объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-599

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

О ФАКТОРИЗАЦИЯХ КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ С ОДНОВРЕМЕННЫМ УЧЕТОМ ИНФОРМАЦИИ О ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ГЛАВНЫХ БЛОЧНЫХ УГЛОВЫХ МИНОРАХ

Направлено в "ЖВМ и МФ"

---

* Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1988

I. Введение

Настоящая работа является продолжением серии работ[x)] [I÷5] и посвящена построению различных факторизованных представлений квазитрехдиагональных матриц вида

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_1 & \tilde r_2 & & & & \\ \tilde p_2 & E_2 & \tilde r_3 & & & \\ & \tilde p_3 & E_3 & \tilde r_4 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \tilde p_{m-1} & E_{m-1} & \tilde r_m \\ & & & & \tilde p_m & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & & & \\ & q_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & q_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & q_{m-1} \\ & & & & & & q_m \end{bmatrix}=\tilde{\mathbb{C}}\cdot\mathbb{C}_D, \tag{I.I}$$

где
$$\left\{\tilde r_k=r_k\cdot q_k^{-1}\ ;\ \tilde p_k=p_k\cdot q_{k-1}^{-1}\right\},\ k=2,3,\dots,m. \tag{I.2}$$

Здесь $\{E_k,q_k\}_{k=2}^{m}$ – <u>неособенные</u> (E_k – единичные) квадратные (в общем случае разных размерностей) диагональные элементы-блоки[xx)], а $\{r_k,p_k;\tilde r_k,\tilde p_k\}_{k=2}^{m}$ – прямоугольные (соответствующих размерностей) внедиагональные элементы-блоки у матриц $\mathbb{C}$ и $\tilde{\mathbb{C}}$ соответственно и $\mathbb{C}_D$ – квазидиагональная матрица. Вид факторизованных представлений матриц $\mathbb{C}$ (I.I) обусловлен прежде всего значениями их главных верхних (нижних) угловых квазиминоров.

<u>Замечание I</u>. Следует напомнить, что в настоящей серии работ понятия квазитрехдиагональная и блочная трехдиагональная матрица являются эквивалентными. Эквивалентными также являются понятия верхних (нижних) главных угловых квазиминоров и верхних (нижних) главных блочных угловых миноров $-\Delta_1^i(\Delta_j^m)$ т.е. миноров (определителей) матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), начинающихся соответственно с q_1 (и с q_m)-(матриц-блоков).

Ниже мы приводим лишь те из основных результатов, полученных нами в [I÷5], которые будут явно использованы в дальнейших исследованиях, являющихся естественным продолжением [5]. При этом все результаты настоящей работы будут очевидно справедливыми и для трехдиагональных матриц $\mathbb{C}$ (I.I).

Итак, если все (в том числе и $\det(\mathbb{C})\neq 0$) главные верхние (нижние) угловые квазиминоры матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) отличны от нуля, то (как показано в [3]) для $\mathbb{C}$ (а также для им обратных матриц $\mathbb{B}$ т.е. $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$) имеют

---

x) В указанных работах можно найти многочисленные ссылки и на другие оригинальные источники, список которых, конечно же, не претендует на полноту.

xx) Если $\{q_1,q_k,p_k,r_k\}_{k=2}^{m}$ – линейные операторы, то $\mathbb{C}$ (I.I) будет матрицей линейных операторов.

место представления[x)]:

<u>Представление 5(5′)</u>

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & (-\beta_i) & E_i & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Lambda_2 & & & & & \\ & \Lambda_3 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \Lambda_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \Lambda_m & \\ & & & & & \Lambda_{m+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}E_1 & (-\beta_2) & & & \\ & E_2 & (-\beta_3) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & E_i & (-\beta_{i+1}) & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & E_{m-1} & (-\beta_m) \\ & & & & E_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1 & & & & & \\ & q_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & q_i & & \\ & & & & q_{m-1} & \\ & & & & & q_m\end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (I.3)$$

, где

$$\begin{cases}\beta_{k+1} = -(\tilde{\rho}_{k+1}\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}); \quad c_{k+1} = -(\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\tilde{\gamma}_{k+1}), \; k=1,2,\dots,m-1, \\ \Lambda_{k+1} = E_k - \tilde{\rho}_k\cdot\Lambda_k^{-1}\cdot\tilde{\gamma}_k, \quad \Lambda_2 \equiv E_1, \; k=1,2,\dots,m\end{cases} \qquad (I.4)$$

<u>Представление 7(7′)</u>

$$\begin{bmatrix}E_1 & (-\hat{\beta}_2) & & & \\ & E_2 & (-\hat{\beta}_3) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & E_i & (-\hat{\beta}_{i+1}) & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & E_{m-1} & (-\hat{\beta}_m) \\ & & & & E_m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}G_0 & & & & & \\ & G_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & G_{i-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & G_{m-2} & \\ & & & & & G_{m-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}E_1 & & & & \\ (-\hat{c}_2) & E_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & (-\hat{c}_i) & E_i & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & (-\hat{c}_{m-1}) & E_{m-1} \\ & & & (-\hat{c}_m) & E_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1 & & & & & \\ & q_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & q_i & & \\ & & & & q_{m-1} & \\ & & & & & q_m\end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \qquad (I.5)$$

, где

$$\begin{cases}\hat{\beta}_{k+1} = -(\tilde{\gamma}_{k+1}\cdot G_k^{-1}); \quad \hat{c}_{k+1} = -(G_k^{-1}\cdot\tilde{\rho}_{k+1}), \; k=1,2,\dots,m-1, \\ G_{k-1} = E_k - \tilde{\gamma}_{k+1}\cdot G_k^{-1}\cdot\tilde{\rho}_{k+1}, \quad G_{m-1} \equiv E_m, \; k=m-1,m-2,\dots,1\end{cases} \qquad (I.6)$$

<u>Представление 7(7′)</u> <u>Представление 8(8′)</u>

$$(\mathcal{B}_{ij} = q_i^{-1}\cdot\tilde{B}_{ij}) = q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\tilde{B}_{ii}\cdot\prod\limits_{s=j+1}^{i}\beta_s, & 1\le j<i\le m; \\ \prod\limits_{s=i+1}^{j} c_s\cdot\tilde{B}_{jj}, & 1\le i<j\le m,\end{cases} \quad (\mathcal{B}_{ij} = q_i^{-1}\cdot\tilde{B}_{ij}) = q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\prod\limits_{s=j+1}^{i}\hat{c}_s\cdot\tilde{B}_{jj}, & 1\le j<i\le m, \\ \tilde{B}_{ii}\cdot\prod\limits_{s=i+1}^{j}\hat{\beta}_s, & 1\le i<j\le m;\end{cases} \qquad (I.7)$$

<u>Представление 9(9′)</u> <u>Представление 10(10′)</u>

$$(\mathcal{B}_{ij} = q_i^{-1}\cdot\mathcal{B}_{ij}) = q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\mathcal{B}_{ii}\cdot\prod\limits_{s=j+1}^{i}\beta_s, & 1\le j<i\le m, \\ \mathcal{B}_{ii}\cdot\prod\limits_{s=i+1}^{j}\hat{\beta}_s, & 1\le i<j\le m,\end{cases} \quad (\mathcal{B}_{ij} = q_i^{-1}\cdot\mathcal{B}_{ij}) = q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\prod\limits_{s=j+1}^{i}\hat{c}_s\cdot\mathcal{B}_{jj}, & 1\le j<i\le m, \\ \prod\limits_{s=i+1}^{j} c_s\cdot\mathcal{B}_{jj}, & 1\le i<j\le m;\end{cases} \qquad (I.8)$$

---

x) Напомним также, что в [2÷5] была введена отдельная единая нумерация представлений как для самих матриц $\mathbb{C}$, так и для им обратных $\mathcal{B} = \mathbb{C}^{-1}$, а также лемм и теорем, которой мы пользуемся и в настоящей работе.

При этом здесь и всюду далее $\mathbb{C}(\Lambda) = \mathbb{C}(G)$, где $\mathbb{C}(G)$ – представление $\mathbb{C}$ в виде функции нижних главных угловых квазиминоров, а $\mathbb{C}(\Lambda)$ есть представление $\mathbb{C}$ в виде функции верхних главных угловых квазиминоров.

Здесь $\tilde{B}_{kk}$–квадратные <u>неособенные</u> диагональные элементы-блоки матрицы $\tilde{B} = \mathbb{C}^{-1}$ (I.I), единственным образом представимые в виде

$$\tilde{B}_{kk} = (\Lambda_{k+1} + G_{k-1} - E_k)^{-1}, \quad \tilde{B}_{11} = G_0^{-1}, \quad \tilde{B}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1}, \quad k=1,2,\dots,m, \qquad (I.9)$$

где $\{\Lambda, G\}$–определены в (I.4) и (I.6). <u>При этом</u> $\{det(\Lambda_k)\ne 0 \ne det(G_k)\}$ и прямоугольные матрицы $\{c,\hat{c};\beta,\hat{\beta}\}$ выражаются через матрицы $\{\Lambda, G\}$ в виде (I.4) и (I.6). Имели место также следующие порядки умножения в структурных последовательностях матриц:

$$\prod_{s=q+1}^{\rho} c_s = \begin{cases} c_{q+1}\cdot c_{q+2}\cdots c_\rho, & \text{если } \rho > q, \\ E_\rho, & \text{если } \rho \le q;\end{cases} \qquad \prod_{s=q+1}^{\rho}\beta_s = \begin{cases}\beta_\rho\cdot\beta_{\rho-1}\cdots\beta_{q+1}, & \text{если } \rho > q, \\ E_q, & \text{если } \rho\le q;\end{cases} \qquad (I.10)$$

$$\prod_{s=q+1}^{\rho}\hat{\beta}_s = \begin{cases}\beta_{q+1}\cdot\beta_{q+2}\cdots\beta_\rho, & \text{если } \rho > q, \\ E_\rho, & \text{если } \rho\le q;\end{cases} \qquad \prod_{s=q+1}^{\rho}\hat{c}_s = \begin{cases} c_\rho\cdot c_{\rho-1}\cdots c_{q+1}, & \text{если } \rho > q, \\ E_q, & \text{если } \rho\le q;\end{cases} \qquad (I.11)$$

Для $\tilde{B}_{kk}$ (I.9) и структурных последовательностей (I.10) и (I.11) из матриц $\{c,\hat{c};\beta,\hat{\beta}\}$ имели место также следующие "коммутационные" соотношения

$$\prod_{s=i+1}^{j} c_s\cdot\tilde{B}_{jj} = \tilde{B}_{ii}\cdot\prod_{s=i+1}^{j}\hat{\beta}_s \quad \text{для любых } 1\le i<j\le m-1; \quad \prod_{s=j+1}^{i}\hat{c}_s\cdot\tilde{B}_{ii} = \tilde{B}_{jj}\cdot\prod_{s=j+1}^{i}\beta_s \quad \text{для любых } 1\le j<i\le m-1. \qquad (I.12)$$

Кроме того, были получены [3] основные равенства

$$\begin{cases}\hat{c}_{i+1}\cdot\tilde{B}_{ii} = \tilde{B}_{i+1,i+1}\cdot\beta_{i+1}, & 1\le i\le m-1, \\ \tilde{B}_{ii}\cdot\beta_i = \hat{c}_i\cdot\tilde{B}_{i-1,i-1}, & 2\le i\le m;\end{cases} \qquad \begin{cases}\tilde{B}_{ii}\cdot\hat{\beta}_{i+1} = c_{i+1}\cdot\tilde{B}_{i+1,i+1}, & 1\le i\le m-1, \\ c_i\cdot\tilde{B}_{ii} = \tilde{B}_{i-1,i-1}\cdot\hat{\beta}_i, & 2\le i\le m.\end{cases} \qquad (I.13)$$

Далее в [5] были обобщены определения последовательностей матриц $\{G_k\}$ (I.6) и $\{\Lambda_k\}$ (I.4), если в них встречаются вырожденные матрицы, и введены обобщенные последовательности

$$\begin{cases}\text{Если } det(G_k)\ne 0, \text{ то } G_{k-1} = E_k - \tilde{\gamma}_{k+1}\cdot G_k^{-1}\cdot\tilde{\rho}_{k+1}, \; G_{m-1} = E_m, \; k=m-1,m-2,\dots,1. \\ \text{Если } det(G_k) = 0 \text{ для любого } k \text{ из } (1\le k\le m-1), \text{ то } G_{k-1} = ?, \text{ но } G_{k-2} = E_{k-1}.\end{cases} \qquad (I.14)$$

$$\begin{cases}\text{Если } det(\Lambda_k)\ne 0, \text{ то } \Lambda_{k+1} = E_k - \tilde{\rho}_k\cdot\Lambda_k^{-1}\cdot\tilde{\gamma}_k, \; \Lambda_2 = E_1, \; k=2,3,\dots,m. \\ \text{Если } det(\Lambda_k) = 0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m), \text{ то } \Lambda_{k+1} = ?, \text{ но } \Lambda_{k+2} = E_{k+1}.\end{cases} \qquad (I.15)$$

Аппарат обобщенных последовательностей $\{G_k\}$ (I.14) и $\{\Lambda_k\}$ (I.15) позволил нам получить [5] ряд факторизованных представлений для $\mathbb{C}$ (I.I) в случае обращающихся в нуль некоторых из верхних (нижних) главных угловых квазиминоров. В частности, имели место

Представление I5(I5′) (при $det(G_i)=0$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) \\ E_2(-\hat\beta_3) \\ \ddots \\ E_{i-2}(-\hat\beta_{i-1}) \\ E_{i-1}\ \mathbb{O}_i \\ E_i\ \mathbb{O}_{i+1} \\ E_{i+1}(-\hat\beta_{i+2}) \\ \ddots \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \quad (\hat\beta)_2^{i-1}\tilde\xi_i \\ \tilde P_2 G_1 \\ \ddots \\ \tilde P_{i-2} G_{i-3} \quad (\hat\beta)_{i-1}^{i-1}\tilde\xi_i \\ \tilde P_{i-1} E_{i-1}(\tilde\xi_i) \\ \tilde P_i \ E_i \\ \tilde P_{i+1} G_i \\ \ddots \\ (\tilde P_m) G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) = \qquad (I.16)$$

Представление I6(I6′) (при $det(G_i)=0$)

$$= \begin{bmatrix} G_0\ \tilde\xi_1 \\ G_1\ \tilde\xi_2 \\ \ddots \\ G_{i-3}\ \tilde\xi_{i-1} \\ E_{i-1}\ \tilde\xi_i \\ \tilde P_i(c)_2^{i-1} \ldots \tilde P_i(c)_{i-1}^{i-1}(\tilde P_i)\ E_i\ \tilde\xi_{i+1} \\ \tilde P_{i+1}\ G_i\ \tilde\xi_{i+2} \\ \ddots \\ G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat c_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\hat c_{i-1})E_{i-1} \\ \mathbb{O}_i\ E_i \\ \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} \\ (-\hat c_{i+2})E_{i+2} \\ \ddots \\ (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} \qquad (I.17)$$

Представление I9(I9′) (при $det(G_i)=0$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) \\ E_2(-\hat\beta_3) \\ \ddots \\ E_{i-2}(-\hat\beta_{i-1}) \\ E_{i-1}\ \mathbb{O}_i \\ E_i\ \mathbb{O}_{i+1} \\ E_{i+1}(-\hat\beta_{i+2}) \\ \ddots \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \quad (\hat\beta)_2^{i-1}\tilde\xi_i \\ G_1 \\ \ddots \\ G_{i-3} \quad (\hat\beta)_{i-1}^{i-1}\tilde\xi_i \\ E_{i-1}(\tilde\xi_i) \\ \tilde P_i(\hat c)_2^{i-1} \ldots \tilde P_i(\hat c)_{i-1}^{i-1}(\tilde P_i)\ E_i\ \tilde\xi_{i+1} \\ \tilde P_{i+1}\ G_i \\ G_{i+1} \\ \ddots \\ G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat c_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\hat c_{i-1})E_{i-1} \\ \mathbb{O}_i\ E_i \\ \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} \\ (-\hat c_{i+2})E_{i+2} \\ \ddots \\ (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \qquad (I.18)$$

, где

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat\beta)_k^{i-1} = \prod\limits_{s=k}^{i-1}\hat\beta_s,\ (\hat c)_k^{i-1} = \prod\limits_{s=k}^{i-1}\hat c_s, \text{ для всех } k = 2,3,\ldots,i-1;\ \{\hat c, \hat\beta\} \text{ – имеют вид (I.6)} \\ \text{и полностью определены в соответствии с } \{G\}\ (I.14). \end{array} \right. \qquad (I.19)$$

Представление I7(I7′) (при $det(\Lambda_i)=0$)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\beta_{i-1})E_{i-1} \\ \mathbb{O}_i\ E_i \\ \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} \\ (-\beta_{i+2})E_{i+2} \\ \ddots \\ (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2\ \tilde\xi_2 \\ \Lambda_3\ \tilde\xi_3 \\ \ddots \\ \Lambda_i\ \tilde\xi_i \\ \tilde P_i\ E_i\ \tilde\xi_{i+1} \\ (\tilde P_{i+1})E_{i+1}\ \tilde\xi_{i+2} \\ (\beta)_{i+2}^{i+2}\tilde P_{i+1} \quad \Lambda_{i+3}\ \tilde\xi_{i+3} \\ \ddots \\ (\beta)_{i+2}^{m}\tilde P_{i+1} \quad \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (I.20)$$

Представление I8(I8′) (при $det(\Lambda_i)=0$)

$$= \begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ \tilde P_2\Lambda_3 \\ \ddots \\ \tilde P_{i-1}\Lambda_i\ \tilde\xi_i \\ \tilde P_i\ E_i(\tilde\xi_{i+1})\ \tilde\xi_{i+1}(c)_{i+2}^{i+2} \ldots \tilde\xi_{i+1}(c)_{i+2}^{m} \\ \tilde P_{i+1}E_{i+1} \\ \tilde P_{i+2}\Lambda_{i+3} \\ \tilde P_{i+3}\Lambda_{i+4} \\ \ddots \\ \tilde P_m\ \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) \\ E_2(-c_3) \\ \ddots \\ E_{i-2}(-c_{i-1}) \\ E_{i-1}\mathbb{O}_i \\ E_i\mathbb{O}_{i+1} \\ E_{i+1}(-c_{i+2}) \\ \ddots \\ E_{m-1}(-c_m) \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix}, \qquad (I.21)$$

Представление 20(20′) (при $det(\Lambda_i)=0$)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ \ddots \\ (-\beta_{i-1})E_{i-1} \\ \mathbb{O}_i\ E_i \\ \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} \\ (-\beta_{i+2})E_{i+2} \\ \ddots \\ (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \ddots \\ \Lambda_i\ \tilde\xi_i \\ \tilde P_i\ E_i(\tilde\xi_{i+1})\ \tilde\xi_{i+1}(c)_{i+2}^{i+2} \ldots \tilde\xi_{i+1}(c)_{i+2}^{m} \\ (\tilde P_{i+1})E_{i+1} \\ (\beta)_{i+2}^{i+2}\tilde P_{i+1} \quad \Lambda_{i+3} \\ \ddots \\ (\beta)_{i+2}^{m}\tilde P_{i+1} \quad \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(c_2) \\ E_2(c_3) \\ \ddots \\ E_{i-2}(c_{i-1}) \\ E_{i-1}\mathbb{O}_i \\ E_i\mathbb{O}_{i+1} \\ E_{i+1}(c_{i+2}) \\ \ddots \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (I.22)$$

, где

$$\left\{ \begin{array}{l} (c)_{i+2}^{k} = \prod\limits_{s=i+2}^{k} c_s,\ (\beta)_{i+2}^{k} = \prod\limits_{s=i+2}^{k}\beta_s, \text{ для всех } k = i+1, i+2, \ldots, m;\ \{c, \beta\} \text{ – имеют вид} \\ \text{(I.4) и полностью определены в соответствии с } \{\Lambda\}\ (I.15). \end{array} \right. \qquad (I.23)$$

Итак, в работах [I+5] мы получили, в случае как вырожденных, так и невырожденных матриц $\{\Lambda$ и $G\}$, представления для $\mathbb{C}$ (1.1) как функции от $\{\Lambda\}$ либо как функции от $\{G\}$, т.е. $\mathbb{C}(\Lambda)$ либо $\mathbb{C}(G)$. Далее будем рассматривать представления для $\mathbb{C}$ (1.1) как функции от $\{\Lambda\}$ и от $\{G\}$, т.е. $\mathbb{C}(\Lambda, G)$.

2. Факторизованные представления квазитрехдиагональных матриц на основе обоих типов главных угловых квазиминоров, некоторые из которых обращаются в нуль

Имеет место следующий результат.

Лемма 8. Пусть $\mathbb{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида (1.1)+(1.2), и пусть все верхние (нижние) главные угловые квазиминоры $\mathbb{C}$ отличны от нуля. Тогда для $\mathbb{C}$ (1.1) справедливы следующие факторизованные представления, построенные с учетом информации об обоих типах последовательностей матриц $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$, т.е.

Представление 29(29′)

$$
\mathbb{C}(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\rho_2)E_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (-\rho_i)E_i & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & (-\rho_{m-1})E_{m-1} & \\ & & & & & (-\rho_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\tilde z_2) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ \tilde B_{ii}^{-1}\prod_{j=i+1}^{i}\hat c_j = & & (\tilde z_i) & \\ =\prod_{j=i+1}^{i}\rho_j\cdot\tilde B_{ii}^{-1} & & & (\tilde z_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat c_2)E_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & (-\hat c_i)E_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & q_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & q_m \end{bmatrix}, \tag{2.1}
$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 30(30′) Представление 31(31′)

$$
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\rho_2)E_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & (-\rho_i)E_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-\rho_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\tilde B_{11}^{-1}\cdot\tilde z_2\cdot\hat c_2)\tilde z_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & (\tilde B_{ii}^{-1}\cdot\tilde z_{i+1}\cdot\hat c_{i+1})\tilde z_{i+1} & & \\ & & (\tilde B_{m-1m-1}^{-1}\cdot\hat z_m\hat c_m)\tilde z_m & \\ & & & \tilde B_{mm}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} \tilde B_{11}^{-1}\tilde z_2 & & & \\ (\tilde B_{22}^{-1}\cdot\rho_2\cdot\hat z_2)\tilde z_3 & & & \\ & \ddots & & \\ & (\tilde B_{ii}^{-1}\cdot\rho_i\cdot\hat z_i)\tilde z_{i+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\tilde B_{mm}^{-1}\cdot\rho_m\hat z_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat c_2)E_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & (-\hat c_i)E_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}. \tag{2.2}
$$

А также

Представление 32(32′)

$$
\mathbb{C}(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} E_1(-\hat\rho_2) & & & \\ & \ddots & & \\ & E_i(-\hat\rho_{i+1}) & & \\ & & E_{m-1}(-\hat\rho_m) & \\ & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\tilde P_2) & \prod_{j=i+1}^{i}\hat\rho_j\cdot\tilde B_{ii}^{-1}= & \\ & =\tilde B_{ii}^{-1}\cdot\prod_{j=i+1}^{i} c_j & \\ & (\tilde P_i) & \\ 0 & & (\tilde P_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & \\ & E_2(-c_3) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & E_i(-c_{i+1}) & & \\ & & & E_{m-1}(-c_m) & \\ & & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & q_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & q_m \end{bmatrix}, \tag{2.3}
$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 33(33′) Представление 34(34′)

$$
\begin{bmatrix} (\tilde B_{11}^{-1}\cdot\hat\rho_2\cdot\tilde z_2) & & & \\ \tilde P_2(\tilde B_{22}^{-1}\cdot\hat\rho_3\cdot\tilde P_3) & & & \\ & \tilde P_i(\tilde B_{ii}^{-1}\cdot\hat\rho_{i+1}\tilde P_{i+1}) & & \\ & & \tilde P_{m-1}(\tilde B_{m-1m-1}^{-1}\cdot\hat\rho_m\tilde P_m) & \\ & & \tilde P_m & \tilde B_{mm}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(c_2) & & & \\ & E_2(c_3) & & \\ & & E_i(c_{i+1}) & \\ & & & E_{m-1}(c_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda,G)=\begin{bmatrix} E_1(\hat\rho_2) & & & \\ & E_i(\hat\rho_{i+1}) & & \\ & & E_{m-1}(\hat\rho_m) & \\ & & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde B_{11}^{-1} & & & \\ \tilde P_2(\tilde B_{22}^{-1}\cdot\tilde P_2\cdot c_2) & & & \\ & \tilde P_i(\tilde B_{ii}^{-1}\cdot\tilde P_i\cdot c_i) & & \\ & & & \tilde P_m(\tilde B_{mm}^{-1}\cdot\tilde P_m c_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \tag{2.4}
$$

где

последовательности матриц $\{c,\hat c;\rho,\hat\rho,\Lambda,G\}$ определены в виде (I.4) и (I.6), а также

$$
\begin{cases} \tilde B_{KK}^{-1}=(\Lambda_{K+1}+G_{K-1}-E_K), & \text{для всех } K=1,2,3,\dots,m; \\ \tilde B_{mm}^{-1}\equiv\Lambda_{m+1}^{-1};\ \tilde B_{11}^{-1}\equiv G_0^{-1}. & \end{cases} \tag{2.5}
$$

Доказательство. Воспользовавшись неособенностью блочных матриц, входящих в представления 5(5′) и 7(7′), получаем для $\mathbb{C}(\Lambda,G)$ следующие матричные равенства

$$
\begin{cases} 2\hat{\mathbb{C}}(\Lambda,G)=A_1\cdot[(A_2\cdot A_3)\cdot A_6^{-1}+A_1^{-1}\cdot(A_4\cdot A_5)]\cdot A_6, \\ 2\hat{\mathbb{C}}(\Lambda,G)=A_4[A_4^{-1}\cdot(A_1\cdot A_2)+(A_5\cdot A_6)\cdot A_3^{-1}]\cdot A_3, \end{cases} \tag{2.6}
$$

где

$$
A_1=\begin{bmatrix} E_1 & & \\ (-\rho_2)E_2 & \ddots & \\ & \ddots & \\ & & (-\rho_m)E_m \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & \\ & \Lambda_3 & \\ & & \ddots \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & \\ & \ddots & \\ & & E_{m-1}(-c_m) \\ & & E_m \end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix} E_1(-\hat\rho_2) & & \\ & \ddots & \\ & & E_{m-1}(-\hat\rho_m) \\ & & E_m \end{bmatrix},\quad A_5=\begin{bmatrix} G_0 & & \\ & G_1 & \\ & & \ddots \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix},\quad A_6=\begin{bmatrix} E_1 & & \\ (-\hat c_2)E_2 & \ddots & \\ & \ddots & \\ & & (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix}. \tag{2.7}
$$

Получив явный вид $A_1^{-1}, A_6^{-1}, A_4^{-1}$ и A_3^{-1} с учетом (2.7), а также выполнив матричные операции в скобке $[\cdot]$ (2.6) и при этом учитывая коммутационные соотношения (1.I2), а также основные равенства (1.I3), получаем представлении 29(29′) и 32(32′). Далее факторизовав в представлениях 29(29′) и 32(32′) средние матрицы с учетом коммутационных соотношений (1.I2) и основных равенств (1.I3), получаем представления вида 30(30′) и 31(31′). Аналогично из представлении 32(32′) получаем представлении вида 33(33′) и 34(34′). Для установления справедливости полученных представлений на основе перемножения блочных матриц и сравнения результата с $\mathbb{C}$ (1.1) следует воспользоваться равенствами

$$
\tilde B_{KK}^{-1}=(\Lambda_{K+1}+G_{K-1}-E_K),\ \tilde B_{mm}^{-1}=\Lambda_{m+1},\ G_0=\tilde B_{11}^{-1},\ \text{для всех } K=1,2,\dots,m.
$$

Лемма доказана. Теперь, опираясь на результаты предыдущей Леммы, докажем следующую теорему.

Теорема 1б. Пусть $\mathbb{C}$ -неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида (1.1)+(1.2) с прямоугольными элементами-блоками $\{c_K, \rho_K\}_{K=2}^{m}$, размерности которых совпадают с соответствующими размерностями неособенных диагональных матриц-блоков $\{q_K\}_{K=1}^{m}$. Пусть также $det(\Lambda_i)=0$, но $\{det(G_{i-1})\neq 0\}_{i=1}^{m}$ либо $det(G_i)=0$, но $\{det(\Lambda_{i+1})\neq 0\}_{i=1}^{m}$. (Другими словами, если один из верхних квазиминоров обращается в нуль, то ни один из нижних не равен нулю и наоборот). Тогда для $\mathbb{C}$ (1.1) справедливы следующие единственные факторизованные представления

Представление 35(35') (при $det(A_i)=0,\ \{det(G_{j-1})\neq 0\}_{j=1}^{m}$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\beta_2)E_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & (-\beta_{i-1})E_{i-1} & & & & \\ & & & \mathbb{O}_i E_i & & & \\ & & & & \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} & & \\ & & & & & (-\beta_{i+2})E_{i+2} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{z}_2) & & \mathbb{O} \\ L & (\tilde{z}_i) & \\ & G_{i-1}(\tilde{z}_{i+1}) & \\ \mathbb{O} & G_i & \\ & \hat{L} & (\tilde{z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\hat{c}_2)E_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (-\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & \\ & & & (-\hat{c}_i)E_i & & \\ & & & & (-\hat{c}_{i+1})E_{i+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & (-\hat{c}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(A,G) \qquad (2.8)$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 36(36')

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^{-1}\ (\tilde{z}_2) & & & & & \\ & (\tilde{B}_{i-1i-1}^{-1}-\beta_{i-1}\cdot\tilde{z}_{i-1})(\tilde{z}_i) & & & & \\ & & (G_{i-1})(\tilde{z}_{i+1}) & & & \\ & & & (G_i)\ (\tilde{z}_{i+1}) & & \\ & & & & (\tilde{B}_{i+2i+2}^{-1}-\beta_{i+2}\cdot\tilde{z}_{i+2})(\tilde{z}_{i+3}) & \\ & & & & & (\tilde{B}_{mm}^{-1}-\beta_m\cdot\tilde{z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\hat{c}_2)E_2 & & & & & \\ & (-\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & & \\ & & (-\hat{c}_i)E_i & & & \\ & & & (-\hat{c}_{i+1})E_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & (-\hat{c}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(A,G) \qquad (2.9)$$

Представление 37(37')

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\beta_2)E_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & (-\beta_{i-1})E_{i-1} & & & & \\ & & & \mathbb{O}_i E_i & & & \\ & & & & \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} & & \\ & & & & & (-\beta_{i+2})E_{i+2} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{B}_{11}^{-1}-\tilde{z}_2\cdot\hat{c}_2)\ (\tilde{z}_2) & & & & \\ & (\tilde{P}_i)\ (E_i)\ (\tilde{z}_{i+1}) & & & \\ & (\tilde{P}_{i+1})\ (E_{i+1})(\tilde{z}_{i+2}) & & & \\ & (\beta)_{i+2}^{i+2}\cdot\tilde{P}_{i+1} & (\tilde{B}_{i+2i+2}^{-1}-\tilde{z}_{i+3}\cdot\hat{c}_{i+3})(\tilde{z}_{i+3}) & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & (\beta)_{i+2}^{m}\cdot\tilde{P}_{i+1} & & & \tilde{B}_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(A,G) \qquad (2.10)$$

где здесь и всюду далее элементы-блоки L_{kj} и $\hat{L}_{kj}$ нижнетреугольных матриц L и $\hat{L}$ имеют вид

$$\left\{\begin{array}{l} L_{kj}=(\tilde{B}_{kk}^{-1}\cdot\prod_{s=j+1}^{k}\hat{c}_s-\prod_{s=j+1}^{k}\beta_s\cdot\tilde{B}_{jj}^{-1});\ 1\le j\le k\le i-1;\ \hat{L}_{kj}=(\tilde{B}_{kk}^{-1}\cdot\prod_{s=j+1}^{k}\hat{c}_s-\prod_{s=j+1}^{k}\beta_s\cdot\tilde{B}_{jj}^{-1}),\ i+1\le j\le k\le m. \\ \hat{B}_{ii}^{-1}=(A_{i+1}\cdot G_{i-1}\cdot I_i),\ i=1,2,\ldots,m.\ \text{При этом}\ [det(A_i)=0,\ A_{i+1}=I_{i+1}]\to[\tilde{B}_{i+1i+1}^{-1}=G_i], \\ (\beta)_{i+2}^{k}=\prod_{s=i+2}^{k}\beta_s,\ k=i+2,\ldots,m;\ \{\hat{c},\beta\}-\text{определены в (1.4), (1.6).} \end{array}\right. \qquad (2.11)$$

<u>А также</u>

Представление 38(38') (при $det(A_i)=0,\ \{det(G_{j-1})\neq 0\}_{j=1}^{m}$)

$$\begin{bmatrix} E_1(\hat{\beta}_2) & & & & & & \\ & E_2(\hat{\beta}_3) & & & & & \\ & & E_{i-1}(\hat{\beta}_i) & & & & \\ & & & E_i(\hat{\beta}_{i+1}) & & & \\ & & & & E_{i+1}(\hat{\beta}_{i+2}) & & \\ & & & & & E_{m-1}(\hat{\beta}_m) & \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{P}_1) & R & \mathbb{O} \\ & (\tilde{P}_i)G_{i-1} & \\ & (\tilde{P}_{i+1})G_i & \hat{R} \\ \mathbb{O} & & (\tilde{P}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & \\ & E_{i-2}(-c_{i-1}) & & & \\ & & E_{i-1}\mathbb{O}_i & & \\ & & & E_i\mathbb{O}_{i+1} & \\ & & & E_{i+1}(-c_m) & \\ & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(A,G) \qquad (2.12)$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 39(39')

$$\begin{bmatrix} (\tilde{B}_{11}^{-1}-\hat{\beta}_2\cdot\tilde{P}_2) & & & & & & \\ (\tilde{P}_2)(\tilde{B}_{22}^{-1}-\hat{\beta}_3\cdot\tilde{P}_3) & & & & & & \\ & (\tilde{P}_{i-1})(\tilde{B}_{i-1i-1}^{-1}-\hat{\beta}_i\cdot\tilde{z}_i)(\tilde{z}_i) & & & & & \\ & & (\tilde{P}_i)\ (E_i)(\tilde{z}_{i+1})\tilde{z}_{i+1}\cdot(c)_{i+2}^{i+2}\cdots\tilde{z}_{i+1}(c)_{i+2}^{m} & & & & \\ & & & (\tilde{P}_{i+1})\ (E_{i+1}) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & (\tilde{P}_{m-1})(\tilde{B}_{m-1m-1}^{-1}-\hat{\beta}_m\cdot\tilde{P}_m) & \\ & & & & & & (\tilde{P}_m)\ \tilde{B}_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & \\ & E_{i-2}(-c_{i-1}) & & & \\ & & E_{i-1}\mathbb{O}_i & & \\ & & & E_i\mathbb{O}_{i+1} & \\ & & & E_{i+1}(-c_{i+2}) & \\ & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(A,G) \qquad (2.13)$$

Представление 40(40')

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) & & & & & \\ & E_2(-\hat{\beta}_3) & & & & \\ & & E_{i-1}(-\hat{\beta}_i) & & & \\ & & & E_i(-\hat{\beta}_{i+1}) & & \\ & & & & E_{i+1}(-\hat{\beta}_{i+2}) & \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^{-1} & & & & & \\ (\tilde{P}_2)(\tilde{B}_{22}^{-1}-\tilde{P}_2\cdot\hat{c}_2) & & & & & \\ & (\tilde{P}_{i-1})(\tilde{B}_{i-1i-1}^{-1}-\tilde{P}_{i-1}\cdot\hat{c}_{i-1}) & & & & \\ & & (\tilde{P}_i)\ \ (G_{i-1}) & & & \\ & & & (\tilde{P}_{i+1})\ (G_i) & & \\ & & & & (\tilde{P}_{i+2})(\tilde{B}_{i+2i+2}^{-1}-\tilde{P}_{i+2}\cdot c_{i+2}) & \\ & & & & & (\tilde{P}_m)\ (\tilde{B}_{mm}^{-1}-\tilde{P}_m\cdot c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(A,G) \qquad (2.14)$$

где здесь и всюду далее элементы-блоки R_{kj} и $\hat{R}_{kj}$ верхнетреугольных матриц R и $\hat{R}$ имеют вид

$$\left\{\begin{array}{l} R_{kj}=(\prod_{s=k+1}^{j}\hat{\beta}_s\cdot\tilde{B}_{jj}^{-1}-\tilde{B}_{kk}^{-1}\prod_{s=k+1}^{j}c_s),\ 1\le k<j\le i-1;\ \hat{R}_{kj}=(\prod_{s=k+1}^{j}\hat{\beta}_s\cdot\tilde{B}_{jj}^{-1}-\tilde{B}_{kk}^{-1}\prod_{s=k+1}^{j}c_s),\ i+1\le k\le j\le m. \\ \hat{B}_{ii}^{-1}=(A_{i+1}\cdot G_{i-1}\cdot I_i),\ 1\le i\le m.\ \text{При этом}\ [det(A_i)=0,\ A_{i+1}=L_{i+1}]\to[\hat{B}_{i+1i+1}^{-1}=G_i]. \\ (c)_{i+2}^{k}=\prod_{s=i+2}^{k}c_s,\ i+2\le k\le m;\ \{c,\hat{\beta}\}-\text{определены в (1.4), (1.6).} \end{array}\right. \qquad (2.15)$$

Представление 41(41') (при $det(G_i)=0,\ \{det(A_{j+1})\neq 0\}_{j=1}^{m}$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (\hat{\beta}_2)E_2 & & & & & & \\ & (\hat{\beta}_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\ & & (\hat{\beta}_i)E_i & & & & \\ & & & (\hat{\beta}_{i+1})E_{i+1} & & & \\ & & & & (\hat{\beta}_{i+2})E_{i+2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (\hat{\beta}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{z}_2) & & \mathbb{O} \\ L & A_i(\tilde{z}_i) & \\ & A_{i+1}(\tilde{z}_{i+1}) & \\ \mathbb{O} & \hat{L} & (\tilde{z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (\hat{c}_2)E_2 & & & & & \\ & (\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & & \\ & & \mathbb{O}_i E_i & & & \\ & & & \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} & & \\ & & & & (\hat{c}_{i+2})E_{i+2} & \\ & & & & & (\hat{c}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(A,G) \qquad (2.16)$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 42(42′)

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^{-1}(\tilde{z}_2) & & & & & \\ & (\tilde{B}_{22}^{-1}-\beta_2\tilde{z}_2)(\tilde{z}_3) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & (E_{i-1})(\tilde{z}_i) & & \\ \tilde{P}_i(\hat{c})_2^{i-1}\cdots\tilde{P}_i(\hat{c})_{i-1}^{i-1}(\tilde{P}_i) & & & (E_i)(\tilde{z}_{i+1}) & & \\ & & & & (\tilde{P}_{i+1})(\tilde{B}_{i+1i+1}^{-1}-\beta_{i+1}\tilde{z}_{i+1})(\tilde{z}_{i+2}) & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & (\tilde{B}_{mm}^{-1}-\beta_m\tilde{z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\hat{c}_2)E_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & (-\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\ & & O_i\,E_i & & & & \\ & & & O_{i+1}E_{i+1} & & & \\ & & & & (-\hat{c}_{i+2})E_{i+2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & (-\hat{c}_m)E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C}(\Lambda,G) \qquad (2.17)$$

,

Представление 43(43′)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\beta_2)E_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & (-\beta_{i-1})E_{i-1} & & & & \\ & & (-\beta_i)E_i & & & \\ & & & (-\beta_{i+1})E_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{B}_{11}^{-1}-\tilde{z}_2\hat{c}_2)(\tilde{z}_2) & & & & \\ \ddots & & & & \\ & (\tilde{B}_{i-1i-1}^{-1}-\tilde{z}_{i-1}\hat{c}_{i-1})(\tilde{z}_{i-1}) & & & \\ & & (\Lambda_i)(\tilde{z}_i) & & \\ & & (\Lambda_{i+1})(\tilde{z}_{i+1}) & & \\ & & & (\tilde{B}_{i+1i+1}^{-1}-\tilde{z}_{i+2}\hat{c}_{i+2})(\tilde{z}_{i+2}) & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tilde{B}_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C}(\Lambda,G) \qquad (2.18)$$

, где

$$\begin{cases} L_{kj},\ \hat{L}_{kj} \quad \text{- определены в (2.11)},\ \tilde{B}_{ii}^{-1}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i),\ 1\le i\le m; \\ \underline{\text{При этом}}\ [\det(G_i)=0,\ G_{i-1}\equiv E_{i-1}] \Rightarrow [\tilde{B}_{i-1i-1}^{-1}=\Lambda_i];\ (\hat{c})_k^{i-1}=\prod_{j=k}^{i-1}\hat{c}_j,\ 2\le k\le i-1. \end{cases} \qquad (2.19)$$

А также

Представление 44(44′) (при $\det(G_i)=0,\ \{\det(\Lambda_{j+1})\neq 0\}_{j=1}^{m}$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) & & & & & & \\ & E_2(\hat{\beta}_3) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & E_{i-2}(-\hat{\beta}_{i-1}) & & & \\ & & & & E_{i-1}O_i & & \\ & & & & & E_i\,O_{i+1} & \\ & & & & & & E_{i+1}(\hat{\beta}_{i+2}) \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{P}_2) & R & & O \\ & \ddots & & \\ & & \Lambda_i & \\ & & (\tilde{P}_i)\Lambda_{i+1} & \\ & & (\tilde{P}_{i+1}) & \hat{R} \\ O & & \ddots & \\ & & & (\tilde{P}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & & \\ & E_2(-c_3) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & E_{i-1}(-c_i) & & & \\ & & & E_i(-c_{i+1}) & & \\ & & & & E_{i+1}(c_{i+2}) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C}(\Lambda,G) \qquad (2.20)$$

,

либо эквивалентные ему два представления

Представление 45(45′)

$$\begin{bmatrix} (\tilde{B}_{11}^{-1}\hat{\beta}_2P_2) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & (\tilde{P}_{i-1})(\tilde{B}_{i-1i-1}^{-1}\hat{\beta}_iP_i) & & & & \\ & & (\tilde{P}_{i-1})\ (\Lambda_i) & & & \\ & & & (\tilde{P}_i)\ (\Lambda_{i+1}) & & \\ & & & & (\tilde{P}_{i+1})(\tilde{B}_{i+1i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+2}P_{i+1}) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & (\tilde{P}_m)\ \tilde{B}_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(c_2) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & E_{i-1}(c_i) & & & & \\ & & E_i(c_{i+1}) & & & \\ & & & E_{i+1}(c_{i+2}) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & E_{m-1}(c_m) & \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C}(\Lambda,G) \qquad (2.21)$$

,

Представление 46(46′)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) & & & & & & \\ & E_2(-\hat{\beta}_3) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & E_{i-2}(-\hat{\beta}_{i-1}) & & & \\ & & & & E_{i-1}O_i & & \\ & & & & & E_iO_{i+1} & \\ & & & & & & E_{i+1}(-\hat{\beta}_{i+2}) \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^{-1} & & & (\hat{\beta})_2^{i-1}\tilde{z}_i \\ (\tilde{P}_2)(\tilde{B}_{22}^{-1}-\tilde{P}_2c_2) & & & (\hat{\beta})_3^{i-1}\tilde{z}_i \\ & \ddots & & \vdots \\ & (\tilde{P}_{i-1}) & (E_{i-1})(\tilde{z}_i) & \\ & & (\tilde{P}_i)\ (E_i) & \\ & & (\tilde{P}_{i+1})(\tilde{B}_{i+1i+1}^{-1}-\tilde{P}_{i+1}c_{i+1}) & \\ & & & \ddots \\ & & & (\tilde{P}_m)(\tilde{B}_{mm}^{-1}-\tilde{P}_mc_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C}(\Lambda,G) \qquad (2.22)$$

, где

$$\begin{cases} R_{kj},\ \hat{R}_{kj} \quad \text{- определены в (2.15); } \underline{\text{При этом}}\ \tilde{B}_{ii}^{-1}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i),\ 1\le i\le m, \\ [\det(G_i)=0,\ G_{i-1}\equiv E_{i-1}] \Rightarrow [\tilde{B}_{i-1i-1}^{-1}=\Lambda_i],\ (\hat{\beta})_k^{i-1}=\prod_{j=k}^{i-1}\hat{\beta}_j,\ 2\le k\le i-1. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Доказательство[x]. Комбинируя представление 7(7′) с представлением 19(19′) и соответственно представление 5(5′) с представлением 20(20′) для $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda,G)$ имеем

Если $\det(\Lambda_i)=0,\ \{\det(G_{j-1})\neq 0\}_{j=1}^{m}$, то $2\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda,G)=A_1\cdot A_2\cdot A_3+Z_1\cdot Z_2\cdot Z_3$.

Если $\det(G_i)=0,\ \{\det(\Lambda_{j+1})\neq 0\}_{j=1}^{m}$, то $2\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda,G)=X_1\cdot X_2\cdot X_3+K_1\cdot K_2\cdot K_3$,

где A_1, A_2, A_3; Z_1, Z_2, Z_3 - матрицы-сомножители, входящие в представления 7(7′) и 19(19′), и соответственно X_1, X_2, X_3; K_1, K_2, K_3 - матрицы-сомножители, входящие в представлении 5(5′) и 20(20′). Далее, учитывая неособенность матриц A_1, Z_3, Z_1, A_3, а также X_1, K_3 и K_1, X_3, получаем матричные равенства

$$\begin{cases} 2\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda,G)=A_1\cdot[(A_2\cdot A_3)\cdot Z_3^{-1}+A_1^{-1}(Z_1\cdot Z_2)]\cdot Z_3, \\ 2\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda,G)=Z_1\cdot[Z_1^{-1}(A_1\cdot A_2)+(Z_2\cdot Z_3)\cdot A_3^{-1}]\cdot A_3, \quad \text{при } \det(\Lambda_i)=0,\{\det(G_{j-1})\neq 0\}_{j=1}^{m}. \end{cases} \qquad (2.24)$$

$$\begin{cases} 2\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda,G)=X_1\cdot[(X_2\cdot X_3)\cdot K_3^{-1}+X_1^{-1}(K_1\cdot K_2)]\cdot K_3, \\ 2\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda,G)=K_1\cdot[K_1^{-1}(K_2\cdot K_3)+(K_2\cdot K_3)\cdot X_3^{-1}]\cdot X_3, \quad \text{при } \det(G_i)=0,\{\det(\Lambda_{j+1})\neq 0\}_{j=1}^{m}. \end{cases} \qquad (2.25)$$

Теперь, выполнив все матричные операции в круглых скобках в (2.24) и при этом учитывая коммутационные соотношения (1.12), а также воспользовавшись определением последовательностей (1.14), (1.15), получаем представления 35(35′), 38(38′), из которых следуют представления 36(36′), 37(37′) и соответственно представления 39(39′), 40(40′). Аналогично, выполнив все матричные операции в круглых скобках (2.25), получаем представления 41(41′), 44(44′), из которых также следуют представления 42(42′), 43(43′) и соответственно представления 45(45′),

x) Здесь мы не приводим все подробности доказательства теоремы, а ограничимся лишь основными моментами получения представлений, в силу ограниченности объема публикации.

46(46′). Справедливость полученных представлении проверяется путем перемножения блочных матриц. При этом учитывается, что $\tilde{B}^{-1}_{KK}=(\Lambda_{K+1}-G_{K-1}-E_K)$, $\tilde{B}^{-1}_{mm}=\Lambda_{m+1}$, $\tilde{B}^{-1}_{11}=G_0$ и если $det(\Lambda_K)=0$, то $\Lambda_{K+1}\equiv E_{K+1}$, и следовательно, $\tilde{B}^{-1}_{K+1K+1}=G_K$. Если $det(G_K)=0$, то $G_{K-1}\equiv E_{K-1}$, и следовательно, $\tilde{B}^{-1}_{K-1K-1}=\Lambda_K$. Теорема доказана.

Замечание 2. Как следует из теоремы I6, если воспользоваться явным видом $\tilde{B}^{-1}_{ii}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)$, $\tilde{B}^{-1}_{mm}=\Lambda_{m+1}$, $\tilde{B}^{-1}_{11}=G_0$, то представления 46(46′) и 42(42′) для $\mathbb{C}(\Lambda,G)$ при $det(G_i)=0$ и $\{det(\Lambda_j)\neq 0\}^m_{j=3}$ переходят в представления I5(I5′) и I6(I6′) для $\mathbb{C}(\Lambda)$ с сохранением вида Хессенберга. При этом представления 43(43′) и 45(45′) переходят в представление 5(5′) с сохранением более простого треугольного разложения. Аналогично, при $det(\Lambda_i)=0$ и $\{det(G_j)\neq 0\}^{m-2}_{j=1}$ представления 39(39′) и 37(37′) переходят в представления I8(I8′) и в I7(I7′) соответственно с сохранением вида Хессенберга, а представления 36(36′) и 40(40′) в представление 7(7′) с сохранением простого треугольного разложения. Другими словами, представления 36(36′)÷46(46′) для $\mathbb{C}$ (1.I), использующие информацию об обоих типах квазиминоров в виде $\tilde{B}^{-1}_{ii}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)$, $\tilde{B}^{-1}_{mm}=\Lambda_{m+1}$, $\tilde{B}^{-1}_{11}=G_0$, носят более общий характер, чем представления, использующие информацию лишь об одном из типов квазиминоров.

Далее покажем справедливость следующей теоремы, которая рассматривает возможность одновременного вырождения матриц в последовательностях $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$.

Теорема I7. Пусть $\mathbb{C}$ -неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (1.I)÷(1.2) с прямоугольными элементами-блоками $\{\hat{c}_K, \tilde{c}_K\}^m_{K=1}$, размерности которых совпадают с размерностями соответствующих неособенных диагональных (в общем случае разных размерностей) матриц-блоков $\{q_K\}^m_{K=1}$. Пусть также $det(\Lambda_i)=0$ и $det(G_{i-1})=0$ либо $det(G_i)=0$ и $det(\Lambda_{i+1})=0$. Другими словами, одновременно вырождаются только соседние верхние и нижние главные угловые квазиминоры матрицы $\mathbb{C}$ (1.1). Тогда для $\mathbb{C}$ (1.1) справедливы следующие единственные факторизованные представления:

Представление 47(47′) (при $det(G_i)=0$, $det(\Lambda_{i+1})=0$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (\beta_2)E_2 & \ddots & & & & & \\ & (\beta_i)E_i & & & & & \\ & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & & & \\ & & & \Theta_{i+2}E_{i+2} & & & \\ & & & & (\beta_{i+3})E_{i+3} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & (\beta_m)E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\xi_2) & & & \\ \Lambda & \ddots & & \\ & \Lambda_i(\xi_i) & & \\ & \Lambda_{i+1}(\xi_{i+1}) & & \\ & (\beta_i)G_i(\xi_{i+2}) & & \\ & & G_{i+1} & \\ \Phi & & \ddots & (\xi_m) \\ & & & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (\hat{c}_2)E_2 & & & \\ \ddots & & & \\ (\hat{c}_i)E_i & & & \\ \Theta_i E_i & & & \\ \Theta_{i+1}E_{i+1} & & & \\ (\hat{c}_{i+2})E_{i+2} & & & \\ \ddots & & & \\ (\hat{c}_m)E_m & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G) \quad (2.26)$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 48(48′)

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}^{-1}_{11}(\tilde{\xi}_2) & & & & & & \\ & (\tilde{B}^{-1}_{22}-\beta_2\cdot\tilde{\xi}_2)(\tilde{\xi}_3) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & (E_{i+1})(\tilde{\xi}_i) & & & & \\ \tilde{P}_i(\hat{c})^{i-1}_2 \cdots \tilde{P}_i(\hat{c})^{i-1}_{i-1} & (\tilde{P}_i) & (E_i)(\tilde{\xi}_{i+1}) & & & & \\ & & (\tilde{P}_{i+1}) & G_i(\tilde{\xi}_{i+2}) & & & \\ & & & G_{i+1}(\tilde{\xi}_{i+3}) & & & \\ & & & & (\tilde{B}^{-1}_{i+3i+3}-\beta_{i+3}\cdot\tilde{\xi}_{i+3})(\tilde{\xi}_{i+4}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (\tilde{B}^{-1}_{mm}-\beta_m\cdot\tilde{\xi}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\hat{c}_2)E_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & (-\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\ & & \Theta_i E_i & & & & \\ & & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & & \\ & & & & (-\hat{c}_{i+2})E_{i+2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (-\hat{c}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G) \quad (2.27)$$

Представление 49(49′)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\beta_2)E_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & (-\beta_i)E_i & & & & & \\ & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & & & \\ & & & \Theta_{i+2}E_{i+2} & & & \\ & & & & (-\beta_{i+3})E_{i+3} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{B}^{-1}_{11}-\tilde{\xi}_2\cdot\hat{c}_2)(\tilde{\xi}_2) & & & & & \\ & (\tilde{B}^{-1}_{22}-\tilde{\xi}_3\cdot\hat{c}_3)(\tilde{\xi}_3) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & (\Lambda_i)(\tilde{\xi}_i) & & & \\ & & (\Lambda_{i+1})(\tilde{\xi}_{i+1}) & & & \\ & & (\tilde{P}_{i+1})\,E_{i+1}(\tilde{\xi}_{i+2}) & & & \\ & & \tilde{P}_{i+2}\,E_{i+2}(\tilde{\xi}_{i+3}) & & & \\ & & (\beta)^{i+3}_{i+3}\cdot\tilde{P}_{i+2} & (\tilde{B}^{-1}_{i+3i+3}-\tilde{\xi}_{i+4}\cdot\hat{c}_{i+4})(\tilde{\xi}_{i+4}) & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & (\beta)^m_{i+3}\cdot\tilde{P}_{i+2} & & & \tilde{B}^{-1}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G) \quad (2.28)$$

где

$$\begin{cases} L_{Kj}=(\tilde{B}^{-1}_{KK}\cdot\prod\limits_{s=j+1}^{K}\hat{c}_s=\prod\limits_{s=j+1}^{K}\beta_s\cdot\tilde{B}^{-1}_{jj}),\ 1\le j\le K\le i-1;\ \hat{L}_{Kj}=(\tilde{B}^{-1}_{KK}\cdot\prod\limits_{s=j+1}^{K}\hat{c}_s=\prod\limits_{s=j+1}^{K}\beta_s\cdot\tilde{B}^{-1}_{jj}),\ i+2\le j\le K\le m. \\ \tilde{B}^{-1}_{ii}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i),\ 1\le i\le m;\ \text{При этом}\ [\,det(G_i)=0,\ G_{i-1}=E_{i-1}; \\ det(\Lambda_{i+1})=0,\ \Lambda_{i+3}=E_{i+2}]\to[\tilde{B}^{-1}_{i+1i+1}=\Lambda_i;\ \tilde{B}^{-1}_{i+2i+2}=G_{i+1}],\ \text{а также} \quad (2.29) \\ (\hat{c})^{i-1}_K=\prod\limits_{s=K}^{i-1}\hat{c}_s,\ 1\le K\le i-1,\ (\beta)^K_{i+3}=\prod\limits_{s=i+3}^{K}\beta_s,\ \text{и}\ \{\hat{c},\beta\}\ \text{– определены в (1.4),} \end{cases}$$

(1.6).

Представление 50(50′) (при $det(G_i)=0$, $det(\Lambda_{i+1})=0$)

$$\begin{bmatrix} L_1(\hat{\beta}_1) & & & & & & \\ L_2(\hat{\beta}_2) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & L_{i-1}(\hat{\beta}_{i-1}) & & & & & \\ & & L_i\,\Theta_i & & & & \\ & & & L_i\,\Theta_{i+1} & & & \\ & & & & L_{i+1}(\hat{\beta}_{i+2}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & L_{m-1}(\hat{\beta}_m) & \\ & & & & & & L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\beta_2) & & & R \\ & \ddots & & \\ & (\beta_i)\ \Lambda_i & & \\ & (\beta_i)\Lambda_{i+1}(\xi_{i+1}) & & \\ \Phi & (\tilde{P}_{i+1})G_i & & \\ & & G_{i+1} & \hat{R} \\ & & & \ddots \\ & & & (\beta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1(c_2) & & & & & \\ L_2(c_3) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & L_{i-1}(c_i) & & & & \\ & & L_i\,\Theta_{i+1} & & & \\ & & L_{i+1}\,\Theta_{i+2} & & & \\ & & & L_{i+2}(c_{i+3}) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & L_{m-1}(c_m) & \\ & & & & & L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G) \quad (2.30)$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 5I(5I$'$)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & E_{i-2}(-\hat\beta_{i-1}) & & & & \\ & & & E_{i-1}\,\mathcal{O}_i & & & \\ & & & & E_i\,\mathcal{O}_{i+1} & & \\ & & & & & E_{i+1}(-\hat\beta_{i+2}) & \\ & & & & & & \ddots \ \ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde B_{11}^{-1} & & & (\beta)_2^{i-1}\tilde z_i & & \\ (\tilde P_2)(\tilde B_{22}^{-1}-\tilde P_2 c_2) & & & (\beta)_3^{i-1}\tilde z_i & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (\tilde P_{i-1})(E_{i-1})(\tilde z_i) & & & \\ & & & (\tilde P_{i+1})E_i(\tilde z_{i+1}) & & \\ & & & (\tilde P_i)(G_i) & & \\ & & & & (\tilde P_{i+2})(G_{i+1}) & \\ & & & & & \ddots \ \ (\tilde P_m)(\tilde B_{mm}^{-1}-\tilde P_m c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.31)$$

Представление 52(52$'$)

$$\begin{bmatrix} (\tilde B_{11}^{-1}-\hat\beta_2\tilde P_2) & & & & & & \\ (\tilde P_2)(\tilde B_{22}^{-1}-\hat\beta_3\tilde P_3) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & (\tilde P_{i-1})\ (\Lambda_i) & & & & & \\ & & (\tilde P_i)(\Lambda_{i+1})(\tilde z_{i+1}) & & & & \\ & & & (\tilde P_{i+1})\ E_{i+1}(\tilde z_{i+2})\ \ \tilde z_{i+2}(c)_{i+3}^{i+3}\cdots\tilde z_{i+2}(c)_{i+3}^{m} & & & \\ & & & & (\tilde P_{i+2})(\tilde B_{i+2\,i+2}^{-1}-\hat\beta_{i+2}\tilde P_{i+2}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & (\tilde P_m) & \tilde B_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & E_{i-1}(-c_i) & & & \\ & & & E_i\,\mathcal{O}_i & & \\ & & & & E_{i+1}\mathcal{O}_{i+1} & \\ & & & & & E_{i+2}(-c_{i+3}) \\ & & & & & \ddots \ \ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.32)$$

где

$$\begin{cases} R_{kj} = \left(\prod_{s=k+1}^{j}\hat\beta_s\cdot\tilde B_{jj}^{-1} = \tilde B_{kk}^{-1}\cdot\prod_{s=k+1}^{j}c_s\right),\ 1\le k\le j\le i-1;\ \hat R_{kj} = \left(\prod_{s=k+1}^{j}\hat\beta_s\cdot\tilde B_{jj}^{-1} = \tilde B_{kk}^{-1}\cdot\prod_{s=k+1}^{j}c_s\right),\ i+2\le k\le j\le m. \\ \tilde B_{ii}^{-1} = (\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i),\ 1\le i\le m; \quad \underline{\text{При этом}}\ [\det(G_i)=0,\ G_{i-1}=E_{i-1}; \\ \det(\Lambda_{i+1})=0,\ \Lambda_{i+1}=E_{i+1}] \Rightarrow [\tilde B_{i-1\,i-1}^{-1}=\Lambda_i;\ \tilde B_{i+1\,i+1}^{-1}=G_{i+1}], \quad \text{а также} \qquad (2.33) \\ (\hat\beta)_k^{i-1} = \prod_{s=k}^{i-1}\hat\beta_s,\ 2\le k\le i-1;\ (c)_{i+3}^{k} = \prod_{s=i+3}^{k}c_s,\ i+3\le k\le m, \quad \text{и } \{c,\hat\beta\} \text{ – оп-} \end{cases}$$

ределены в виде (1.4), (1.6).

Представление 53(53$'$) (при $\det(\Lambda_i)=0$, $\det(G_{i-1})=0$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (\hat\beta_2)E_2 & \ddots & & & & & \\ & (\hat\beta_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\ & & \mathcal{O}_i\,E_i & & & & \\ & & & \mathcal{O}_{i+1}E_{i+1} & & & \\ & & & & (\hat\beta_{i+2})E_{i+2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (\hat\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat\beta_2) & & & & \\ L & \ddots & & \mathcal{O} & \\ & \Lambda_{i-1} & & & \\ & & \Lambda_i(\hat z_i) & & \\ & & (\tilde P_i)\,G_i(\hat z_{i+1}) & & \\ & \mathcal{O} & & G_i & \\ & & & \hat L & \ddots \ \ (\hat\beta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (\hat c_2)E_2 & \ddots & & & & \\ & (\hat c_{i-1})E_{i-1} & & & & \\ & & \mathcal{O}_i\,E_{i-1} & & & \\ & & & \mathcal{O}_i\,E_i & & \\ & & & & (\hat c_{i+1})E_{i+1} & \\ & & & & & \ddots \ \ (\hat c_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.34)$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 54(54$'$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ (-\hat\beta_2)E_2 & \ddots & & & & & & \\ & (-\hat\beta_{i-1})E_{i-1} & & & & & & \\ & & \mathcal{O}_i\,E_i & & & & & \\ & & & \mathcal{O}_{i+1}E_{i+1} & & & & \\ & & & & (-\hat\beta_{i+2})E_{i+2} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & (-\hat\beta_m)E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde B_{11}^{-1}-\tilde z_2\hat c_2)(\tilde z_2) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & (\Lambda_{i-1})(\tilde z_{i-1}) & & & & \\ & & (\Lambda_i)(\tilde z_i) & & & \\ & & (\tilde P_i)\ E_i\ (\tilde z_{i+1}) & & & \\ & & & (\tilde P_{i+1})\,E_{i+1}(\tilde z_{i+2}) & & \\ & & & (\beta)_{i+2}^{i+2}\tilde P_{i+1} & (\tilde B_{i+2\,i+2}^{-1}-\tilde z_{i+3}\hat c_{i+3})(\tilde z_{i+3}) & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & (\beta)_{i+2}^{m}\tilde P_{i+1} & & \tilde B_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.35)$$

Представление 55(55$'$)

$$\begin{bmatrix} \tilde B_{11}^{-1}(\tilde z_2) & & & & & & \\ & (\tilde B_{22}^{-1}-\beta_2\tilde z_2)(\tilde z_3) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & (E_{i-2})(\tilde z_{i-1}) & & & & \\ \tilde P_{i-1}(\hat c)_2^{i-2}\cdots\tilde P_{i-1}(\hat c)_{i-2}^{i-2}\tilde P_{i-1} & & & (E_{i-1})(\tilde z_i) & & & \\ & & & (\tilde P_i)\ G_{i-1}(\tilde z_{i+1}) & & & \\ & & & & G_i(\tilde z_{i+2}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (\tilde B_{mm}^{-1}-\beta_m\tilde z_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\hat c_2)E_2 & \ddots & & & & & \\ & (-\hat c_{i-2})E_{i-2} & & & & & \\ & & \mathcal{O}_{i-1}E_{i-1} & & & & \\ & & & \mathcal{O}_i\,E_i & & & \\ & & & & (-\hat c_{i+1})E_{i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.36)$$

$$\begin{cases} \text{где } L_{kj},\ \hat L_{kj} \ \text{ – определены в (2.29)};\ \tilde B_{ii}^{-1} = (\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i),\ 1\le i\le m; \\ \underline{\text{При этом}}\ [\det(\Lambda_i)=0,\ \Lambda_{i+2}=E_{i+1};\ \det(G_{i-1})=0,\ G_{i-3}=E_{i-2}] \Rightarrow [\tilde B_{i+1\,i+1}^{-1}=G_i;\ \tilde B_{i-2\,i-2}^{-1}=\Lambda_{i-1}], \\ \text{а также } (\hat c)_k^{i-2} = \prod_{s=k}^{i-2}\hat c_s,\ 2\le k\le i-2;\ (\beta)_{i+2}^{k} = \prod_{s=i+2}^{k}\beta_s,\ i+2\le k\le m, \qquad (2.37) \\ \text{и } \{\hat c,\beta\} \ \text{ – определены в (I.4), (I.6).} \end{cases}$$

Представление 56(56$'$) (при $\det(\Lambda_i)=0,\ \det(G_{i-1})=0$)

$$\begin{bmatrix} E_1(\hat\beta_2) & & & & & & & \\ & E_2(\hat\beta_3) & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & E_{i-3}(\hat\beta_{i-2}) & & & & & \\ & & & E_{i-2}\,\mathcal{O}_{i-1} & & & & \\ & & & E_{i-1}\mathcal{O}_i & & & & \\ & & & & E_i(\hat\beta_{i+1}) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & E_{m-1}(\hat\beta_m) & \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde P_2) & R & & & \\ & \ddots & & \mathcal{O} & \\ & & \Lambda_{i-1} & & \\ & & (\tilde P_{i-1})\Lambda_i(\tilde z_i) & & \\ & & (\tilde P_i)\,G_{i-1} & & \\ & & (\tilde P_{i+1})\,G_i & & \\ & \mathcal{O} & & \ddots & \hat R \\ & & & & (\tilde P_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & & & \\ & E_2(-c_3) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & E_{i-2}(-c_i) & & & & \\ & & & E_i\,\mathcal{O}_{i+1} & & & \\ & & & E_{i+1}\mathcal{O}_{i+2} & & & \\ & & & & E_{i+2}(-c_{i+3}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.38)$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 57(57$'$)

$$\begin{bmatrix} E_1(\hat\beta_2) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & E_{i-2}(\hat\beta_{i-1}) & & & & & \\ & & E_{i-2}\mathcal{O}_{i-1} & & & & \\ & & & E_{i-1}\mathcal{O}_i & & & \\ & & & & E_i(\hat\beta_{i+1}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & E_{m-1}(\hat\beta_m) \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde B_{11}^{-1} & & & (\beta)_2^{i-1}\tilde z_i & & \\ (\tilde P_2)(\tilde B_{22}^{-1}-\tilde P_2 c_2) & & & (\beta)_3^{i-1}\tilde z_i & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (\tilde P_{i-1})\ (E_{i-2})(\tilde z_{i-1}) & & & \\ & & & (\tilde P_{i-1})(E_{i-1})(\tilde z_i) & & \\ & & & (\tilde P_i)\ G_{i-1} & & \\ & & & & (\tilde P_{i+1})G_i & \\ & & & & & \ddots \ \ (\tilde P_m)(\tilde B_{mm}^{-1}-\tilde P_m c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.39)$$

Представление 58(58$'$)

$$
\begin{bmatrix}
(\tilde{B}_{11}^{-1}-\hat{\beta}_2\cdot\tilde{P}_2) & & & & & & & \\
(\tilde{P}_2) & (\tilde{B}_{22}^{-1}-\hat{\beta}_3\cdot\tilde{P}_3) & & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & & (\tilde{P}_{i-2}) & (\Lambda_{i-1}) & & & & \\
 & & & (\tilde{P}_{i-1}) & (\Lambda_i) & (\tilde{z}_i) & & \\
 & & & & (\tilde{P}_i) & E_i\cdot(\tilde{z}_{i+1}) & \tilde{z}_{i+1}\cdot(c)_{i+2}^{i+2}\cdots & \tilde{z}_{i+1}\cdot(c)_{i+2}^{m} \\
 & & & & & (\tilde{P}_{i+1}) & E_{i+1} & \\
 & & & & & & (\tilde{P}_{i+2})\,(\tilde{B}_{i+2\,i+2}^{-1}-\hat{\beta}_{i+3}\cdot\tilde{P}_{i+3}) & \\
 & & & & & & \cdots & \\
 & & & & & & (\tilde{P}_m) & \tilde{B}_{mm}^{-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) & & & & & & \\
 & E_2(-c_3) & & & & & \\
 & & \cdots & & & & \\
 & & & E_{i-1}(-c_i) & & & \\
 & & & & E_i\,\mathbb{O}_i & & \\
 & & & & & E_{i+1}\mathbb{O}_{i+1} & \\
 & & & & & & E_{i+2}(-c_{i+3}) \\
 & & & & & & \cdots \\
 & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 & & & & & \\
 & q_2 & & & & \\
 & & \cdots & & & \\
 & & & q_i & & \\
 & & & & \cdots & \\
 & & & & q_{m-1} & \\
 & & & & & q_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.40)
$$

, где

$$
\left\{
\begin{array}{l}
R_{kj},\ \hat{R}_{kj} \quad \text{определены в (2.33);}\ \tilde{B}_{ii}^{-1}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i),\ 1\le i\le m;\ \underline{\text{При этом}} \\
\left[det(\Lambda_i)=0,\ \Lambda_{i+2}\equiv E_{i+1};\ det(G_{i-1})=0,\ G_{i-3}\equiv E_{i-2}\right]\Longrightarrow\left[\tilde{B}_{i+1\,i+1}^{-1}=G_i;\ \tilde{B}_{i-2\,i-2}^{-1}=\Lambda_{i-1}\right], \\
\text{а также}\ (c)_{i+2}^{k}=\prod_{j=i+2}^{k}c_j,\ \ i+2\le k\le m;\ \ (\hat{\beta})_k^{i-2}=\prod_{j=k}^{i-2}\hat{\beta}_j,\ \ 2\le k\le i-2; \qquad (2.41) \\
\{c,\hat{\beta}\} \quad \text{определены в (I.4), (I.6).}
\end{array}
\right.
$$

Доказательство. Воспользовавшись комбинациями представлений 19(19$'$) и 20(20$'$) при $det(G_i)=0$ и $det(\Lambda_{i+1})=0$ либо $det(\Lambda_i)=0$ и $det(G_{i-1})=0$, получаем матричные равенства

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2\tilde{\mathbb{C}}(\Lambda,G)=S_1\cdot[(S_2\cdot S_3)\cdot\hat{S}_3^{-1}+S_1^{-1}(\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2)]\cdot\hat{S}_3, \\
2\hat{\mathbb{C}}(\Lambda,G)=\hat{S}_1\cdot[\hat{S}_1^{-1}(S_1\cdot S_2)+(\hat{S}_2\cdot\hat{S}_3)\cdot S_3^{-1}]\cdot S_3,
\end{array}
\right.
\quad \text{при } det(G_i)=0=det(\Lambda_{i+1}). \qquad (2.42)
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2\tilde{\mathbb{C}}(\Lambda,G)=S_1\cdot[(S_2\cdot S_3)\cdot\hat{S}_3^{-1}+S_1^{-1}(\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2)]\cdot\hat{S}_3, \\
2\hat{\mathbb{C}}(\Lambda,G)=\hat{S}_1\cdot[\hat{S}_1^{-1}(S_1\cdot S_2)+(\hat{S}_2\cdot\hat{S}_3)\cdot S_3^{-1}]\cdot S_3,
\end{array}
\right.
\quad \text{при } det(\Lambda_i)=0=det(G_{i-1}). \qquad (2.43)
$$

где S_1, S_2, S_3 – блочные матрицы, входящие в представление 20(20$'$) и $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$ – блочные матрицы, входящие в представление 19(19$'$) в соответствующих случаях (т.е. при $det(G_i)=0$, $det(\Lambda_{i+1})=0$ либо $det(\Lambda_i)=0$, $det(G_{i-1})=0$). Далее, выполнив все операции над блочными матрицами, стоящими в квадратных скобках (2.42) (и при этом воспользовавшись коммутационными соотношениями (1.12) и основными равенствами (1.13)), а также учитывая, что $[det(G_i)=0, G_{i-1}=E_{i-1}; det(\Lambda_{i+1})=0, \Lambda_{i+1}=E_{i+1}]\Rightarrow[\tilde{B}_{i+1\,i+1}^{-1}=G_i, \tilde{B}_{i-1\,i-1}^{-1}=\Lambda_i]$, получаем представления в виде 47(47$'$), 50(50$'$). В свою очередь, каждое из них порождает представления в виде 48(48$'$), 49(49$'$) и 51(51$'$), 52(52$'$) соответственно. Аналогично тому, как поступили выше, воспользовавшись коммутационными соотношениями (1.12) и основными равенствами (1.13) и при этом учитывая, что $[det(\Lambda_i)=0, \Lambda_{i+1}=E_{i+1}, det(G_{i-1})=0, G_{i-3}=E_{i-2}]\Rightarrow[\tilde{B}_{i+1\,i+1}^{-1}=G_i, \tilde{B}_{i-2\,i-2}^{-1}=\Lambda_{i-1}]$, получаем представления вида 53(53$'$) и 56(56$'$). Они, в свою очередь, порождают представления вида 54(54$'$), 55(55$'$) и 57(57$'$), 58(58$'$) соответственно. Справедливость представлений 53(53$'$)+58(58$'$) устанавливается путем умножения блочных матриц. Теорема доказана.

Замечание 3. Результаты теоремы 17 обобщаются и на случаи, если $\{det(G_i)=0$ и $det(\Lambda_k)=0$ при любых $2\le k\le(i-1)\}$ либо $\{det(\Lambda_i)=0$ и $det(G_k)=0$ при любых $(i-1)\le k\le(m-1)\}$. Однако в целях экономии места мы эти представления не приводим.

Замечание 4. В [5] (теореме 15) нами были получены критерии условного вырождения первого рода матрицы $\mathbb{C}$ (I.1) на основе анализа информации о квазиминорах лишь одного из двух типов. При этом (как следует из (2.35)+(2.36)") равенство $det(\mathbb{C})=0$ может быть следствием $det(\hat{Q})=0$ при условии $det(G_i)=0$ либо $det(Q)=0$ при условии $det(\Lambda_i)=0$. Другими словами, условное вырождение первого рода любой матрицы $\mathbb{C}$ вида (I.1) в общем случае приводит (согласно (2.35)+(2.36)") к проверке вырожденности (невырожденности) блочных матриц $\hat{Q}$ и Q, размерности которых практически в два раза больше размерностей матриц G_i или Λ_i.

Ниже (теорема 18) мы сформулируем результат, суть которого можно охарактеризовать как условное вырождение второго рода любой матрицы $\mathbb{C}$ в виде (I.1). При этом будет использована уже информация об обоих типах квазиминоров. Отметим также, что если $det(G_1)=0$ и $\{det(G_i)\ne0\}_{i=1}^{m-1}$ либо $det(\Lambda_m)=0$, но $\{det(\Lambda_i)\ne0\}_{i=2}^{m}$, то $det(\mathbb{C})=0$ в силу представлений 5(5$'$) и 7(7$'$). Вырождения такого вида любой матрицы $\mathbb{C}$ (I.1) естественно назвать безусловным вырождением (просто вырождением).

Теорема 18. Пусть $\mathbb{C}$ – квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.1)+(I.2) с прямоугольными элементами-блоками $\{\tilde{z}_k, \tilde{P}_k\}_{k=2}^{m}$, размерности которых совпадают с размерностями соответствующих невырожденных квадратных матриц-блоков $\{q_k\}_{k=1}^{m}$, имеющих в общем случае разные размерности. Пусть также $det(\Lambda_i)=0=det(G_i)$, т.е. обращаются одновременно в нуль соответствующие квазиминоры матрицы $\mathbb{C}$ (I.1). Тогда матрица $\mathbb{C}$ (I.1) вырождена, т.е. $det(\mathbb{C})=0$ и для нее справедливы следующие представления:

Представление 59(59$'$) (при $det(\Lambda_i)=0=det(G_i)$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat{\beta}_2) & & & & & & \\
 & E_2(-\hat{\beta}_3) & & & & & \\
 & & \cdots & & & & \\
 & & & E_{i-2}(-\hat{\beta}_{i-1}) & & & \\
 & & & & E_{i-1}\,\mathbb{O}_i & & \\
 & & & & & E_i\,\mathbb{O}_{i+1} & \\
 & & & & & & E_{i+1}(-\hat{\beta}_{i+2}) \\
 & & & & & & \cdots \\
 & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
(\tilde{P}_2) & R & & (\hat{\beta})_2^{i-1}\tilde{z}_i & & \\
 & \ddots & & (\hat{\beta})_3^{i-1}\tilde{z}_i & & \mathbb{O} \\
 & & & \cdots & & \\
 & & & \Lambda_i\,(\tilde{z}_i) & & \\
 & & & (\tilde{P}_i)\,E_i\,(\tilde{z}_{i+1}) & \cdots & \tilde{z}_{i+1}(c)_{i+2}^{m} \\
 & \mathbb{O} & & (\tilde{P}_{i+1})\,G_i & & \hat{R} \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & (\tilde{P}_m)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(c_2) & & & & & & \\
 & E_2(c_3) & & & & & \\
 & & E_{i-2}(c_{i-1}) & & & & \\
 & & & E_{i-1}\,\mathbb{O}_i & & & \\
 & & & & E_i\,\mathbb{O}_{i+1} & & \\
 & & & & & E_{i+1}(c_{i+2}) & \\
 & & & & & E_{m-1}(c_m) & \\
 & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 & & & & \\
 & q_2 & & & \\
 & & q_i & & \\
 & & & q_{m-1} & \\
 & & & & q_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.44)
$$

, где

R_{kj}, $\hat{R}_{kj}$ – определены в (2.33) и $\tilde{B}_{ii}^{-1}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)$, $1\le i\le m$;

$$\begin{cases} \text{При этом } [\det(\Lambda_i)=0,\ \Lambda_{i+2}\equiv E_{i+1};\ \det(G_i)=0,\ G_{i-2}\equiv E_{i-1}] \Rightarrow [\hat{B}^{-1}_{i,i+1}=\Lambda_i;\ \tilde{B}^{-1}_{i,i+1}=G_i]; & (2.45)\\ (\hat{\beta})^{i-1}_{k}=\prod_{j=k}^{i-1}\hat{\beta}_j,\ 2\le k\le i-1;\ (c)^{k}_{i+2}=\prod_{j=i+2}^{k}c_j,\ i+2\le k\le m;\ \{c,\hat{\beta}\}\text{ - определены в виде (I.4),(I.6)} \end{cases}$$

Представление 60(60′) (при $\det(\Lambda_i)=0=\det(G_i)$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\hat{\beta}_2)E_2 & & & & & & \\ & -- & & & & & \\ & (-\hat{\beta}_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\ & & \Theta_i E_i & & & & \\ & & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & & \\ & & & (-\beta_{i+2})E_{i+2} & & & \\ & & & & --- & & \\ & & & & & (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{z}_2) & & & \\ L & \Lambda_i(\tilde{z}_i) & & \mathbb{O} \\ \tilde{P}_i\cdot(\hat{c})^{i-1}_{2}\cdots(\tilde{P}_i)\,E_i(\tilde{z}_{i+1}) & & & \\ & (\hat{B}_{i+1})G_i & & \\ \mathbb{O} & (\beta)^{i+2}_{i+2}\tilde{P}_{i+1} & & \\ & (\beta)^{m}_{i+2}\tilde{P}_{i+1} & \hat{L} & (\tilde{z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\hat{c}_2)E_2 & & & & & \\ --- & & & & & \\ (-\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\ & \Theta_i E_i & & & & \\ & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & & \\ & & (-\hat{c}_{i+2})E_{i+2} & & & \\ & & & --- & & \\ & & & & (-\hat{c}_m)E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ --\\ q_i\\ --\\ q_{m-1}\\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G) \qquad (2.46)$$

, где

$$\begin{cases} L_{kj},\ \hat{L}_{kj} \text{ - определены в (2.29) и } \tilde{B}^{-1}_{ii}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i),\ 1\le i\le m;\\ \underline{\text{При этом также}}\ [\det(\Lambda_i)=0,\ \Lambda_{i+2}\equiv E_{i+1};\ \det(G_i)=0,\ G_{i-2}\equiv E_{i-1}] \Rightarrow [\hat{B}^{-1}_{i,i+1}=G_i,\ \tilde{B}^{-1}_{i,i+1}=\Lambda_i]; & (2.47)\\ (\hat{c})^{i-1}_{k}=\prod_{j=k}^{i-1}\hat{c}_j,\ 2\le k\le i-1;\ (\beta)^{k}_{i+2}=\prod_{j=i+2}^{k}\beta_j,\ i+2\le k\le m;\ \{\hat{c},\beta\}\text{ - определены в виде (I.4),(I.6)} \end{cases}$$

Доказательство. Аналогично тому, как поступили выше при доказательстве теоремы I7, воспользовавшись комбинацией представлений I9(I9′) и 20(20′) и коммутационными соотношениями (I.I2), а также основными равенствами (I.I3), и при этом учитывая, что $[\det(\Lambda_i)=0,\Lambda_{i+2}\equiv E_{i+1}]\Rightarrow[\tilde{B}^{-1}_{i,i+1}=G_i]$ и $[\det(G_i)=0, G_{i-2}\equiv E_{i-1}]\Rightarrow[\ \tilde{B}^{-1}_{i,i-1}=\Lambda_i]$, получаем представления 59(59′) и 60(60′). Их справедливость устанавливается путем перемножения блочных матриц. Далее покажем, что в этом случае (т.е. при $\det(\Lambda_i)=0=\det(G_i)$) матрица $\mathbb{C}$ (1.1) является вырожденной, т.е. $\det(\mathbb{C})=0$. Для этой цели средние матрицы, которые мы будем обозначать как ω и $\hat{\omega}$, соответственно, в 59(59′) и 60(60′) представим в виде[x)]

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & E_{i-1} & & & \\ & & & E_{i-1} & & \\ \hat{A}_1 & \hat{A}_2\cdots & \hat{A}_{i-1} & E_i & & \\ & & & & E_{i+1} & \\ & & & & -- & \\ & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{\beta}_2) & R & (\hat{\beta})^{i-1}_{2}\hat{z}_i & \\ & (\tilde{P}_{i-1})\Lambda_i(\tilde{z}_i) & & \mathbb{O} \\ & \Theta_i T_i(\tilde{z}_{i+1})\cdots\tilde{z}_i(c)^{m}_{i+2} & & \\ \mathbb{O} & \Theta_{i+1}G_i & & \\ & (\tilde{P}_{i+1}) & \hat{R} & \\ & & & (\tilde{P}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & \\ E_2 & & & & \\ -- & & & & \\ E_{i-1} & & & & \\ E_i & & & & \\ \tilde{A}_{i+1} & E_{i+1} & & & \\ \tilde{A}_{i+2} & & E_{i+2} & & \\ & & & -- & \\ \tilde{A}_m & & & & E_m \end{bmatrix} \qquad \omega \qquad (2.48)$$

,

x) Справедливость представлений (2.48) и (2.49) устанавливаются путем перемножения блочных матриц. При этом следует воспользоваться коммутационными соотношениями (1.12) и соответствующими обозначениями (2.11) и (2.15), а также полученными равенствами (2.57) в [3].

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & & \\ & & -- & & & & & & \\ & & & E_{i-1} & & & & & \\ & & & & E_i\ \tilde{B}_{i+1}\ \tilde{B}_{i+2}\cdots\tilde{B}_m & & & & \\ & & & & E_{i+1} & & & & \\ & & & & & E_{i+2} & & & \\ & & & & & & -- & & \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{z}_2) & & & \\ L & (\tilde{z}_{i-1}) & & \mathbb{O}\\ & \Lambda_i\Theta_i & & \\ \tilde{P}_i(\hat{c})^{i-1}_{2}\cdots(\tilde{P}_i)\,T_i & \Theta_{i+1} & & \\ & \tilde{P}_{i+1}\ G_i(\tilde{z}_{i+2}) & & \\ \mathbb{O} & \vdots & & \\ & (\beta)^{m}_{i+2}\tilde{P}_{i+1} & \hat{L} & (\tilde{z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & \hat{B}_1 & & & & \\ & E_2 & \hat{B}_2 & & & & \\ & & -- & & & & \\ & & E_{i-1}\hat{B}_{i-1} & & & & \\ & & E_i & & & & \\ & & & E_{i+1} & & & \\ & & & & -- & & \\ & & & & & E_{m-1} & \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} = \hat{\omega} \qquad (2.49)$$

, где

матрицы $T_i=E_i-(\Theta_i-\hat{\Theta}_i)$; $\Theta_i,\hat{\Theta}_i$ определены в (2.32) и (2.34) в [5],

$$\begin{cases} \hat{A}_k=\tilde{P}_i\cdot\prod_{j=k+1}^{i-1}\hat{c}_j\cdot G^{-1}_{k-1};\ \ \hat{B}_k=G^{-1}_{k-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{i-1}\hat{\beta}_j\cdot\hat{z}_i, \text{ для всех } k=1,2,\dots,i-1;\\ \tilde{B}_k=\hat{z}_{i+1}\cdot\prod_{j=i+2}^{k}c_j\cdot\Lambda^{-1}_{k+1};\ \ \tilde{A}_k=\Lambda^{-1}_{k+1}\cdot\prod_{j=i+2}^{k}\beta_j\cdot\tilde{P}_{i+1}, \text{ для всех } k=i+1,i+2,\dots,m, \end{cases} \qquad (2.50)$$

а также матрицы $[R_{kj},\hat{R}_{kj};\ L_{kj},\hat{L}_{kj};\ (\hat{c}),(c);(\beta),(\hat{\beta});\{\hat{\beta},\beta;c,\hat{c},\Lambda,G\}]$ определены в (2.12) и (2.15).

Теперь, воспользовавшись определениями (2.11) и (2.15) для $R_{kj},\hat{R}_{kj}$; $L_{kj},\hat{L}_{kj}$ и при этом учитывая, что $[\det(\Lambda_i)=0,\Lambda_{i+2}\equiv E_{i+1};\det(G_i)=0,$ $G_{i-2}\equiv E_{i-1}]\Rightarrow[\hat{B}^{-1}_{i,i-1}=\Lambda_i,\tilde{B}^{-1}_{i,i+1}=G_i]$, квадратные блочные матрицы, входящие в (2.48) и (2.49), представим в виде

$$\omega_{i,i-1}=\begin{bmatrix} (\tilde{P}_2) & R \\ & \\ \mathbb{O} & (\tilde{P}_{i-1})\Lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{P}_2) & R & (\hat{\beta})^{i-1}_{2}\\ & & \vdots\\ \mathbb{O} & & (\hat{\beta})^{i-1}_{i-1}\\ & (\tilde{P}_{i-1}) & E_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & \\ & \\ & E_{i-1}\\ & & \Lambda_i \end{bmatrix},\quad \omega_{i+1,i+1}=\begin{bmatrix} G_i & \\ \tilde{P}_{i+1} & \hat{R}\\ \mathbb{O} & (\tilde{P}_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_i & \\ & E_{i+2} \\ & & L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{i+1}\ (c)^{i+2}_{i+2}\cdots(c)^{m}_{i+2}\\ \tilde{P}_{i+1} & \hat{R}\\ \mathbb{O} & (\tilde{P}_m) \end{bmatrix} \qquad (2.51)$$

.

Аналогично, для $\hat{\omega}_{i,i-1}$, $\hat{\omega}_{i+1,i+1}$, имеем

$$\hat{\omega}_{i,i-1}=\begin{bmatrix} \tilde{z}_2 & \mathbb{O}\\ & \\ L & \tilde{z}_{i-1}\\ & \Lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & \\ E_2 & \\ & \\ E_{i-2} & \\ & \Lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{z}_2) & & \mathbb{O}\\ L & & \\ & & (\tilde{z}_{i-1})\\ (\hat{c})^{i-1}_{2}\cdots(\hat{c})^{i-1}_{i-1} & & E_{i-1} \end{bmatrix},\quad \hat{\omega}_{i+1,i+1}=\begin{bmatrix} G_i\ \tilde{z}_{i+2} & \mathbb{O}\\ & \\ \hat{L} & \tilde{z}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{i+1}(\tilde{z}_{i+2}) & & \mathbb{O}\\ (\beta)^{i+2}_{i+2} & & \\ \vdots & & \\ (\beta)^{m}_{i+2} & \hat{L} & (\tilde{z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i & \\ & E_{i+2} \\ & & \\ & & E_m \end{bmatrix} \qquad (2.52)$$

.

Из представлений (2.51)+(2.52) получаем, что матрицы $\omega_{i,i-1}$, $\omega_{i+1,i+1}$, $\hat{\omega}_{i,i-1}$ и $\hat{\omega}_{i+1,i+1}$ будут вырожденными в силу $\det(\Lambda_i)=0=\det(G_i)$. Отсюда, учитывая (2.48) и (2.49), получаем $\det(\omega)=0=\det(\hat{\omega})$, откуда с учетом представлений 59(59′) и 60(60′) следует $\det(\mathbb{C})=0$. Теорема доказана.

Заключение

Получено множество различных типов представлений квазитрехдиагональных матриц в случае обращающихся в нуль некоторых из главных угловых квазиминоров. При этом доказаны теоремы I6 и I7 о представлениях $\mathbb{C}$ (I.I) на основе обоих типов главных угловых квазиминоров, некоторые из которых обращаются в нуль, а также теорема I8 об условном вырождении второго рода квазитрехдиагональных матриц.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за поддержку настоящего цикла работ.

Литература

1. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ,РII-86-504, Дубна, 1986.
2. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ,РII-87-524, Дубна, 1987.
3. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ,РII-87-533, Дубна, 1987.
4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ,РII-87-623, Дубна, 1987.
5. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ,РII-88-598, Дубна, 1988.
6. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., ФМЛ, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1988 года

Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Р11-88-599
О факторизациях квазитрехдиагональных матриц с одновременным учетом информации о верхних и нижних главных блочных угловых минорах

Получены факторизованные представления квазитрехдиагональных матриц с одновременным учетом информации о значениях как верхних, так и нижних главных блочных угловых миноров.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой.

Emelyanenko G.A., Rakhmonov T.T. P11-88-599
On the Factorizations of Quasitridiagonal Matrices with Simultaneous Account of the Data on the Upper and Low Main Block Angular Minors

The factorization representations of quasitridiagonal matrices with simultaneous account of the data on both the quantities of upper and low main block angular minors, have been obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988