alternating Gradient Synchrotron, CERN 57-21, Geneva.
5. Guignard G. A General Treatment of Resonances in Accelerators, CERN 78-11, Geneva, 1978.
6. Василишин Б.В., Иссинский И.Б., Кулакова Е.М. ОИЯИ, Р9-69-72, Дубна, 1973.
7. Василишин Б.В., Иссинский И.Б., Михайлов В.А. ОИЯИ, 9-7498, Дубна, 1973.
8. Conte M., JINR, E9-4925, Dubna, 1970.
JINR, E9-6538, Dubna, 1972.
9. Амирханов И.В., Васильев Б.В., Жидков Е.П. ОИЯИ, Р11-9108, Дубна, 1975; II-9922, Дубна, 1976.
10. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. ОИЯИ, Р11-87-452, Дубна, 1987.
11. Hearn A.C. REDUCE User's MANUAL, Version 3.2, Rand Corporation, Santa Monica, CA 90406, USA, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1988 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1.2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. (2 тома)	7 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р. 00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р. 80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р. 50 к.
—	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. (2 тома)	13 р. 50 к.
Д1.2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. (2 тома)	7 р. 35 к.
Д9-87-105	Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1986. (2 тома)	13 р. 45 к.
Д7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна, 1986.	7 р. 10 к.
Д2-87-123	Труды Совещания "Рейнбргруппа - 86". Дубна, 1986.	4 р. 45 к.
Д4-87-692	Труды Международного совещания по теории малочастичных и кварк-адронных систем. Дубна, 1987.	4 р. 30 к.
Д2-87-798	Труды VIII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1987.	3 р. 55 к.
Д14-87-799	Труды II Международного симпозиума по проблемам взаимодействия мюонов и пионов с веществом. Дубна, 1987.	4 р. 20 к.
Д17-88-95	Труды IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1987.	5 р. 20 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е.

P11-88-606

Усредненные уравнения для нелинейного резонанса $3\nu_x = 2$ в высших приближениях по методу Крылова - Боголюбова

Исследуется резонанс третьего порядка ($3\nu_x = 2$), который используется для вывода первичного пучка из синхрофазотрона ОИЯИ. Методом Крылова - Боголюбова в третьем приближении получены укороченные уравнения, проведено исследование этих уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод М.В.Коротковой

Amirkhanov I.V., Zhydkov E.P., Zhydkova I.E.

P11-88-606

Averaged Equations for Nonlinear Resonance $3\nu_x = 2$ in High-Order Approximations by Krylov - Bogolubov Method

The third-order resonance ($3\nu_x = 2$) used for ejecting an initial beam out of JINR synchrophasotron is investigated. The reduced equations are obtained to the Krylov - Bogolubov method in the third approximation. These equations are studied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988