объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-598

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

О МНОЖЕСТВЕ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ СО ВСЕМИ ОТЛИЧНЫМИ ОТ НУЛЯ (А ТАКЖЕ НЕКОТОРЫМИ ОБРАЩАЮЩИМИСЯ В НУЛЬ) ГЛАВНЫМИ БЛОЧНЫМИ УГЛОВЫМИ МИНОРАМИ

Направлено в "ЖВМ и МФ"

* Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1988

I. Введение

Квазитрехдиагональные матрицы играют особую роль в вычислительной математике и линейной алгебре. В этом нетрудно убедиться, ознакомившись, например, с [I÷20].

В частности, [9] служит примером того, как аппарат квазитрехдиагональных матриц является по сути одним из основных математических инструментов при моделировании оптимальной геометрии современной экспериментальной установки в физике высоких энергий, а также при разработке ее математического обеспечения. Однако одним из существенных ограничений, снижающих эффективность аппарата полной алгебры квазитрехдиагональных матриц, является требование отличия от нуля всех ее верхних (нижних) блочных угловых миноров.

Настоящая работа – продолжение серии работ [5÷8], результаты которых также были не свободны от указанного ограничения. В частности, нами будут получены различные типы факторизаций квазитрехдиагональных матриц, некоторые из главных блочных угловых миноров которых обращаются в нуль.

Итак, пусть $\mathbb{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица (оператор) общего вида x)

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \tag{I.I}$$

, где

$\{q_k\}_{k=1}^{m}$ – неособенные квадратные (в общем случае разных размерностей) диагональные элементы-блоки, а $\{r_k, p_k\}_{k=2}^{m}$ – прямоугольные внедиагональные элементы-блоки у $\mathbb{C}$ (I.I). При этом минимальные размерности матриц r_k и p_k совпадают с размерностями соответствующих матриц q_k. Матрицу $\mathbb{C}$ (I.I) представим (аналогично тому, как поступали ранее в [5÷8]) в виде xx)

---

x) Напомним, что под матрицей $\mathbb{C}$ (I.I) общего вида понимается случай [illegible], при [illegible]. Отметим, что $\{q_k, r_k, p_k\}$ могут быть даже линейными операторами. Тогда $\mathbb{C}$ (I.I) будет матрицей линейных операторов. В настоящих работах мы используем термин квазитрехдиагональная матрица (как это принято в [14]), хотя в литературе часто используется для $\mathbb{C}$ (I.I) и термин блочная трехдиагональная матрица. Результаты настоящей работы, естественно, справедливы и для трехдиагональных матриц.

xx) Здесь (как в [6÷8] и всюду далее) рассматривается правая факторизация $\mathbb{C}$ (I.I), хотя результаты [6÷8] (и настоящей работы) легко переносятся и на левую факторизацию, т.е. $\mathrm{diag}(q_k)\cdot\mathbb{C}$ (I.I).

$$\mathbb{C}=\tilde{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}_{\mathcal{D}}=\begin{bmatrix} E_1 & \tilde z_2 & & & \\ \tilde\rho_2 & E_2 & \tilde z_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & \tilde\rho_{m-1} & E_{m-1} & \tilde z_m \\ & & & \tilde\rho_m & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & q_{m-1} & \\ & & & & q_m \end{bmatrix}, \text{ где} \tag{I.2}$$

$\{\tilde z_k = z_k q_k^{-1};\ \tilde\rho_k=\rho_k q_{k-1}^{-1}\}_{k=2}^{m}$ – прямоугольные (в общем случае) матрицы (элементы-блоки матрицы $\tilde{\mathbb{C}}$, размерности которых совпадают с размерностями матриц $\{z_k,\rho_k\}_{k=2}^{m}$) и $\{E_k\}_{k=1}^{m}$ – единичные матрицы, размерности которых совпадают с размерностями матриц $\{q_k\}_{k=1}^{m}$. Если все главные верхние (нижние) угловые квази(миноры)[x] матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) (соответственно $\mathbb{C}$ (I.2)) отличны от нуля, то в [7] были получены следующие (теоремы 5÷7) представления[xx] как для самих матриц $\mathbb{C}$ (I.I), так и для им обратных[xxx], т.е.

<u>Представление 5(5′)</u> <u>Представление 6(6′)</u>

$$\begin{bmatrix} I_1 & & \\ (-\beta_2)I_2 & \ddots & \\ & \ddots & \\ & (-\beta_m)I_m & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & \\ & \Lambda_3 & \\ & & \ddots \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(-c_2) & & \\ & \ddots & \\ & I_{m-1}(-c_m) & \\ & & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_{m-1} \\ & & & q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(\Lambda)=\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & \\ & \Lambda_3 & \\ & & \ddots \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & \\ (-\tilde\beta_2)E_2 & \ddots & \\ & (-\tilde\beta_m)E_m & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & \\ & \ddots & \\ & E_{m-1}(-c_m) & \\ & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & \\ & q_2 & \\ & & \ddots \\ & & q_{m-1} \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \text{ где} \tag{I.3}$$

$$\begin{cases} \beta_{k+1}=-(\tilde c_{k+1}\Lambda_{k+1}^{-1}), & \tilde\beta_{k+1}=-(\Lambda_{k+1}^{-1}\tilde\rho_{k+1}),\ k=1,2,\dots,m-1,\\ c_{k+1}=-(\Lambda_{k+1}^{-1}\tilde z_{k+1}), & \Lambda_{k+1}=I_k-\tilde\rho_k\Lambda_k^{-1}\tilde z_k,\ \Lambda_2=I_1,\ k=2,3,\dots,m+1 \end{cases} \tag{I.4}$$

---

x) Под главными верхними (нижними) угловыми квази(минорами), как и в [6÷8], понимаются определители матриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно. При этом записью квази(миноры) мы подчеркиваем справедливость результатов настоящей работы и для трехдиагональных матриц. Ниже, если это не приводит к недоразумениям, мы используем просто термин квазиминоры (либо то же самое: блочные угловые миноры).

xx) Отметим, что мы не приводим здесь все полученные в [6÷8] представления, а ограничиваемся лишь некоторыми из них. При этом здесь и всюду далее $\mathbb{C}(\Lambda)\equiv\mathbb{C}\equiv\mathbb{C}(q)$, где $\mathbb{C}(q)$ – есть представление $\mathbb{C}$ в виде функции нижних главных угловых квазиминоров, а $\mathbb{C}(\Lambda)$ – представление $\mathbb{C}$ в виде функции верхних главных угловых квазиминоров.

xxx) Напомним также, что в [6÷8] была введена отдельная нумерация представлений как для самих матриц $\mathbb{C}$, так и для им обратных $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$, которой мы пользуемся и в настоящей работе.

<u>Представление 7(7′)</u> <u>Представление 8(8′)</u>

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat\beta_2) & & \\ & \ddots & \\ & E_{m-1}(-\hat\beta_m) & \\ & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_0 & & \\ & G_1 & \\ & & \ddots \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & \\ (-\hat c_2)E_2 & \ddots & \\ & (-\hat c_m)E_m & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & \\ & q_2 & \\ & & \ddots \\ & & q_{m-1} \\ & & & q_m \end{bmatrix}=\mathbb{C}(G)=\begin{bmatrix} G_0 & & \\ & G_1 & \\ & & \ddots \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(-\tilde{\tilde\beta}_2) & & \\ & \ddots & \\ & E_{m-1}(-\tilde{\tilde\beta}_m) & \\ & & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & & \\ (-\hat c_2)E_2 & \ddots & \\ & (-\hat c_m)E_m & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & & \\ & q_2 & \\ & & \ddots \\ & & q_{m-1} \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \text{ где} \tag{I.5}$$

$$\begin{cases} \hat\beta_{k+1}=-(\tilde z_{k+1}G_k^{-1}), & \tilde{\tilde\beta}_{k+1}=-(G_{k-1}^{-1}\tilde z_{k+1}),\ k=1,2,\dots,m-1;\\ \hat c_{k+1}=-(G_k^{-1}\tilde\rho_{k+1}), & G_{k-1}=E_k-\tilde z_{k+1}G_k^{-1}\tilde\rho_{k+1},\ G_{m-1}=E_m,\ k=m-1,m-2,\dots,1. \end{cases} \tag{I.6}$$

<u>Представление 3(3′)</u>

$$(\mathbb{B}_{ij}=q_i^{-1}\tilde{\mathbb{B}}_{ij})=q_i^{-1}\begin{cases} \tilde{\tilde{\mathbb{B}}}_{ii}\prod_{s=j+1}^{i}\beta_s, & \text{если } 1\le j\le i\le m,\\ \prod_{n=i+1}^{j}c_n\,\tilde{\tilde{\mathbb{B}}}_{jj}, & \text{если } 1\le i\le j\le m \end{cases}, \text{ где} \tag{I.7}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbb{B}}}_{\ell\ell}=\sum_{k=\ell}^{m}\prod_{s=\ell+1}^{k}c_s\,\Lambda_{k+1}^{-1}\prod_{s=\ell+1}^{k}\beta_s,\ \ell=m-1,m-2,\dots,1;\ \tilde{\tilde{\mathbb{B}}}_{mm}=\Lambda_{m+1}^{-1}. \tag{I.8}$$

<u>Представление 5(5′)</u>

$$(\mathbb{B}_{ij}=q_i^{-1}\hat{\mathbb{B}}_{ij})=q_i^{-1}\begin{cases} \prod_{n=j+1}^{i}\hat c_n\,\hat{\mathbb{B}}_{jj}, & \text{если } 1\le j\le i\le m,\\ \hat{\mathbb{B}}_{ii}\prod_{s=i+1}^{j}\hat\beta_s, & \text{если } 1\le i\le j\le m \end{cases}, \text{ где} \tag{I.9}$$

$$\hat{\mathbb{B}}_{\ell\ell}=\sum_{k=1}^{\ell}\prod_{s=k+1}^{\ell}\hat c_s\,G_k^{-1}\prod_{s=k+1}^{\ell}\hat\beta_s,\ \ell=2,3,\dots,m,\ \hat{\mathbb{B}}_{11}=G_0^{-1}; \tag{I.10}$$

$\{\beta, c, \hat\beta, \hat c, \Lambda_{k+1}, G_{k-1}\}$ – определены в (I.4) и (I.6).

<u>Представление 7(7′)</u> <u>Представление 8(8′)</u>

$$(\mathbb{B}_{ij}=q_i^{-1}\mathbb{B}_{ij})=q_i^{-1}\begin{cases} \hat{\mathbb{B}}_{ii}\prod_{s=j+1}^{i}\beta_s, & 1\le j\le i\le m,\\ \prod_{n=i+1}^{j}c_n\,\hat{\mathbb{B}}_{jj}, & 1\le i\le j\le m; \end{cases}\quad (\mathbb{B}_{ij}=q_i^{-1}\mathbb{B}_{ij})=q_i^{-1}\begin{cases} \prod_{n=j+1}^{i}\hat c_n\,\tilde{\tilde{\mathbb{B}}}_{jj}, & 1\le j\le i\le m,\\ \tilde{\tilde{\mathbb{B}}}_{ii}\prod_{s=i+1}^{j}\hat\beta_s, & 1\le i\le j\le m. \end{cases} \tag{I.11}$$

<u>Представление 9(9′)</u> <u>Представление 10(10′)</u>

$$(\mathbb{B}_{ij}=q_i^{-1}\mathbb{B}_{ij})=q_i^{-1}\begin{cases} \mathbb{B}_{ii}\prod_{s=j+1}^{i}\beta_s, & 1\le j\le i\le m,\\ \mathbb{B}_{jj}\prod_{s=i+1}^{j}\hat\beta_s, & 1\le i\le j\le m; \end{cases}\quad (\mathbb{B}_{ij}=q_i^{-1}\mathbb{B}_{ij})=q_i^{-1}\begin{cases} \prod_{n=j+1}^{i}\hat c_n\,\mathbb{B}_{jj}, & 1\le j\le i\le m,\\ \prod_{n=i+1}^{j}c_n\,\mathbb{B}_{ii}, & 1\le i\le j\le m. \end{cases} \tag{I.12}$$

Здесь $\tilde{B}_{kk}$ - квадратные <u>неособенные</u> диагональные элементы-блоки матрицы $\tilde{B} = \tilde{C}^{-1}$ для $\tilde{C}$ (I.2), единственным образом представимые в виде

$$\tilde{B}_{kk} = [\Lambda_{k+1} + G_{k-1} - E_k]^{-1}, \quad \tilde{B}_{11} = G_0^{-1}, \quad \tilde{B}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \qquad (I.13)$$

где $\{\Lambda, G\}$ определены в (I.4) и (I.6).

При этом $\{det(\Lambda_k) \neq 0 \neq det(G_k)\}_{k=1}^{m}$ и прямоугольные матрицы $\{\hat{c}, c; \beta, \hat{\beta}\}$ выражаются через матрицы $\{\Lambda, G\}$ в виде (I.4) и (I.6). Имели место также следующие порядки умножения в структурных последовательностях матриц

$$\prod_{j=q+1}^{p} c_j = \begin{cases} c_{q+1} \cdot c_{q+2} \cdots c_p, & \text{если } p > q, \\ E_p, & \text{если } p \leq q; \end{cases} \qquad \prod_{j=q+1}^{p} \beta_j = \begin{cases} \beta_p \cdot \beta_{p-1} \cdots \beta_{q+1}, & \text{если } p > q, \\ E_q, & \text{если } p \leq q; \end{cases} \qquad (I.14)$$

$$\prod_{j=q+1}^{p} \hat{\beta}_j = \begin{cases} \hat{\beta}_{q+1} \cdot \hat{\beta}_{q+2} \cdots \hat{\beta}_p, & \text{если } p > q, \\ E_q, & \text{если } p \leq q; \end{cases} \qquad \prod_{j=q+1}^{p} \hat{c}_j = \begin{cases} \hat{c}_p \cdot \hat{c}_{p-1} \cdots \hat{c}_q, & \text{если } p > q, \\ E_p & \text{если } p \leq q. \end{cases} \qquad (I.15)$$

Для $\tilde{B}_{kk}$ (I.13) и структурных последовательностей (I.14), (I.15) из матриц $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$ имели место также следующие "коммутационные" соотношения

$$\prod_{j=i+1}^{j} c_j \cdot \tilde{B}_{jj} = \tilde{B}_{ii} \cdot \prod_{j=i+1}^{j} \hat{\beta}_j, \text{ для любых } 1 \leq i \leq j \leq m; \quad \prod_{j=j+1}^{i} \hat{c}_j \cdot \tilde{B}_{jj} = \tilde{B}_{ii} \cdot \prod_{j=j+1}^{i} \beta_j, \text{ для любых } 1 \leq j \leq i \leq m. \qquad (I.16)$$

Кроме того, были получены [7] следующие обратимые мультипликативные итерационные процессы для $\{\tilde{B}_{ii}\}$:

$$\begin{cases} \tilde{B}_{ii} = \hat{c}_{i+1}^{-1} \cdot \tilde{B}_{i+1,i+1} \cdot \beta_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \tilde{B}_{ii} = \hat{c}_i \cdot \tilde{B}_{i-1,i-1} \cdot \beta_i^{-1}, & 2 \leq i \leq m; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{B}_{ii} = c_{i+1} \cdot \tilde{B}_{i+1,i+1} \cdot \hat{\beta}_{i+1}^{-1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \tilde{B}_{ii} = c_i^{-1} \cdot \tilde{B}_{i-1,i-1} \cdot \hat{\beta}_i, & 2 \leq i \leq m, \end{cases} \qquad (I.17)$$

в случае, когда все $\{q_i\}_{i=1}^{m}$ - одинаковых размерностей. А также были получены [7] равенства

$$\begin{cases} \hat{c}_{i+1} \cdot \tilde{B}_{ii} = \tilde{B}_{i+1,i+1} \cdot \beta_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \tilde{B}_{ii} \cdot \beta_i = \hat{c}_i \tilde{B}_{i-1,i-1}, & 2 \leq i \leq m; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{B}_{ii} \cdot \hat{\beta}_{i+1} = c_{i+1} \tilde{B}_{i+1,i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ c_i \cdot \tilde{B}_{ii} = \tilde{B}_{i-1,i-1} \hat{\beta}_i, & 2 \leq i \leq m, \end{cases} \qquad (I.18)$$

являющиеся обобщением (I.17), в случае когда

$\{q_i\}_{i=1}^{m}$ - разных размерностей.

2. <u>Факторизованные представления квазитрехдиагональных матриц на основе лишь одного типа главных угловых квазиминоров, некоторые из которых обращаются в нуль</u>

В этом параграфе будут сняты ограничения на квазиминоры. А именно, все перечисленные выше результаты были получены в предположении, что все верхние (нижние) главные угловые квазиминоры матрицы C (I.1) отличны от нуля (не сингулярны). Теперь же мы снимем это ограничение и получим обобщения некоторых из отмеченных выше результатов на слу-

чай, когда некоторые квазиминоры у C (I.1) обращаются в нуль.

Другими словами, ниже мы получим множество факторизованных представлений для неособенной матрицы общего вида C (I.1), если некоторые из верхних (нижних) главных угловых квазиминоров ее обращаются в нуль.

С этой целью определим прежде всего, воспользовавшись идеей из [4,5], последовательности $\{G\}$ (I.4) и $\{\Lambda\}$ (I.6) в обобщенном виде.

<u>Определение I</u>

$$\begin{cases} \text{Если } det(G_k) \neq 0, \text{ то } G_{k-1} = E_k - \tilde{c}_{k+1} \cdot G_k^{-1} \cdot \tilde{\beta}_{k+1}, \; G_{m-1} \equiv E_m, \; k = m-1, m-2, \ldots, 1. \\ \text{Если } det(G_k) = 0 \text{ для любого } k \text{ из } (1 \leq k \leq m-1), \text{ то } G_{k-1} - ?, \text{ но } G_{k-2} \equiv E_{k-1}. \end{cases} \qquad (2.I)$$

$$\begin{cases} \text{Если } det(\Lambda_k) \neq 0, \text{ то } \Lambda_{k+1} = E_k - \tilde{\beta}_k \cdot \Lambda_k^{-1} \cdot \tilde{c}_k, \; \Lambda_2 \equiv E_1, \; k = 2, 3, \ldots, m. \\ \text{Если } det(\Lambda_k) = 0 \text{ для любого } k \text{ из } (3 \leq k \leq m), \text{ то } \Lambda_{k+1} - ?, \text{ но } \Lambda_{k+2} \equiv E_{k+1}. \end{cases} \qquad (2.2)$$

<u>Замечание I</u>. Отметим, что в скалярном случае (лемма 6) [3] были получены для числовых последовательностей

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_i - \gamma_i \cdot \alpha_{i-1}, \; \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \; i = 1, 2, \ldots, m, \\ \beta_{j-1} = \beta_j - \gamma_{j+1} \beta_{j+1}, \; \beta_{m+1} = \beta_m = \beta_{m-1} = 1, \; j = m, m-1, \ldots, 1 \end{cases} \qquad (2.3)$$

, где $\gamma_1 = 0, \gamma_{m+1} = 0$, а $\{\gamma_k\}_{k=2}^{m}$ - произвольные вещественные числа, равенства

$$\gamma_i \cdot (1 - \gamma_{i+1}) = 0 \quad \text{и} \quad \gamma_{j+1} \cdot (1 - \gamma_{j-1}) = 0, \text{ которые} \qquad (2.4)$$

являются <u>теоретически</u> необходимыми и достаточными условиями существования ближайших <u>справа</u> от $\alpha_i = 0$ и <u>слева</u> от $\beta_j = 0$ нулевых значений, т.е. $\alpha_{i+1} = 0$ и $\beta_{j-1} = 0$, а также равенства

$$\gamma_i \cdot (1 - \gamma_{i+1}) \alpha_{i-1} = 0, \quad \gamma_{j+1} (1 - \gamma_{j-1}) \beta_{j+1} = 0, \text{ которые} \qquad (2.5)$$

являются <u>практическими</u> (т.е. при реальных вычислениях на ЭВМ) необходимыми и достаточными условиями существования тех же нулей $\alpha_{i+1} = 0$ и $\beta_{j-1} = 0$. На самом деле, "машинные" нули α_{i+1} и β_{j-1} могут появиться при выполнении (2.5) с машинной точностью ε, если α_{i-1} и β_{j+1} меньше I, хотя точные равенства (2.4) и не имеют места. Далее отметим, что в скалярном случае для последовательностей $\{\Lambda, G\}$ (2.I) и (2.2) в отличие от равенств (2.4) и (2.5) имеют место лишь равенство

$$(1 - \gamma_{i+1}) = 0 \quad \text{и} \quad (1 - \gamma_{j-1}) = 0, \text{ которые} \qquad (2.6)$$

являются необходимыми и достаточными условиями существования ближайших <u>справа</u> от $\Lambda_i = 0$ и <u>слева</u> от $G_j = 0$ нулевых значений $\Lambda_{i+1} = 0$ и $G_{j-1} = 0$ как в теоретических исследованиях, так и при вычислениях на ЭВМ.

Равенства (2.6) являются прямым следствием определения I. На самом деле, если $\Lambda_i=0$ и $G_j=0$, то, учитывая $(2.1)_{1)}$ и $(2.2)_{1)}$ и последовательно выполняя формальный переход от Λ_i к Λ_{i+3} и соответственно от G_j к G_{j-3}, получаем $\Lambda_{i+3}=(1-\gamma_{i+2})=0$ и $G_{j-3}=(1-\gamma_{j-1})=0$, (2.7)
что формально согласуется с $\Lambda_k\cdot\Lambda_{k+1}=-\gamma_k$ и $G_k\cdot G_{k-1}=-\gamma_{k+1}$ [3], а также с доопределениями $(2.1)_{2)}$ и $(2.2)_{2)}$. В общем же матричном случае в соответствии с определением I имеем[x)]:

Лемма 7. Если $det(\Lambda_i)=0$ и $det(G_j)=0$, то условия

$$det(E_{i+2}-\tilde{P}_{i+2}\cdot\tilde{\xi}_{i+2})=0, \text{ при любых } 1\le i\le m-3;\ det(E_{j-2}-\tilde{\xi}_{j-1}\cdot\tilde{P}_{j-1})=0, \text{ при любых } 4\le j\le m-1 \quad (2.8)$$

являются необходимыми и достаточными условиями вырожденности, а условия

$$\|\tilde{\xi}_{j-1}\cdot\tilde{P}_{j-1}\|\le\varepsilon<1 \quad \text{и} \quad \|\tilde{P}_{i+2}\cdot\tilde{\xi}_{i+2}\|\le\varepsilon<1, \quad (2.9)$$

являются достаточными условиями невырожденности матриц $\{\Lambda_{i+3}\}$ и $\{G_{j-3}\}$.

Доказательство. Из определения I (в случае $det(\Lambda_i)=0$ и $det(G_j)=0$ с учетом $\Lambda_{i+2}=E_{i+1}$ и $G_{j-2}=E_{j-1}$) имеем $\Lambda_{i+3}=E_{i+2}-\tilde{P}_{i+2}\cdot\tilde{\xi}_{i+2}$ и $G_{j-3}=E_{j-2}-\tilde{\xi}_{j-1}\cdot\tilde{P}_{j-1}$. Откуда следует, что $det(\Lambda_{i+3})=det(E_{i+2}-\tilde{P}_{i+2}\cdot\tilde{\xi}_{i+2})$ и $det(G_{j-3})=det(E_{j-2}-\tilde{\xi}_{j-1}\cdot\tilde{P}_{j-1})$. Лемма доказана.

Замечание 2. Условия (2.8) и (2.9) на самом деле являются простыми практическими критериями проверки вырожденности и невырожденности матриц $\{\Lambda_{i+3}\}$ и $\{G_{j-3}\}$, если при вычислениях на ЭВМ в последовательностях матриц $\{\Lambda$ и $G\}$ появляются вырожденные матрицы Λ_i или G_j. Эти условия играют важную роль и при теоретическом изучении свойств матриц вида $\mathbb{C}$ (1.1), а также им обратных $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 11. Пусть $\mathbb{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида (1.1)+(1.2) с прямоугольными элементами – блоками $\{\hat{\xi}_k, \hat{P}_k\}_{k=2}^{m}$, минимальные размерности которых совпадают с размерностями невырожденных квадратных матриц $\{q_k\}_{k=1}^{m}$ и пусть $\{G_k\}$, $\{\Lambda_k\}$ – последовательности матриц (2.1), (2.2). Тогда, если одна из $\{G_k\}_{1}^{m-2}$ – матриц, например G_i, либо одна из матриц $\{\Lambda_k\}_{3}^{m}$, например Λ_i, являются вырожденными (т.е. соответствующие главные угловые квазиминоры $\mathbb{C}$ обращаются в нуль), для $\mathbb{C}$ справедливы следующие факторизованные представления[xx)]

x) Напомним, что в настоящих работах принята [6+8] единая нумерация теорем и лемм.

xx) Отметим, что и в случае нулевых главных угловых квазиминоров у $\mathbb{C}$ (у $\mathbb{B}$) мы продолжим введенную нами ранее отдельную нумерацию представлений как для самих матриц $\mathbb{C}$, так и для им обратных $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$, которой мы уже воспользовались для случая ненулевых квазиминоров в [6+8].

Представление 15(15′)

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) & & & & & & \\ \cdots & & & & & & \\ & E_{i-2}(-\hat{\beta}_{i-1}) & & & & & \\ & & E_{i-1}\,\mathbb{O}_i & & & & \\ & & & E_i\,\mathbb{O}_{i+1} & & & \\ & & & & E_{i+1}(-\hat{\beta}_{i+2}) & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & E_{m-1}(-\hat{\beta}_m) & \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 & & & (\hat{\beta})_2^{i-1}\tilde{\xi}_i & & & \\ (\tilde{P}_2)G_1 & & & (\hat{\beta})_3^{i-1}\tilde{\xi}_i & & & \\ \cdots & & & \cdots & & & \\ & (\tilde{P}_{i-2})G_{i-3} & & (\hat{\beta})_{i-1}^{i-1}\tilde{\xi}_i & & & \\ & & (\tilde{P}_{i-1})E_{i-1}(\tilde{\xi}_i) & & & & \\ & & & (\tilde{P}_i)E_i\ (\tilde{\xi}_{i+1}) & & & \\ & & & & (\tilde{P}_{i+1})G_i & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & (\tilde{P}_m)G_{m-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & q_i & & \\ & & \cdots & & \\ & & & q_{m-1} & \\ & & & & q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) = \quad (2.10)$$

Представление 16(16′)

$$= \begin{bmatrix} G_0(\tilde{\xi}_2) & & & & & & \\ & G_1(\tilde{\xi}_3) & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & G_{i-3}(\tilde{\xi}_{i-1}) & & & & \\ & & & E_{i-1}(\tilde{\xi}_i) & & & \\ \tilde{P}_i(\hat{c})_2^{i-1}\ \ldots & \tilde{P}_i(\hat{c})_{i-1}^{i-1} & (\tilde{P}_i) & E_i(\tilde{\xi}_{i+1}) & & & \\ & & & (\tilde{P}_{i+1}) & G_i(\tilde{\xi}_{i+2}) & & \\ & & & & G_{i+1}(\tilde{\xi}_{i+3}) & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\hat{c}_2)E_2 & & & & & & \\ \cdots & & & & & & \\ & (-\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\ & & \mathbb{O}_i E_i & & & & \\ & & & \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} & & & \\ & & & & (-\hat{c}_{i+2})E_{i+2} & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & (-\hat{c}_m)E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & q_i & & \\ & & & q_{m-1} & \\ & & & & q_m \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

где $\{\hat{c}, \hat{\beta}\}$ – имеют вид (1.6), а $(\hat{\beta})_k^{i-1}=\prod_{s=k}^{i-1}\hat{\beta}_s$, $(\hat{c})_k^{i-1}=\prod_{s=k}^{i-1}\hat{c}_s$
для всех $k=2,3,\ldots,i-1$ и полностью определены в соответствии с (2.2). (2.12)

Представление 17(17′)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (\hat{\xi}_2)E_2 & & & & & & \\ \cdots & & & & & & \\ & (\hat{\xi}_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\ & & \mathbb{O}_i E_i & & & & \\ & & & \mathbb{O}_{i+1}E_{i+1} & & & \\ & & & & (\hat{\xi}_{i+2})E_{i+2} & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & (\hat{\xi}_m)E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2(\hat{\xi}_2) & & & & \\ & \Lambda_3(\hat{\xi}_3) & & & \\ & \cdots & & & \\ & & \Lambda_i(\hat{\xi}_i) & & \\ & & (\hat{P}_i)E_i(\hat{\xi}_{i+1}) & & \\ & & (\hat{P}_{i+1})E_{i+1}(\hat{\xi}_{i+2}) & & \\ & & (\rho)_{i+1}^{i+1}\hat{P}_{i+1} & \Lambda_{i+3}(\hat{\xi}_{i+3}) & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & (\rho)_{i+1}^{m}\hat{P}_{i+1} & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & q_i & & \\ & & & q_{m-1} & \\ & & & & q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \quad (2.13)$$

Представление 18(18′)

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & & & \\ (\hat{P}_2)\Lambda_3 & & & & & & \\ \cdots & & & & & & \\ & (\hat{P}_i)\Lambda_i(\hat{\xi}_i) & & & & & \\ & & (\hat{P}_i)E_i(\hat{\xi}_{i+1}) & \hat{\xi}_{i+1}(c)_{i+1}^{i+1} & \ldots & \hat{\xi}_{i+1}(c)_{i+1}^{m} & \\ & & & (\hat{P}_{i+1})E_{i+1} & & & \\ & & & & (\hat{P}_{i+2})\Lambda_{i+3} & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & (\hat{P}_m)\Lambda_{m+1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(\hat{c}_2) & & & & & & \\ & E_2(\hat{c}_3) & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & E_{i-1}(\hat{c}_i) & & & & \\ & & & E_{i-1}\mathbb{O}_i & & & \\ & & & & E_i\mathbb{O}_{i+1} & & \\ & & & & & E_{i+1}(\hat{c}_{i+2}) & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & q_i & & \\ & & & q_{m-1} & \\ & & & & q_m \end{bmatrix}, \text{ где} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases}\{\beta, c\} \text{ – имеют вид (1.4), а } (c)^{\kappa}_{i+2} = \prod_{j=i+2}^{\kappa} c_j\,,\ (\beta)^{\kappa}_{i+2} = \prod_{m=i+2}^{\kappa} \beta_m \quad \text{для всех} \\ \kappa = i+2, i+3, \ldots, m \text{ и полностью определены в соответствии с (2.1).}\end{cases} \qquad (2.15)$$

Доказательство. Прежде всего (Замечание 3) отметим, что получить указанные выше представления в случае $det(\Lambda_i)=0$ либо $det(G_i)=0$ для $\mathbb{C}$ (1.1) в виде (2.10)+(2.15), исходя из [7] представлений 7(7′)+10(10′) (на основе использованной ранее техники доказательства Теоремы 7[7]) весьма сложно. Это связано с тем, что в этом случае $det(\tilde{B}_{ii})=0$.

Ниже мы останавливаемся лишь на некоторых моментах получения представлений (2.10)+(2.15), формально исходя из представлений (1.3)+(1.6) самой матрицы $\mathbb{C}$ (1.1). Итак, пусть в представлении 5(5′) $det(\Lambda_i)=0$. Тогда факторизующие блочные матрицы, входящие в (1.3), формально (хотя Λ_{i+1} и не определена) представим в виде

$$\begin{bmatrix} E_1 &&&&&& \\ (-\beta_2)E_2 & \ddots &&&&& \\ & (-\beta_i)E_{i-1} &&&&& \\ && (-\beta_i)E_i &&&& \\ &&& (-\beta_{i+1})E_{i+1} &&& \\ &&&& (-\beta_{i+2})E_{i+2} && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 &&&&&& \\ (-\beta_2)E_2 & \ddots &&&&& \\ & (-\beta_i)E_{i-1} &&&&& \\ && \mathcal{O}_i\,E_i &&&& \\ &&& \mathcal{O}_{i+1}E_{i+1} &&& \\ &&&& (-\beta_{i+2})E_{i+2} && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& (-\beta_m)E_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{O}_1 &&&&&& \\ \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_2 &&&&& \\ & \mathcal{O}_{i-1} & \mathcal{O}_{i-1} &&&& \\ && (-\beta_i)\mathcal{O}_i &&&& \\ &&& (-\beta_{i+1})\mathcal{O}_{i+1} &&& \\ &&&& \mathcal{O}_{i+2}\ \mathcal{O}_{i+2} && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& \mathcal{O}_m\ \mathcal{O}_m \end{bmatrix} = E_\beta + \tilde{\mathcal{Z}}_\beta, \qquad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} E_1(c_2) &&&&& \\ & E_2(c_3) &&&& \\ && E_{i-1}(c_i) &&& \\ &&& E_{i-1}(c_i) && \\ &&&& E_i(-c_{i+1}) & \\ &&&&& E_{i+1}(c_{i+2}) \\ &&&&& & E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1(c_2) &&&&& \\ & E_2(c_3) &&&& \\ && E_{i-2}(c_{i-1}) &&& \\ &&& E_{i-1}\mathcal{O}_i && \\ &&&& E_i\,\mathcal{O}_{i+1} & \\ &&&&& E_{i+1}(c_{i+2}) \\ &&&&&& E_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{O}_1\ \mathcal{O}_2 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \mathcal{O}_{i-1}\ \mathcal{O}_{i-1} &&& \\ &&& \mathcal{O}_{i-1}(c_i) && \\ &&&& \mathcal{O}_i(-c_{i+1}) & \\ &&&&& \mathcal{O}_{i+1}\ \mathcal{O}_{i+2} \\ &&&&&& \mathcal{O}_m \end{bmatrix}, \quad E_c + \tilde{\mathcal{Z}}_c \qquad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 &&&&&& \\ & \Lambda_2 &&&&& \\ && \Lambda_{i-1} &&&& \\ &&& \Lambda_i &&& \\ &&&& \Lambda_{i+1} && \\ &&&&& \Lambda_{i+2} & \\ &&&&&& \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 &&&&&& \\ & \Lambda_2 &&&&& \\ && \Lambda_{i-1} &&&& \\ &&& E_i &&& \\ &&&& E_{i+1} && \\ &&&&& \Lambda_{i+2} & \\ &&&&&& \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{O}_1 &&&&&& \\ & \mathcal{O}_2 &&&&& \\ && \mathcal{O}_{i-1} &&&& \\ &&& (\Lambda_i - E_i) &&& \\ &&&& (\Lambda_{i+1} - E_i) && \\ &&&&& \mathcal{O}_{i+2} & \\ &&&&&& \mathcal{O}_m \end{bmatrix} = \mathcal{Z}_\Lambda + \tilde{\mathcal{Z}}_\Lambda \qquad (2.18)$$

Теперь, воспользовавшись введенными здесь обозначениями, формально можем записать

$$\begin{cases} \mathbb{C} = (E_\beta + \tilde{\mathcal{Z}}_\beta)\,(\mathcal{Z}_\Lambda + \tilde{\mathcal{Z}}_\Lambda)\,(E_c + \tilde{\mathcal{Z}}_c) = F_\Lambda R_\Lambda + \Delta A, \text{ где} \\ F_\Lambda = E_\beta,\ R_\Lambda = \mathcal{Z}_\Lambda E_c,\ \Delta A = [\tilde{\mathcal{Z}}_\beta \mathcal{Z}_\Lambda E_c + E_\beta \tilde{\mathcal{Z}}_\Lambda E_c + \tilde{\mathcal{Z}}_\beta \tilde{\mathcal{Z}}_\Lambda E_c + E_\beta \mathcal{Z}_\Lambda \tilde{\mathcal{Z}}_c + E_\beta \tilde{\mathcal{Z}}_\Lambda \tilde{\mathcal{Z}}_c + \tilde{\mathcal{Z}}_\beta \mathcal{Z}_\Lambda \tilde{\mathcal{Z}}_c + \tilde{\mathcal{Z}}_\beta \tilde{\mathcal{Z}}_\Lambda \tilde{\mathcal{Z}}_c] \end{cases} \qquad (2.19)$$

При этом, как видим, в формальном представлении ΔA нами использованы пока неопределенные матрицы $\tilde{\mathcal{Z}}_\beta$, $\tilde{\mathcal{Z}}_c$ и $\tilde{\mathcal{Z}}_\Lambda$. Далее, учитывая неособенности матриц $F_\Lambda = E_\beta$, $R_\Lambda = \mathcal{Z}_\Lambda \cdot E_c$, из формального представления $(2.19)_1$, получаем аддитивно-мультипликативные представления

$$F_\Lambda \cdot [R_\Lambda + F_\Lambda^{-1} \Delta A] = \hat{\mathbb{C}}(\Lambda) = [F_\Lambda + \Delta A\, R_\Lambda^{-1}]\, R_\Lambda\,, \qquad (2.20)$$

где с учетом явного вида матриц $\{E_\beta, \mathcal{Z}_\Lambda, E_c;\ \tilde{\mathcal{Z}}_\beta, \tilde{\mathcal{Z}}_c, \tilde{\mathcal{Z}}_\Lambda\}$ для матриц F_Λ^{-1}, R_Λ^{-1} и ΔA имеем

$$F_\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} E_1 && \\ E_2 & \mathcal{O} & \\ \prod\limits_{j=i+1}\beta_j & \ddots & E_{i-1} \end{matrix} & \mathcal{O} \\ E_i & \\ \mathcal{O} & \begin{matrix} E_{i+1} & \mathcal{O} \\ \prod\limits_{j=i+1}\beta_j & E_m \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad R_\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} E_1 & \prod\limits_{j=\kappa+1} c_j \\ E_2 & \\ \mathcal{O} & E_{i-1} \end{matrix} & \mathcal{O} \\ E_i & \\ \mathcal{O} & \begin{matrix} E_{i+1} & \prod\limits_{j=\kappa+1} c_j \\ \mathcal{O} & E_m \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1^{-1} &&&&&& \\ & \Lambda_{i-1}^{-1} &&&&& \\ && E_{i+1} &&&& \\ &&& E_i &&& \\ &&&& \Lambda_{i+2}^{-1} && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& \Lambda_{m+1}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & & \mathcal{O} \\ & (E_i - \Lambda_i)(\tilde{c}_i) & \\ & (\tilde{\beta}_i)\ \mathcal{O}_i\ (\tilde{c}_{i+1}) & \\ & (\tilde{\beta}_{i+1})(E_{i+1} - \Lambda_{i+2}) & \\ \mathcal{O} & & \mathcal{O} \end{bmatrix},$$

где $E_{i+1} - \Lambda_{i+2} \equiv \mathcal{O}_{i+1}$. Далее, подставив явный вид матриц F_Λ^{-1}; R_Λ^{-1} и ΔA в (2.20), получаем представления (2.14) и (2.13) для матриц $\mathbb{C}(\Lambda)$. Аналогично тому, как поступили выше (в случае $det(G_i)=0$, исходя из (1.5)), получаем представления для $\mathbb{C}(G)$ в виде (2.10) и (2.11). Отметим теперь, что справедливость полученных выше представлений нетрудно проверить путем перемножения блочных матриц в (2.10)+(2.15). На самом деле, выполнив в правых и левых частях (2.10) и (2.15) умножении блочных матриц и при этом учитывая определения матриц $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$, получаем квазитрехдиагональную матрицу $\mathbb{C}$ (1.1). Теорема доказана. Далее покажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 12. Пусть $\mathbb{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (1.1)+(1.2) с прямоугольными элементами-блоками $\{\tilde{c}_\kappa, \beta_\kappa\}_{\kappa=2}^{m}$, удовлетворяющая условиям теоремы 11. Тогда для $\mathbb{C}$ (1.1) имеют место также следующие представления:

Представление 19(19′)

$$\begin{bmatrix} E_1(\hat{\beta}_2) &&&&&& \\ & E_2(\hat{\beta}_3) &&&&& \\ && E_{i-2}(\hat{\beta}_{i-1}) &&&& \\ &&& E_{i-1}\mathcal{O}_i &&& \\ &&&& E_i\,\mathcal{O}_{i+1} && \\ &&&&& E_{i+1}(\hat{\beta}_{i+2}) & \\ &&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 & & (\hat{\beta})^{i-1}_2 \tilde{c}_i &&& \\ & G_1 & &&& \\ && G_{i-2} & (\hat{\beta})^{i-1}_{i-1}\tilde{c}_i && \\ && & E_{i-1}(\hat{c}_i) && \\ \tilde{\beta}_i(\hat{c})^{i-1}_2 & \tilde{\beta}_i(\hat{c})^{i-1}_{i-1} & (\tilde{\beta}_i) & E_i & (\tilde{c}_{i+1}) & \\ &&& (\tilde{\beta}_{i+1}) & G_i & \\ &&&&& G_{i+1} \\ &&&&&& G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&&&& \\ (\hat{c}_2)E_2 &&&&&& \\ & (\hat{c}_{i-1})E_{i-1} &&&&& \\ && \mathcal{O}_i E_i &&&& \\ &&& \mathcal{O}_{i+1}E_{i+1} &&& \\ &&&& (\hat{c}_{i+2})E_{i+2} && \\ &&&&& (\hat{c}_m)E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \\ q_i \\ \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}(G) \qquad (2.21)$$

где $\{\hat{\beta}, \hat{c}\}$, $(\hat{\beta})^{i-1}_\kappa$, $(\hat{c})^{i-1}_\kappa$, $\{G_\kappa\}$ – определены в (2.12).

Представление 20(20′)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 &&&&&&& \\
(-\beta_2)E_2 & \ddots &&&&&& \\
& (-\beta_{i-1})E_{i-1} &&&&&& \\
&& \Theta_i E_i &&&&& \\
&&& \Theta_{i+1}E_{i+1} &&&& \\
&&&& (-\beta_{i+2})E_{i+2} &&& \\
&&&&& \ddots && \\
&&&&&& (-\beta_m)E_m &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 &&&&& \\
& \Lambda_3 &&&& \\
&& \ddots &&& \\
&&& \Lambda_i(\tilde{\xi}_i) && \\
&&& (\tilde{P}_i)\,E_i(\tilde{\xi}_{i+1})\,\tilde{\xi}_{i+1}(c)^{i+2}_{i+2}\cdots\tilde{\xi}_{i+1}(c)^{m}_{i+2} && \\
&&& (\tilde{P}_{i+1})\quad E_{i+1} && \\
&&& (\beta)^{i+2}_{i+2}\tilde{P}_{i+1} & \Lambda_{i+3} & \\
&&& \cdots & \ddots & \\
&&& (\beta)^{m}_{i+2}\tilde{P}_{i+1} && \Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) &&&&&& \\
& E_2(-c_3) &&&&& \\
&& \ddots &&&& \\
&&& E_{i-2}(-c_{i-1}) &&& \\
&&&& E_{i-1}\Theta_i && \\
&&&&& E_i\Theta_{i+1} & \\
&&&&&& E_{i+1}(-c_{i+2}) \\
&&&&&& \ddots \\
&&&&&& E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 &&&&& \\
& q_2 &&&& \\
&& \ddots &&& \\
&&& q_i && \\
&&&& \ddots & \\
&&&& q_{m-1} & \\
&&&&& q_m
\end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (2.22)
$$

где $\{\beta, c\}$, $(c)^{\kappa}_{i+2}$, $(\beta)^{\kappa}_{i+2}$, $\{\Lambda_\kappa\}$ – определены в (2.I5).

<u>Доказательство</u>. Сложив представление I7(I7′) с представлением I8(I8′) и одновременно вынося за скобки неособенные факторизующие матрицы, получаем

$$
2\tilde{\mathbb{C}} =
\begin{bmatrix}
E_1 &&&&&& \\
(-\beta_2)E_2 &&&&&& \\
& (-\beta_{i-1})E_{i-1} &&&&& \\
&& \Theta_i E_i &&&& \\
&&& \Theta_{i+1}E_{i+1} &&& \\
&&&& (-\beta_{i+2})E_{i+2} && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& (-\beta_m)E_m
\end{bmatrix}
\left\{
\begin{bmatrix}
\Lambda_2(\tilde{\xi}_2) &&&& \\
& \Lambda_3(\tilde{\xi}_3) &&& \\
&& \ddots && \\
&&& \Lambda_i(\tilde{\xi}_i) & \\
&&& (\tilde{P}_i)E_i(\tilde{\xi}_{i+1}) & \\
&&& (\tilde{P}_{i+1})\quad E_{i+1}(\tilde{\xi}_{i+2}) & \\
&&& (\beta)^{i+2}_{i+2}\tilde{P}_{i+1} & \Lambda_{i+3}(\tilde{\xi}_{i+3}) \\
&&& \cdots & \ddots \\
&&& (\beta)^{m}_{i+2}\tilde{P}_{i+1} & \Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \;\; E_2\prod\limits_{j=\kappa+1} c_j &&&&& \\
\mathbb{O} \;\ddots && \mathbb{O} &&& \\
& E_{i-1} &&&& \\
&& E_i &&& \\
\mathbb{O} &&& E_{i+1} && \\
&&&& E_{i+2}\prod\limits_{j=\kappa+1} c_j & \\
&&&& \mathbb{O} & E_m
\end{bmatrix}
\right. +
$$

$$
\left.
\begin{bmatrix}
E_1 &&&&&& \\
E_2\prod\limits_{j=\kappa}\beta_j & \mathbb{O} &&&&& \\
& E_{i-1} &&&&& \\
&& E_i & \mathbb{O} &&& \\
&&& E_{i+1} &&& \\
\mathbb{O} &&&& E_{i+2} & \mathbb{O} & \\
&&&& \prod\beta_j & E_m &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 &&&& \\
(\tilde{P}_2)\Lambda_3 &&&& \\
& \ddots &&& \\
&& (\tilde{P}_{i-1})\Lambda_i(\tilde{\xi}_i) && \\
&&& (\tilde{P}_i)\,E_i(\tilde{\xi}_{i+1})\,\tilde{\xi}_{i+1}(c)^{i+2}_{i+2}\cdots\tilde{\xi}_{i+1}(c)^{m}_{i+2} & \\
&&& (\tilde{P}_{i+1})E_{i+1} & \\
&&& (\tilde{P}_{i+2})\Lambda_{i+3} & \\
&&& \ddots & \\
&&& (\tilde{P}_m)\quad\Lambda_{m+1} &
\end{bmatrix}
\right\}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) &&&&& \\
& E_2(-c_3) &&&& \\
&& \ddots &&& \\
&& E_{i-2}(-c_{i-1}) &&& \\
&&& E_{i-1}\Theta_i && \\
&&&& E_i\Theta_{i+1} & \\
&&&&& E_{i+1}(-c_{i+2}) \\
&&&&& \ddots \\
&&&&& E_m
\end{bmatrix}.
$$

Далее, выполнив перемножение матриц, стоящих здесь в фигурных скобках, и дальнейшее суммирование, получаем представление для $\mathbb{C}(\Lambda)$ в виде (2.22). Аналогично этому (только с учетом (2.13) и (2.14)) получаем представление (2.21) для $\mathbb{C}(G)$. Проверка справедливости (2.21) и (2.22) устанавливается путем умножения блочных матриц. На самом деле, выполнив перемножения матриц, входящих в (2.21) и (2.22), получаем матрицу $\mathbb{C}$ (1.1). <u>Теорема доказана</u>.

<u>Замечание 4</u>. Отметим, что (2.21) и (2.22) являются неприводимыми представлениями для $\mathbb{C}$ (1.1), переход от которых соответственно к представлениям (2.10), (2.11) и (2.13), (2.14) осуществляется в зависимос

ти от того, как выполнять перемножения матриц в (2.2I) и (2.22). Например, если в (2.2I) левую матрицу умножить на среднюю, то получаем (2.II).

Выше мы рассмотрели представления для $\mathbb{C}$ (I.I) в случае "изолированных" нулевых квазиминоров у $\mathbb{C}$ (I.I), т.е. когда вырождаются в последовательностях $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ лишь по одной матрице, например $det(\Lambda_i)=0$ (либо $det(G_i)=0$). Естественно, возникает вопрос, какими будут представления для $\mathbb{C}$ (I.I), если будут вырождены несколько (например, $det(\Lambda_i)=0$ и $det(\Lambda_{i+3})=0$, соответственно $det(G_i)=0$ и $det(G_{i-3})=0$) матриц последовательностей $\{\Lambda\}$ и, соответственно, $\{G\}$. Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема I3</u>. Пусть $\mathbb{C}$ – <u>неособенная</u> квазитрехдиагональная матрица вида (I.I)+(I.2) с прямоугольными элементами-блоками $\{\tilde{\xi}_\kappa, \tilde{P}_\kappa\}^m_{\kappa=2}$, минимальные размерности которых совпадают с размерностями соответствующих <u>неособенных</u> матриц $\{q_\kappa\}^m_{\kappa=1}$. Пусть также $\{G_\kappa\}$ и $\{\Lambda_\kappa\}$ последовательности матриц (2.I) и (2.2). Если $det(\Lambda_\kappa)=0$ (для любого $3\le\kappa\le m$) либо $det(G_\kappa)=0$ (для любого $2\le\kappa\le m-2$) и при этом имеют место условия (2.8), из которых следуют $det(\Lambda_{\kappa+3})=0$ и $det(G_{\kappa-3})=0$, то для $\mathbb{C}$ (I.I) справедливы следующие представления

<u>Представление 2I(2I′)</u>

$$
\begin{bmatrix}
E_1(\hat{\beta}_2) &&&&&&&& \\
& E_2(-\hat{\beta}_3) &&&&&&& \\
&& \ddots &&&&&& \\
&&& E_{\kappa-5}(\beta_{\kappa-4}) &&&&& \\
&&&& E_{\kappa-4}\Theta_{\kappa-3} &&&& \\
&&&&& E_{\kappa-3}\Theta_{\kappa-2} &&& \\
&&&&&& E_{\kappa-2}(-\hat{\beta}_{\kappa-1}) && \\
&&&&&& E_{\kappa-1}\Theta_\kappa && \\
&&&&&&& E_\kappa\Theta_{\kappa+1} & \\
&&&&&&& E_{\kappa+1}(\beta_{\kappa+2}) & \\
&&&&&&&& E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_0 && (\hat{\beta})^{\kappa-4}_{2}\tilde{\xi}_{\kappa-3} &&& \\
& G_1 & \vdots &&& \\
&& \ddots &&& \\
&& G_{\kappa-6} \quad (\hat{\beta})^{\kappa-4}_{\kappa-4}\tilde{\xi}_{\kappa-3} &&& \\
&&& E_{\kappa-4}(\tilde{\xi}_{\kappa-3}) && \\
\tilde{P}_{\kappa-4}(\hat{c})^{\kappa-4}_{2}\cdots & & (\tilde{P}_{\kappa-3})E_{\kappa-3}(\tilde{\xi}_{\kappa-2}) &&& \\
&&& (\tilde{P}_{\kappa-2})G_{\kappa-3} \;\; \mathbb{O} \;\; (\hat{\beta})^{\kappa-1}_{\kappa-1}\tilde{\xi}_\kappa && \\
&&& \mathbb{O} \quad E_{\kappa-1}(\tilde{\xi}_\kappa) && \\
&&& \tilde{P}_\kappa(\hat{c})^{\kappa-1}_{\kappa-1}(\tilde{P}_\kappa)\;E_\kappa(\tilde{\xi}_{\kappa+1}) && \\
&&&& (\tilde{P}_{\kappa+1})G_\kappa & \\
&&&&& G_{\kappa+4} \\
&&&&& \ddots \\
&&&&& G_{m-1}
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\times
\begin{bmatrix}
E_1 &&&&&&&& \\
(-\hat{c}_2)E_2 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& (-\hat{c}_{\kappa-4})E_{\kappa-4} &&&&&& \\
&&& \Theta_{\kappa-3}E_{\kappa-3} &&&&& \\
&&&& \Theta_{\kappa-2}E_{\kappa-2} &&&& \\
&&&&& (-\hat{c}_{\kappa-1})E_{\kappa-1} &&& \\
&&&&&& \Theta_\kappa E_\kappa && \\
&&&&&&& \Theta_{\kappa+1}E_{\kappa+1} & \\
&&&&&&& (-\hat{c}_{\kappa+2})E_{\kappa+2} & \\
&&&&&&&& (-\hat{c}_m)E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 &&&&&&& \\
& q_2 &&&&&& \\
&& \ddots &&&&& \\
&&& q_{\kappa-1} &&&& \\
&&&& q_\kappa &&& \\
&&&&& q_{\kappa+1} && \\
&&&&&& \ddots & \\
&&&&&& q_{m-1} & \\
&&&&&&& q_m
\end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \qquad (2.23)
$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 22(22′)

$$\begin{bmatrix} E_1(\hat\beta_2) \\ E_2(\hat\beta_3) \\ \cdots \\ E_{k-5}(-\hat\beta_{k-4}) \\ E_{k-4}\ \mathbb{O}_{k-3} \\ E_{k-3}\ \mathbb{O}_{k-2} \\ E_{k-2}(-\hat\beta_{k-1}) \\ E_{k-1}\ \mathbb{O}_k \\ E_k\ \mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-\hat\beta_{k+2}) \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} G_0 \qquad (\hat\beta)_2^{k-4}\cdot\tilde z_{k-3} \\ (\tilde p_2)\, G_1 \qquad \cdots \\ \cdots \\ (\tilde p_{k-5})\, G_{k-6} \qquad (\hat\beta)_{k-4}^{k-4}\tilde z_{k-3} \\ (\tilde p_{k-4})\, E_{k-4}(\tilde z_{k-3}) \\ (\tilde p_{k-3})\, E_{k-3} \\ (\tilde p_{k-2})\, G_{k-3}\ \mathbb{O}\ (\hat\beta)_{k-1}^{k-1}\tilde z_k \\ (\tilde p_{k-1})\, E_{k-1}(\tilde z_k) \\ (\tilde p_k)\ E_k \\ (\tilde p_{k+1})\, G_k \\ \cdots \\ (\tilde p_m)\, G_{m-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \qquad (2.24)$$

Представление 23(23′)

$$\begin{bmatrix} G_0(\tilde z_2) \\ G_1(\tilde z_3) \\ \cdots \\ G_{k-6}(\tilde z_{k-4}) \\ E_{k-4}(\tilde z_{k-3}) \\ \tilde p_{k-3}\cdot(\hat c)_2^{k-4}\cdots\tilde p_{k-3}\cdot(\hat c)_{k-4}^{k-4}\ (\tilde p_{k-3})\ E_{k-3}(\tilde z_{k-2}) \\ (\tilde p_{k-2})\ G_{k-3}(\tilde z_{k-1}) \\ \mathbb{O}\quad E_{k-1}(\tilde z_k) \\ \tilde p_k\cdot(\hat c)_{k-1}^{k-1}\ (\tilde p_k)\ E_k(\tilde z_{k+1}) \\ (\tilde p_{k+1})\ G_k(\tilde z_{k+2}) \\ \cdots \\ G_{m-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat c_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\hat c_{k-4})E_{k-4} \\ \mathbb{O}_{k-4}E_{k-3} \\ \mathbb{O}_{k-2}E_{k-2} \\ (-\hat c_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (-\hat c_{k+2})E_{k+2} \\ \cdots \\ (-\hat c_m)E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \qquad (2.25)$$

где $\{\hat c,\hat\beta\}$, $(\hat c)_\ell^{k-4}$, $(\hat\beta)_\ell^{k-4}$, $\{G_k\}$ – определены в (2.12). При этом
$\det(G_k)=0,\ G_{k-2}\equiv E_{k-1};\ \det(G_{k-3})=0,\ G_{k-5}\equiv E_{k-4}.$

Представление 24(24′)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (\beta_2)E_2 \\ \cdots \\ (\beta_{k-1})E_{k-1} \\ \mathbb{O}_k E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (\beta_{k+2})E_{k+2} \\ \mathbb{O}_{k+3}E_{k+3} \\ \mathbb{O}_{k+4}E_{k+4} \\ (\beta_{k+5})E_{k+5} \\ \cdots \\ (\beta_m)E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \cdots \\ \Lambda_k(\tilde z_k) \\ (\tilde p_k)\ E_k(\tilde z_{k+1})\ \tilde z_{k+1}\cdot(c)_{k+2}^{k+2} \\ (\tilde p_{k+1})\ E_{k+1}\ \mathbb{O} \\ (\beta)_{k+2}^{k+2}\tilde p_{k+1}\ \mathbb{O}\ \Lambda_{k+3}(\tilde z_{k+3}) \\ (\tilde p_{k+3})\ E_{k+3}(\tilde z_{k+4})\ \tilde z_{k+4}\cdot(c)_{k+5}^{k+5}\cdots\tilde z_{k+4}\cdot(c)_{k+5}^{m} \\ (\tilde p_{k+4})\ E_{k+4} \\ (\beta)_{k+4}^{k+4}\tilde p_{k+4} \qquad \Lambda_{k+6} \\ \cdots \\ (\beta)_{k+4}^{m}\tilde p_{k+4} \qquad \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \times \qquad (2.26)$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1(c_2) \\ E_2(c_3) \\ \cdots \\ E_{k-2}(c_{k-1}) \\ E_{k-1}\mathbb{O}_k \\ E_k\mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(c_{k+2}) \\ E_{k+2}\mathbb{O}_{k+3} \\ E_{k+3}\mathbb{O}_{k+4} \\ E_{k+4}(c_{k+5}) \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} \quad \mathbb{C}(\Lambda).$$

либо эквивалентные ему два представления

Представление 25(25′)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2)E_2 \\ \cdots \\ (-\beta_{k-1})E_k \\ \mathbb{O}_k E_k \\ \mathbb{O}_{k+1}E_{k+1} \\ (-\beta_{k+2})E_{k+2} \\ \mathbb{O}_{k+3}E_{k+3} \\ \mathbb{O}_{k+4}E_{k+4} \\ (-\beta_{k+5})E_{k+5} \\ \cdots \\ (-\beta_m)E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Lambda_2(\tilde z_2) \\ \Lambda_3(\tilde z_3) \\ \cdots \\ \Lambda_k(\tilde z_k) \\ (\tilde p_k)\ E_k(\tilde z_{k+1}) \\ (\tilde p_{k+1})\ E_{k+1}(\tilde z_{k+2}) \\ (\beta)_{k+2}^{k+2}\cdot\tilde p_{k+1}\ \mathbb{O}\ \Lambda_{k+3}(\tilde z_{k+3}) \\ (\tilde p_{k+3})\ E_{k+3}(\tilde z_{k+4}) \\ (\tilde p_{k+4})\ E_{k+4}(\tilde z_{k+5}) \\ (\beta)_{k+4}^{k+4}\cdot\tilde p_{k+4} \qquad \Lambda_{k+6}(\tilde z_{k+6}) \\ \cdots \\ (\beta)_{k+5}^{m}\cdot\tilde p_{k+4} \qquad \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (2.27)$$

Представление 26(26′)

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ (\tilde p_2)\Lambda_3 \\ \cdots \\ (\tilde p_{k-2})\Lambda_{k-1} \\ (\tilde p_{k-1})\Lambda_k(\tilde z_k) \\ (\tilde p_k)\ E_k(\tilde z_{k+1})\ \tilde z_{k+1}\cdot(c)_{k+2}^{k+2} \\ (\tilde p_{k+1})E_{k+1}\ \mathbb{O} \\ (\tilde p_{k+2})\ \Lambda_{k+3}(\tilde z_{k+3}) \\ (\tilde p_{k+3})\ E_k(\tilde z_{k+4})\ \tilde z_{k+4}\cdot(c)_{k+5}^{k+5}\cdots\tilde z_{k+4}\cdot(c)_{k+5}^{m} \\ (\tilde p_{k+4})\ E_{k+4} \\ (\tilde p_{k+5})\ \Lambda_{k+6} \\ \cdots \\ (\tilde p_m)\ \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1(-c_2) \\ E_2(-c_3) \\ \cdots \\ E_{k-2}(-c_{k-1}) \\ E_{k-1}\mathbb{O}_k \\ E_k\mathbb{O}_{k+1} \\ E_{k+1}(-c_{k+2}) \\ E_{k+2}\mathbb{O}_{k+3} \\ E_{k+3}\mathbb{O}_{k+4} \\ E_{k+4}(-c_{k+5}) \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_k \\ \cdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda) \qquad (2.28)$$

где $\{c,\beta\}$, $(c)_{k+4}^{\ell}$, $(\beta)_{k+4}^{\ell}$, $\{\Lambda_k\}$ – определены в (2.15). При этом
$\det(\Lambda_k)=0,\ \Lambda_{k+2}\equiv E_{k+1};\ \det(\Lambda_{k+3})=0,\ \Lambda_{k+5}\equiv E_{k+4}.$

Доказательство. Сначала отметим, что мы не приводим здесь всю технику доказательства теоремы, а ограничиваемся лишь основными моментами получения представлений вида (2.25)÷(2.28). Итак, аналогично тому, как поступили выше при доказательстве теоремы 11 (в случае, когда только $\det(\Lambda_k)=0$ либо только $\det(G_k)=0$), и при выполнении условий (2.8), из которых следуют $\det(\Lambda_{k+3})=0$ и $\det(G_{k-3})=0$, воспользуемся сначала представлениями 5(5′) и 7(7′) для матрицы $\mathbb{C}$ (1.1) при получении представлений 22(22′), 23(23′), а также представлений 25(25′) и 26(26′). Далее, сложив представления 22(22′) и 23(23′), а также представление 25(25′) с 26(26′) и фактически повторив всю технику доказательства теоремы 12, получаем два неприводимых представления 21(21′) и соответственно 24(24′). Справедливость этих представлений устанавливается путем перемножения соответствующих блочных матриц. Теорема доказана.

Замечание 5. Рассмотренные представления для $\mathbb{C}$ (1.1), когда вырождаются одновременно несколько матриц в последовательностях $\{G_k\}$ и

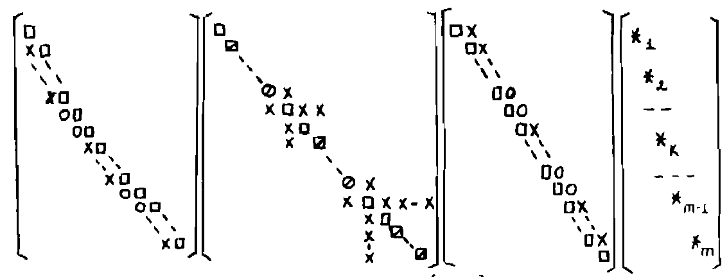
$\{\Lambda_k\}$ (т.е. обращаются в нуль одновременно (последовательно) несколько главных угловых квазиминоров одного типа) мы начали со случаев $(\det(G_k)=0, \det(G_{k-3})=0)$ и соответственно $(\det(\Lambda_k)=0, \det(\Lambda_{k+3})=0)$. Это обусловлено следующим обстоятельством. В соответствии с Леммой 7 (при вырождении матрицы G_k) ближайшей вырожденной в процессе $\{G_k\}$ (2.I) может быть лишь матрица G_{k-3} в силу предположения $\det(\mathbb{C})\neq 0$. Аналогично, если вырождена Λ_k, то в процессе $\{\Lambda_k\}$ (2.2) ближайшей вырожденной может быть лишь матрица Λ_{k+3}. При этом (как видно, например, из представления 24(24′)) средняя факторизующая матрица в (2.26) имеет следующую структуру. У нее полностью отличными от $\mathbb{O}$-матриц оказываются: правая (К+3)-квазиполустрока и нижний (К+3)-квазиполустолбец, начинающиеся единичной матрицей E_{k+3}, а также вся ее квазидиагональ $\{\Lambda_2\equiv E_1, \Lambda_3, \dots, \Lambda_k, E_k, \Lambda_{k+2}\equiv E_{k+1}, \Lambda_{k+3}, E_{k+3}, \Lambda_{k+5}\equiv E_{k+4}, \Lambda_{k+6}, \dots, \Lambda_{m+1}\}$. Отличными от $\mathbb{O}$-матриц являются также по одной матрице, стоящие справа (ниже) от (К+2)-диагонального блока – Λ_{k+3}, т.е. матрицы $\tilde{\zeta}_{k+3}$ и $\tilde{P}_{k+3}$ и от (К-I)-диагонального блока – Λ_k, т.е. матрицы $\tilde{\zeta}_k$ и $\tilde{P}_k$. Кроме того, по две матрицы, стоящие справа (ниже) от (К)-диагонального блока – E_k, т.е. матрицы $(\tilde{\zeta}_{k+1}, \tilde{\zeta}_{k+1}\cdot(c)^{k+2}_{k+2})$ и $(\tilde{P}_{k+1}, (\beta)^{k+2}_{k+2}\cdot\tilde{P}_{k+1})$. Остальные же элементы-блоки этой матрицы нулевые. Наглядность структуры левого (правого) квазидиагональных сомножителей в $\mathbb{C}(\Lambda)$ (2.26) очевидна. Аналогичным образом наглядно описывается структура сомножителей и в других представлениях для $\mathbb{C}(\Lambda)$ и соответственно $\mathbb{C}(G)$.

Можно доказать теоремы и о представлениях $\mathbb{C}(\Lambda)$ и $\mathbb{C}(G)$, когда вырождаются одновременно с Λ_k любые матрицы Λ_ℓ, где $k+3<\ell<m+1$ (и аналогично с G_k любые матрицы G_ℓ, где $0<\ell<k-3$). В том числе, если у матрицы $\mathbb{C}$ (1.1) в последовательностях $\{G_k\}$ и $\{\Lambda_k\}$ имеют место периодические вырождения (с периодом 3, который обусловлен Леммой 7 и $\det(\mathbb{C})\neq 0$), т.е.

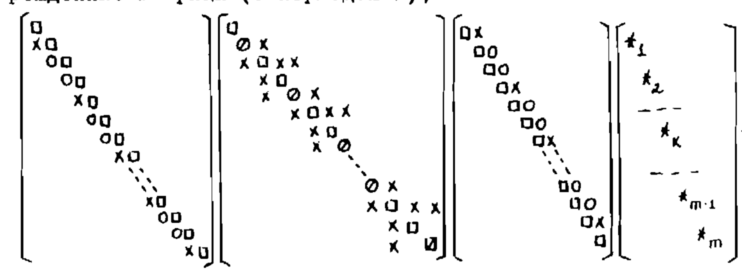
$$\{\Lambda_2=E_1, \det(\Lambda_3)=0, \Lambda_4=?, \Lambda_5=E_4, \dots, \det(\Lambda_k)=0, \Lambda_{k+1}=?, \Lambda_{k+2}=E_{k+1}, \dots, \det(\Lambda_{m+1})\neq 0\},$$
$$\{G_m=E_m, \det(G_{m-1})=0, G_{m-2}=?, G_{m-3}=E_{m-2}, \dots, \det(G_k)=0, G_{k-1}=?, G_{k-2}=E_{k-1}, \dots, \det(G_0)\neq 0\}.$$

Однако формулировки этих теорем носит громоздкий характер, что приводит к потере наглядности представлений матрицы $\mathbb{C}$ (1.1). С учетом этого мы приводим ниже лишь схематический вид представлений для $\mathbb{C}$ (1.1) в отмеченных выше случаях. Итак, имеем для $\mathbb{C}$ (1.1) представления

1. Если $\det(\Lambda_k)=0$ и $\det(\Lambda_\ell)=0$ для любого $k+3<\ell<m+1$, то

 $= \mathbb{C}(\Lambda)$ (2.29)

2. Если же в последовательности $\{\Lambda_k\}$ имеют место периодически вырожденные матрицы (с периодом 3), то

 $= \mathbb{C}(\Lambda)$ (2.30)

где ввели символические обозначения для матриц:

О – тождественно нулевые; □ – единичные; ∅ – квадратные особенные (⊠ – неособенные); Х – прямоугольные (в общем случае разных размерностей), а $\{*_k\}_{k=1}^{m} \equiv \{G_k\}_{k=1}^{m}$.

Отметим также, что представления $\mathbb{C}(G)$ для $\mathbb{C}$ (1.1), если $\det(G_k)=0$ и $\det(G_\ell)=0$ для любого $0<\ell<k-3$ (либо если в последовательности $\{G_k\}$ имеют место периодически вырожденные матрицы (с периодом 3)), получаются с учетом $\mathbb{C}$ (2.23) путем, "как бы вращения" соответствующих элементов-блоков матриц в (2.29), (2.30) на 180^0 относительно их квазидиагоналей. С учетом вида представлений (2.29), (2.30) можно показать соответствующие представления для $\mathbb{C}(\Lambda)$ вида (2.27) и (2.28) и аналогично для $\mathbb{C}(G)$ вида (2.24), (2.25).

Как видно в представлении $\mathbb{C}$ (1.1) вида $\mathbb{C}(\Lambda)$ 24(24′), не все матрицы имеют вид Хессенберга[x)], что затрудняет практическое использование его в приложениях. Однако в трансформациях этого представления вида 25(25′) и 26(26′) уже все матричные сомножители имеют вид матриц типа[xx)] Хессенберга. То же самое можно сказать и о представлениях

x) Верхнетреугольные (нижнетреугольные) матрицы, дополненные соответственно под (над) квази (диагональю), принято называть матрицами Хессенберга [14].

xx) Верхне (нижне) треугольные и квази(диагональные) матрицы являются, таким образом, частным случаем матриц Хессенберга.

$\mathbb{C}(\Lambda)$ при различных других (отмеченных выше) комбинациях вырождений матриц в последовательности $\{\Lambda_k\}$, а также и о различных представлениях $\mathbb{C}(G)$.

Ниже мы выполним дальнейшие трансформации полученных выше Хессенбергово подобных представлений $\mathbb{C}(\Lambda)$ и $\mathbb{C}(G)$ при различных вырождениях матриц в последовательностях $\{\Lambda_k\}$ и $\{G_k\}$ и получим представления, которые легко реализуются в приложениях.

Теорема I4. Пусть $\mathbb{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (I.I)+(I.2) с прямоугольными элементами-блоками $\{\tilde{z}_k, \tilde{P}_k\}_{k=2}^{m}$, минимальные размерности которых совпадают с размерностями соответствующих невырожденных матриц $\{q_k\}_{k=1}^{m}$. Пусть также один из верхних (нижних) главных угловых квазиминоров матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) обращается в нуль ($\equiv det(\Lambda_i)=0$ или $det(G_i)=0$). Тогда для $\mathbb{C}$ справедливы следующие единственные факторизованные представления

Представление 27(27') (при $det(G_i)=0$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat\beta_2) \\
\cdots \\
E_{i-2}(-\hat\beta_{i-1}) \\
E_{i-1}\,\Theta_i \\
E_i\,\Theta_{i+1} \\
E_{i+1}(-\hat\beta_{i+2}) \\
E_{m-1}(-\hat\beta_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_0 & & & & & & & \\
& G_1 & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & G_{i-3} & & & & \\
& & & & G_{i-2} & & & \\
& & & & & E_i & & \\
& & & & & & E_{i+1} & \\
& & & & & & & G_{i+1} \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & E_{i-2} & & & & \\
& & & E_{i-1} & & & \\
A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & E_i & & \\
& & & & & E_{i+1} & \\
& & & & & & E_{i+2} \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & E_{i-2} & & & \\
& & & E_{i-1} & & \\
& & & & \begin{bmatrix}(E_i-\hat\Theta_i) & \tilde{z}_{i+1} \\ \tilde{P}_{i+1} & G_i\end{bmatrix} & \\
& & & & & E_{i+2} \\
& & & & & & \ddots \\
& & & & & & & E_m
\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times\begin{bmatrix}
E_1 & & & & B_1 & & & \\
& E_2 & & & B_2 & & & \\
& & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & E_{i-2} & B_{i-2} & & & \\
& & & E_{i-1} & B_{i-1} & & & \\
& & & & E_i & & & \\
& & & & & E_{i+1} & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & \\
(-\hat{c}_2)E_2 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & (-\hat{c}_{i-1})E_{i-1} & & & & & \\
& & & \Theta_i E_i & & & & \\
& & & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & & \\
& & & & & (-\hat{c}_{i+2})E_{i+2} & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & (-\hat{c}_m)E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 & & & & & \\
& q_2 & & & & \\
& & \ddots & & & \\
& & & q_i & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & q_{m-1} \\
& & & & & & q_m
\end{bmatrix} = \mathbb{C}(G) \qquad (2.31)
$$

, где

$$
\begin{cases}
A_k = \hat{P}_i \cdot \prod_{s=k+1}^{i-1} \hat{c}_s, \quad B_k = G_{k-1}^{-1} \prod_{s=k+1}^{i-1} \hat\beta_s \cdot \hat{z}_i, \quad \text{для всех } k=1,2,\ldots,i-1; \\
\hat\Theta_i = \hat{P}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{i-1} \prod_{s=k+1}^{i-1} \hat{c}_s\, G_{k-1}^{-1} \prod_{s=k+1}^{i-1} \hat\beta_s \right) \cdot \hat{z}_i = \sum_{k=1}^{i-1} (A_k \cdot B_k),
\end{cases} \qquad (2.32)
$$

а также $(\hat{c}, \hat\beta)$ и $\{G_k\}$ определены в виде (1.6) с учетом (2.1).

Представление 28(28') (при $det(\Lambda_i)=0$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & \\
(-\beta_2)E_2 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & (-\beta_{i-1})E_{i-1} & & & & \\
& & & \Theta_i E_i & & & \\
& & & & \Theta_{i+1}E_{i+1} & & \\
& & & & & (-\beta_{i+2})E_{i+2} & \\
& & & & & & \ddots \\
& & & & & & & (-\beta_m)E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & \\
& E_2 & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & E_{i-1} & & & & \\
& & & & E_i & \tilde{B}_{i+1} & \tilde{B}_{i+2} \cdots & \tilde{B}_m \\
& & & & & E_{i+1} & & \\
& & & & & & E_{i+2} & \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & E_{i-2} & & & \\
& & & \begin{bmatrix}\Lambda_i & \tilde{z}_i \\ \tilde{P}_i & (E_i-\Theta_i)\end{bmatrix} & & \\
& & & & E_{i+1} & \\
& & & & & \ddots \\
& & & & & & E_m
\end{bmatrix}\times \qquad (2.33)
$$

$$
\times\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & \\
& E_2 & & & & & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & E_{i-1} & & & \\
& & & & E_i & & \\
& & & & \tilde{A}_{i+1} & E_{i+1} & \\
& & & & \tilde{A}_{i+2} & & E_{i+2} \\
& & & & \vdots & & & \ddots \\
& & & & \tilde{A}_m & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 & & & & & & & \\
& \Lambda_3 & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & \Lambda_{i-1} & & & & \\
& & & & E_{i-1} & & & \\
& & & & & E_i & & \\
& & & & & & \Lambda_{i+2} & \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & \Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
E_2(-c_3) \\
\cdots \\
E_{i-2}(-c_{i-1}) \\
E_{i-1}\,\Theta_i \\
E_i\,\Theta_{i+1} \\
E_{i+1}(-c_{i+2}) \\
\cdots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 & & & & & \\
& q_2 & & & & \\
& & \ddots & & & \\
& & & q_i & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & q_{m-1} \\
& & & & & & q_m
\end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda)
$$

, где

$$
\begin{cases}
\tilde{A}_k = \prod_{s=i+2}^{k} \beta_s \cdot \tilde{P}_{i+1}, \quad \tilde{B}_k = \tilde{z}_{i+1} \cdot \prod_{s=i+2}^{k} c_s \cdot \Lambda_{k+1}^{-1}, \quad \text{для всех } k=i+1,i+2,\ldots,m; \\
\Theta_i = \tilde{z}_{i+1} \cdot \left(\sum_{k=i+1}^{m} \prod_{s=i+2}^{k} c_s \cdot \Lambda_{k+1}^{-1} \cdot \prod_{s=i+2}^{k} \beta_s \right) \cdot \tilde{P}_{i+1} = \sum_{k=i+1}^{m} (\tilde{B}_k \cdot \tilde{A}_k),
\end{cases} \qquad (2.34)
$$

а также $\{c, \beta\}$ и $\{\Lambda_k\}$ определены в виде (1.4) с учетом (2.2).

Доказательство. Представление 27(27') получаем из представления 19(19') и представление 28(28') из 20(20'), а справедливость их устанавливается путем перемножения блочных матриц, входящих в 27(27') и 28(28'). Далее отметим, что если $det(\mathbb{C}) \neq 0$ и $det(\Lambda_i)=0$ (либо $det(G_i)=0$), то $det(\hat{Q}) \neq 0$ (либо $det(Q) \neq 0$), т.е. матрицы

$$
\hat{Q} = \begin{bmatrix} (E_i-\hat\Theta_i) & \tilde{z}_{i+1} \\ \tilde{P}_{i+1} & G_i \end{bmatrix} \quad \text{либо} \quad Q = \begin{bmatrix} \Lambda_i & \tilde{z}_i \\ \tilde{P}_i & (E_i-\Theta_i) \end{bmatrix} \qquad (2.35)
$$

не вырождены.

Кроме того, для матриц $\hat{Q}$ и Q будут иметь место следующие единственные разложения

$$
\hat{Q} = \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ (\tilde{P}_{i+1}\hat{E}_i^{-1}) & E_{i+1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{E}_i & 0 \\ 0 & (G_i - \tilde{P}_{i+1}\hat{E}_i^{-1}\tilde{z}_{i+1}) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_i & (\hat{E}_i^{-1}\tilde{z}_{i+1}) \\ 0 & E_{i+1} \end{bmatrix},
\quad
Q = \begin{bmatrix} E_{i-1} & (\tilde{z}_i E_i^{-1}) \\ 0 & E_i \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} (\Lambda_i - \tilde{z}_i E_i^{-1}\tilde{P}_i) & 0 \\ 0 & E_i \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_{i-1} & 0 \\ (E_i^{-1}\tilde{P}_i) & E_i \end{bmatrix}, \qquad (2.36)
$$

где $\hat{E}_i = (E_i-\hat\Theta_i)$, $E = (E_i-\Theta_i)$, если $det(\hat{E}_i) \neq 0 \neq det(E)$. (2.36)'

Отсюда, учитывая $det(\mathbb{C}) \neq 0$, т.е. предположение неособенности матрицы $\mathbb{C}$ (1.1), а также $det(\hat{Q}) \neq 0$ либо $det(Q) \neq 0$, получаем

$$
det(G_i - \tilde{P}_{i+1}\hat{E}_i^{-1}\tilde{z}_{i+1}) \neq 0 \neq det(\Lambda_i - \tilde{z}_i E_i^{-1}\tilde{P}_i), \quad \text{при } det(\Lambda_i)=0 \ (\text{или } det(G_i)=0). \qquad (2.36)''
$$

Теорема доказана.

Из теоремы 14 (в качестве ее следствия) имеем следующий результат, суть которого можно было бы определить как условное вырождение первого рода любой матрицы $\mathbb{C}$ вида (I.I). Позднее нами будут получены условия второго рода для вырожденности $\mathbb{C}$ (I.I) с использованием информации о квазиминорах обоих типов.

Теорема 15. Пусть $\mathbb{C}$ -квазитрехдиагональная матрица вида $\mathbb{C}$ (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_k, P_k\}_{k=2}^{m}$ и невырожденными квазидиагональными элементами-блоками $\{q_k\}_{k=1}^{m}$, размерности которых в общем случае различные. Пусть также у $\mathbb{C}$ (I.I) все (кроме, быть может, одного в каждом из типов) главные верхние (нижние) угловые квазиминоры отличны от нуля (т.е. пусть только $det(\mathcal{G}_i)=0$ или $det(\Lambda_i)=0$).
Тогда

$$\begin{cases} det(\mathcal{G}_0)=0 \quad \text{и(или)} \; det(\hat{Q})=0, \\ \text{либо} \\ det(\Lambda_{m+1})=0 \quad \text{и(или)} \; det(Q)=0 \end{cases} \qquad (2.36)^{*}$$

являются необходимыми и достаточными условиями вырожденности матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). При этом, если $det(\mathcal{G}_0)\neq 0$, а $det(\hat{Q})=0$, либо $det(\Lambda_{m+1})\neq 0$ а $det(Q)=0$, то в представлениях 27(27′) и 28(28′) все элементы факторизующих матриц у $\mathbb{C}(\mathcal{G})$ или $\mathbb{C}(\Lambda)$ полностью определены. Если же $det(\mathcal{G}_0)=0$, а $det(\hat{Q})\neq 0$ либо $det(\Lambda_{m+1})=0$, а $det(Q)\neq 0$, то формально не определены в представлении 27(27′) лишь $\mathcal{B}_1$ а в представлении 28(28′) лишь $\tilde{\mathcal{B}}_m$ блоки, в то время как в представлениях 5(5′) и 7(7′) все элементы-блоки определены. Если же $det(\mathcal{G}_0)\neq 0$, но $det(\mathcal{G}_i)=0$ либо $det(\Lambda_{m+1})\neq 0$, но $det(\Lambda_i)=0$, то формально в представлениях 5(5′) и 7(7′) не определены по 5 (пять) элементов-блоков, т.е. $\{\mathcal{G}_{i-1}; \hat{\beta}_i, \hat{\beta}_{i+1}; \hat{c}_i, \hat{c}_{i+1}\}$ и $\{\Lambda_{i+1}, \beta_i, \beta_{i+1}; c_i, c_{i+1}\}$ соответственно.

Доказательство этой теоремы, как уже отмечали выше, непосредственно следует из представлений теоремы 14, поэтому мы на нем не останавливаемся. Отметим лишь следующее с учетом этой теоремы, а также представлений 5(5′) и 7(7′). Если все главные угловые квазиминоры матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), за исключением, быть может, порядка m, отличны от нуля (т.е. $\{det(\mathcal{G}_i)\neq 0\}_{i=1}^{m-1}$ и $\{det(\Lambda_i)\neq 0\}_{i=2}^{m}$), то равенства $det(\mathcal{G}_0)=0$ и(или) $det(\Lambda_{m+1})=0$ являются достаточными условиями вырожденности матрицы $\mathbb{C}$(I.I).

Заключение

Получено множество различных типов факторизованных представлений квазитрехдиагональных матриц в случае обращающихся в нуль главных угловых квазиминоров. При этом доказаны Теоремы 11÷14 о множестве различных представлений $\mathbb{C}$ (I.I) на основе лишь одного из двух типов квазиминоров, некоторые из которых обращаются в нуль, а также Теорема 15 об условном вырождении квазитрехдиагональных матриц.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за поддержку настоящего цикла работ.

Литература

1. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, P11-73-6933, Дубна, 1973.
2. Емельяненко Г.А. и др. ОИЯИ, P10-76-9950, Дубна, 1976.
3. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, P11-85-489, Дубна, 1985.
4. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, P11-86-531, Дубна, 1986.
5. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ P11-86-504, Дубна, 1986.
6. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ P11-87-524, Дубна, 1987.
7. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ P11-87-533, Дубна, 1987.
8. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ P11-87-623, Дубна, 1987.
9. Одинцов В.Г. Автореферат диссертации, 10-88-223, Дубна, 1988.
10. "Вычислительные процессы и системы". Вып. 5 (под редакцией Г.И.Марчука). Москва. "Наука", 1987.
11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики, "Наука", Новосибирск, 1973.
12. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., "Наука", 1978.
13. Джордж А., Лю Дж. Численные решения больших разреженных систем уравнений (пер. с англ. Х.Д.Икрамова), М., "Мир", 1984.
14. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Изд-во ФМЛ, 1963.
15. Икрамов Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем. (Прямые методы). М., "Наука", 1988.
16. Воеводин В.В., Вычислительные основы линейной алгебры. М., "Наука". 1977.
17. Rizvi S.A.H. Inverses of quasitridiagonal matrices. Linear algebra and Appl., 56, p. 177-184, 1984.
18. Varah J.M. On the solution of block-tridiagonal systems arising from certain finite difference equations.- Math. Comput., 1972, 26, N120, 859-868.
19. Rehnqvist L. Inversion of certain symmetric band matrices.- BIT. 1972, 12, N1, 90-98.
20. Emelyanenko G.A. JINR, E11-88-71, Dubna, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1988 года.