

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

A 62

P11-88-506

И.В.Амирханов, О.М.Жураев*, В.Калис,
В.Н.Первушин, И.В.Пузынин, Н.А.Сариков*,
Т.А.Стриж

КВАРКОНИЙ В КХД
С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Резонансный потенциал

*Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1988

Для феноменологического описания спектроскопии легких и тяжелых кварконов наиболее широко используется нерелятивистская потенциальная модель с растущим потенциалом^{1,2/}.

Релятивистски-ковариантная и калибровочно-инвариантная схема включения этой модели в КХД (квантовую хромодинамику) была предложена в работах^{3,4/}.

Согласно этой схеме обобщением уравнения Шредингера, позволяющим описывать релятивистские пионы как голдстоуновские частицы в произвольной лоренцевой системе координат, является система уравнений Бете-Солпитера и Швингера-Дайсона для потенциала, движущегося вместе с кварками, связанное состояние которых он образует.

Наиболее полное описание этой системы уравнений для искомого мезона было дано в работах^{5-7/}. Однако в этих работах обсуждаются безмассовые кварки.

В настоящей работе мы рассматриваем указанную выше систему уравнений для массивных кварков и предлагаем метод ее решения, свободный от недостатков метода, используемого в^{6,7/}.

Несколько слов об исследуемых уравнениях и используемых обозначениях. В работе изучается следующая система релятивистски-ковариантных уравнений Швингера-Дайсона и Бете-Солпитера с растущим потенциалом^{3,4/}:

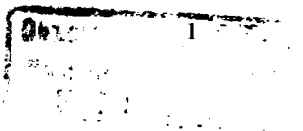
$$\sum_{i(2)} (p_i) = m_{i(2)}^0 + \int (dq) \underline{V}(p_1 - q_1) \chi_H^* \frac{1}{\not{p} - \sum_{i(2)} (q_i)} \chi_{H^*}, \quad (1)$$

$$G_{\Sigma_1}^{-1}(k + \not{p}) \chi_{\rho}(k) G_{\Sigma_2}^{-1}(k - \not{p}) = \int (dq) \underline{V}(k_1 - q_1) \chi_H^{(1) *} \chi_{\rho}(q) \chi_{H^*}^{(2)}. \quad (2)$$

Здесь $q^{\mu} = q_H^{\mu} + q_L^{\mu}$, $q_H^{\mu} = \not{p}^{\mu} \frac{\not{p}}{p^2}$, $(dq) = i \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$.

$$G_{\Sigma_{i(2)}}(p) = \frac{1}{\not{p} - \sum_{i(2)} (p_i)}$$

m^0 - затравочная масса фермиона (кварка),
 \not{p}^{μ} - 4-импульс связанного состояния фермион-антифермион (кваркonia), который в системе покоя частицы равен $(M, 0, 0, 0)$,



$\chi_p^{(k)}$ - полная функция Бете-Солпитера, $\sum_{\alpha\beta}(\rho)$ - решение уравнения Швингера-Дайсона (массовый оператор фермиона или антифермиона), ζ_1 и ζ_2 - факторы перехода к с.ц.м., $\zeta_1 + \zeta_2 = 1$.

Как было показано в работах^{4,3/}, для описания кварковых связанных состояний из класса растущих потенциалов, по-видимому, надо дать предпочтение осцилляторному потенциалу

$$V(\vec{p}) = \left(\frac{4}{3} V_0\right) \Delta_p \delta^3(\vec{p}) \quad (3)$$

(где $\Delta_p = \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^2$, $\left(\frac{4}{3} V_0\right)^{1/2} \sim 300$ МэВ), который и будет рассматриваться в этой работе для конкретных вычислений. При этом используется энергетический масштаб

$$\left(\frac{4}{3} V_0\right)^{1/2} \quad (4)$$

и следующие представления γ -матриц:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{kl} = \frac{i}{2} (\gamma_k \gamma_l - \gamma_l \gamma_k) = -i \epsilon_{klj} \gamma_5 \gamma_j \quad (k \neq l),$$

а также обозначения

$$\not{q} = \not{q}_0 \gamma_0 - \not{q}_i \gamma_i, \quad \hat{q}_i = \frac{q_i}{|\vec{q}|} = \frac{q_i}{q} \quad (i = 1, 2, 3).$$

1. Уравнение Швингера-Дайсона

Рассмотрим уравнение Швингера-Дайсона (I) для произвольного потенциала в системе покоя кваркония, где $\mathcal{P}_\mu = (M, 0, 0, 0)$ и $q_i^\mu = (0, \vec{q})$. Представим массовый оператор в виде

$$\sum_i(\vec{q}) = E(q) \sin \varphi(q) + [E(q) \cos \varphi(q) - q] \hat{q}_i \gamma_i. \quad (5)$$

Тогда функцию Грина кварка можно записать как

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\vec{q}) &= \begin{bmatrix} \Lambda_{\pm}(\vec{q}) & \bar{\Lambda}_{\pm}(\vec{q}) \\ q_0 + E(q) + i\epsilon & q_0 + E(q) - i\epsilon \end{bmatrix} \gamma_0 = \\ &= \gamma_0 \begin{bmatrix} \Lambda_{\pm}(\vec{q}) & \bar{\Lambda}_{\pm}(\vec{q}) \\ q_0 + E(q) + i\epsilon & q_0 + E(q) - i\epsilon \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

где проекционные операторы Λ_{\pm} и $\bar{\Lambda}_{\pm}$ определены следующим образом:

$$\Lambda_{\pm}(q) = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm [\sin \varphi(q) - \hat{q}_i \gamma_i \cos \varphi(q)] \gamma_0 \right\} = S(q) \Lambda_{\pm}^0 S^{-1}(q), \quad (7)$$

$$S(q) \equiv \exp \left[\hat{q}_i \gamma_i \frac{\tilde{\varphi}(q)}{2} \right], \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\pi}{2},$$

$$\Lambda_{\pm} \gamma_0 = \gamma_0 \bar{\Lambda}_{\pm}, \quad \bar{\Lambda}_{\pm} = S^{-1} \Lambda_{\pm}^0 S,$$

$\Lambda_{\pm}^0 \equiv \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_0)$ - проекционные операторы для покоящегося кварка (в общем случае с $m^0 \neq 0$). Подстановка (5)-(7) в (I) приводит к системе уравнений на функции $\Psi(p)$ и $E(p)$:

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = m^0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \underline{V}(|\vec{p} - \vec{q}|) \sin \varphi(q), \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \underline{V}(|\vec{p} - \vec{q}|) \cos \varphi(q) (\hat{p}_i \hat{q}_i). \end{cases} \quad (8)$$

В частности, для осцилляторного потенциала (3) уравнения (8) (в масштабе (4)) принимают вид дифференциальных уравнений:

$$E(p) \sin \varphi(p) = m^0 + \frac{1}{2} \Delta_p \sin \varphi(p), \quad (8')$$

$$E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{1}{2} \Delta_p [\cos \varphi(p) \hat{p}_i \hat{q}_i].$$

Умножая уравнения (8') на $\cos \varphi(p)$ и $\sin \varphi(p)$, складывая и вычитая их, получим систему уравнений

$$E(p) = m^0 \sin \varphi(p) + p \cos \varphi(p) - \frac{1}{2} (\varphi'(p))^2 - \frac{1}{p^2} \cos^2 \varphi(p), \quad (9)$$

$$(p^2 \varphi')' = 2p^2 \sin \varphi(p) - 2p^2 m^0 \cos \varphi(p) - \sin 2\varphi(p),$$

частный вид которой был рассмотрен в работе^{13/} для безмассового кварка ($m^0 = 0$).

2. Уравнение Бете-Солпитера

Изложим схему решения уравнения Бете-Солпитера (2) для произвольного растущего потенциала $\underline{V}(|\vec{k} - \vec{q}|)$. Рассмотрим решение в системе покоя, $\mathcal{P}_\mu = (M, 0, 0, 0)$. Это уравнение для волновой функции

$$\Psi(\vec{k}) = \int \frac{d^4 k_1}{2\pi} \chi(k_1, \vec{k}) \quad (10)$$

превращается в уравнение Солпитера^{13/}

$$\Psi(\vec{k}) = - \frac{\Lambda_+^{(1)}(k) (\hat{I} \Psi(q)) \bar{\Lambda}_+^{(1)}(k)}{M - (E_1 + E_2) + i\epsilon} + \frac{\Lambda_-^{(1)}(k) (\hat{I} \Psi(q)) \bar{\Lambda}_-^{(1)}(k)}{M + (E_1 + E_2) - i\epsilon} \quad (II)$$

Здесь

$$\hat{I} \Psi(\vec{q}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{q}|) \Psi(\vec{q}). \quad (I2)$$

Удобно решить уравнение (II), разбивая его на систему уравнений. Для этого к волновой функции (IO) применим процедуру "раздевания"

$$\Psi(q) = S_1(q) \Psi^{\circ}(q) S_2(q), \quad (I3)$$

где операторы S_n (для кварков $n = 1, 2$) определены в (7). "Раздетая" функция Ψ° позволяет просто выделить физические степени свободы по соотношению

$$\Lambda_{\pm}^{\circ} \Psi^{\circ} = \Psi^{\circ} \Lambda_{\pm}^{\circ}, \quad \Lambda_{\pm}^{\circ} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_0), \quad (I4)$$

которое вытекает из (II) с учетом $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$, $\Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0$, $\Lambda_{\pm} \Lambda_{\pm} = 1$. Разбивая функцию Ψ° на слагаемые $\Psi_{\pm}^{\circ} \equiv \Psi^{\circ} \Lambda_{\pm}^{\circ}$ и используя (7), (I3) и (I4) из (II), получим систему уравнений на Ψ_{\pm}° :

$$[M_{\pm} - (E_1 + E_2)] \Psi_{\pm}^{\circ}(k) = \mp \Lambda_{\pm}^{\circ} \hat{I} \left\{ S_1^{\circ}(k) S_2(q) [\Psi_1^{\circ}(q) - \Psi_2^{\circ}(q)] S_2^{\circ}(q) S_1^{\circ}(k) \right\} \Lambda_{\pm}^{\circ}. \quad (I5)$$

Дальнейшее расщепление этих уравнений связано с разложением Ψ_{\pm}° через γ -матрицы на функции $L(k)$ и $N(k)$:

$$\Psi_{\pm}^{\circ}(k) = \Lambda_{\pm}^{\circ} (\gamma_5 L_{\pm}^{\circ} + \gamma_4 N_{\pm}^{\circ}), \quad (I6)$$

которое однозначно определяется соотношением (I4) для Λ_{\pm}° и Ψ° . Представим $S_n^{\circ} S_n$ (для частиц $n = 1, 2$) в соответствии с (7) в виде

$$S_n^{\circ}(k) S_n(q) = a_n(k, q) + b_n^i(k, q) \gamma^i + e_n^i(k, q) (i \gamma^i \gamma^0 \gamma^i), \quad (I7)$$

где

$$a_n(k, q) = c_n(k) c_n(q) + \hat{k}_0 \hat{q}_0 s_n(k) s_n(q), \quad (I8)$$

$$b_n^i(k, q) = \hat{q}^i s_n(q) c_n(k) - \hat{k}^i s_n(k) c_n(q),$$

$$e_n^i(k, q) = \epsilon^{ijkl} \hat{k}_j \hat{q}_l s_n(k) s_n(q) \quad (n = 1, 2, \dots, j, k = 1, 2, 3),$$

$$c_n(k) = (v) \frac{\tilde{\varphi}_n(k)}{2}, \quad s_n(k) = \sin \frac{\tilde{\varphi}_n(k)}{2}, \quad \tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \frac{\pi}{2}.$$

складывая и вычитая уравнения (I5), после вычисления следа γ -матриц имеем систему уравнений на функции

$$L_{i12} \equiv L_+^{\circ} + [-J] L_-^{\circ}, \quad (I9)$$

$$N_{i12}^i \equiv N_+^{\circ i} + [-J] N_-^{\circ i}$$

в следующем виде:

$$M L_{21q} = (E_1 + E_2) L_{i12} - \hat{I} \left[(a_1 a_2 + e_1^i e_2^i + [-J] b_1^i b_2^i) L_{i12} \right], \quad (20)$$

$$M N_{21q}^i = (E_1 + E_2) N_{i12}^i - \hat{I} \left\{ (a_1 a_2 - e_1^i e_2^i + [-J] b_1^i b_2^i) N_{i12}^i + \right. \quad (21)$$

$$\left. + [i \epsilon^{ijkl} (e_1^j a_1 + e_2^j a_2) + e_1^i e_2^l + e_1^l e_2^i - b_1^l b_2^i - b_2^l b_1^i] N_{i12}^l \right\}.$$

Система уравнений для скалярных (20) и векторных (21) функций удобна для вычисления спектра связанных состояний и их свойств (в системе покоя частицы) с произвольным потенциалом.

Конкретно рассмотрим связанное состояние кваркония в поле осцилляторного потенциала (3). В этом случае имеет место равенство

$$\hat{I} (a_1 a_2) \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix} = \Delta_x \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix} + (\Delta_1 a_1 + \Delta_2 a_2) \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix} = \Delta_x \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix} - \left[\frac{\tilde{\varphi}_1^2 + \tilde{\varphi}_2^2}{4} + 2 \frac{j_1^2 + j_2^2}{\kappa^2} \right] \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix},$$

$$\hat{I} (e_1^i e_2^i) \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix} = 2 \left(\frac{\partial e_1^i}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial e_2^i}{\partial q_2} \right) \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix} = \frac{4}{\kappa^2} j_1^i j_2^i \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\hat{I} (b_1^i b_2^i) \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix} = 2 \left(\frac{\partial b_1^i}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial b_2^i}{\partial q_2} \right) \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2} \tilde{\varphi}_1^i \tilde{\varphi}_2^i + \frac{4}{\kappa^2} j_1^i j_2^i c_1 c_2 \right] \begin{pmatrix} N^i \\ L \end{pmatrix},$$

$$\hat{I} (e_1^i e_2^l + e_1^l e_2^i) N^i = \frac{4}{\kappa^2} j_1^i j_2^l (\delta_{il} - \hat{k}_i \hat{k}_l) N^i,$$

$$\hat{I} (b_1^i b_2^l + b_1^l b_2^i) N^i = \left(\frac{4}{\kappa^2} j_1^i j_2^l c_1 c_2 (\delta_{il} - \hat{k}_i \hat{k}_l) + \hat{k}_0 \hat{k}_l \tilde{\varphi}_1^i \tilde{\varphi}_2^i \right) N^i,$$

$$\hat{I} i \epsilon_{jkl} (e_1^j a_1 - e_2^j a_2) N^i = 0.$$

Подстановка (22) в (20), (21) приводит к следующим уравнениям для кварков:

$$ML_2 = \left[-\Delta_k + (E_1 + E_2) + \frac{1}{4} \tilde{\varphi}_-^2 + \frac{2}{k^2} \sin^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}_-}{2} \right) \right] L_1, \quad (23)$$

$$ML_1 = \left[-\Delta_k + (E_1 + E_2) + \frac{1}{4} \tilde{\varphi}_+^2 + \frac{2}{k^2} \sin^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}_+}{2} \right) \right] L_2, \quad \tilde{\varphi}_\pm = \tilde{\varphi}_1 \pm \tilde{\varphi}_2$$

$$MN_2^c = \left[-\Delta_k + (E_1 + E_2) + \frac{(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)^2}{4} + \frac{2}{k^2} (j_1^2 + j_2^2) \right] N_1^c + \left(\frac{4}{k^2} j_1 j_2 (j_1 j_2 - c_1 c_2) + \tilde{\varphi}_1' \tilde{\varphi}_2' \right) (\hat{K} N_1^c) \hat{K}^c, \quad (24)$$

$$MN_1^c = \left[-\Delta_k + (E_1 + E_2) + \frac{(\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2)^2}{4} + \frac{2}{k^2} (j_1^2 + j_2^2) \right] N_2^c + \left(\frac{4}{k^2} j_1 j_2 (j_1 j_2 + c_1 c_2) - \tilde{\varphi}_1' \tilde{\varphi}_2' \right) (\hat{K} N_2^c) \hat{K}^c.$$

Для безмассовых кварков ($m_q = m_{q1} = 0$) уравнения (20), (23) принимают вид

$$EL_1 = \frac{1}{\lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{V}(p-q) L_2$$

и совпадают с уравнениями Швингера-Дайсона (8), (8'), где $L_i \sim \sin \varphi_{i1}$. Если существуют нетривиальные решения одночастичного уравнения (8), т.е. происходит спонтанное возникновение массы кварка, то в спектре двухчастичного уравнения обязательно присутствует голдстоуновский бозон с нулевой массой. Таким образом, рассматриваемая система уравнений автоматически удовлетворяет теореме Голдстоуна.

3. Численная схема исследования уравнения для кварков при $m^0 \neq 0$

В работе^{/6/} выполнен численный анализ спектра решений системы (9) для безмассового кварка ($m^0 = 0$) с осцилляторным потенциалом. Для этого случая получено уравнение

$$(p^2 \varphi')' - 2p^2 \sin \varphi - \sin 2\varphi, \quad 0 < p < \infty \quad (25)$$

с асимптотическим поведением искомых решений:

$$\varphi(p) \approx \frac{\pi}{2} + Cp, \quad \varphi(p) \approx \exp \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3} p^3 \right], \quad (26)$$

Исследование показало, что граничная задача (25)-(26) имеет различное количество решений $\varphi = \varphi_n(p)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, отличающихся числом n узлов на полуоси $0 < p < \infty$. Было установлено, что величина $|C|$

($C < 0$ в соотношениях (26)) с ростом n увеличивается экспоненциально, а узлы решений сгущаются в окрестности $p = 0$.

Эти результаты получены в работе^{/6/} с помощью довольно громоздкой вычислительной процедуры, использующей специальное разбиение области изменения p на подобласти и замену в них уравнения (25) на приближенные. Численное интегрирование приближенных уравнений выполнено с учетом дополнительных условий сшивания решений на границах подобластей.

В отличие от работы^{/6/}, мы рассмотрим здесь случай массивных кварков.

В случае $m^0 \neq 0$ необходимо найти решения уравнения

$$(p^2 \varphi')' = 2p^2 \sin \varphi - \sin 2\varphi - 2m^0 p^2 \cos \varphi, \quad (27) \\ 0 < p < \infty$$

которые удовлетворяют асимптотическим условиям

$$\varphi(p) \approx \frac{\pi}{2} + Cp, \quad (28) \\ p \rightarrow 0$$

$$\varphi(p) \approx \frac{m^0}{p}, \\ p \rightarrow \infty$$

При этом решения зависят и от параметра m^0 .

Для проведения численного исследования решений задачи (27)-(28) в широком интервале изменения параметра m^0 целесообразно построить вычислительную схему на основе метода продолжения по параметру^{/9/}.

Этот метод позволяет эффективно использовать уже вычисленные решения задачи при определенном значении параметра для получения решений при новом значении. Для этого выполним разбиение исследуемого интервала $0 \leq m^0 \leq M$ узловыми точками $\{m_k^0; k = 1, 2, \dots, K; m_0^0 = 0, m_K^0 = M\}$.

При фиксированном значении параметра m_k^0 для численного решения граничной задачи (27)-(28) будем использовать итерационную схему на основе непрерывного аналога метода Ньютона^{/10/}. Известно^{/9/}, что узлы m_k^0 можно выбрать таким образом, что для заданного $m^0 = m_k^0$ итерации будут сходиться от начального приближения, являющегося решением задачи (27)-(28) при $m^0 = m_{k-1}^0$. Область сходимости ньютоновской итерационной схемы^{/10/} значительно шире, чем в классическом методе. Поэтому узловые точки $\{m_k^0\}$ можно на практике задавать достаточно произвольно. Вычисления начинаются от известных решений, найденных при $m^0 = m_0^0 = 0$ ^{/6/}.

При конкретной реализации схемы^{/10/} используется разностный

аппроксимация уравнения (27) точности $O(h^2)$, где h - шаг равномерной разностной сетки на конечном интервале $0 < p < p_m$,

$p_m \gg 1$. При вычислении таким методом решений с узлами следует учесть, что $p=0$ - точка сгущения узлов решений. Поэтому следует преобразовать уравнение (27) путем перехода к новой переменной

$\mathcal{X} = \ln p$, в результате которого можно применить разностную аппроксимацию с равномерным и относительно большим шагом h . Преобразованное таким образом уравнение

$$\varphi'' + \varphi' = 2 \exp(3\mathcal{X}) \sin \varphi - \sin 2\varphi - 2m \exp(2\mathcal{X}) \cos \varphi \quad (29)$$

рассматривается на конечном интервале $-\mathcal{X} < \mathcal{X} < \mathcal{X}_m$ ($\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_m \gg 1$) совместно с приближенными граничными условиями в точках $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_m$, которые являются следствием асимптотических условий (28).

Таким образом, численное решение задачи (27)-(28) зависит от следующих параметров вычислительной схемы: g - параметр редукции сингулярной граничной задачи на конечный интервал ($g = p_m$ для уравнения (27) и $g = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_m)$ для уравнения (29)), h - шаг разностной схемы, i - число ньютоновских итераций. Для оценки точности численного решения введем следующие обозначения: φ^* - точное решение рассматриваемой сингулярной граничной задачи, $\varphi(g)$ - точное решение соответствующей приближенной граничной задачи на конечном интервале, $\varphi(g, h)$ - точное решение разностной задачи и $\varphi(g, h, i)$ - приближенное решение, получаемое с помощью ньютоновской итерационной схемы^{/10/}.

Тогда справедлива оценка в сеточной норме

$$\|\varphi^* - \varphi(g, h, i)\| \leq \|\varphi^* - \varphi(g)\| + \|\varphi(g) - \varphi(g, h)\| + \|\varphi(g, h) - \varphi(g, h, i)\| \quad (30)$$

Из результатов^{/10/} непосредственно следует, что

$$\|\varphi(g) - \varphi(g, h)\| \leq C_1 h^2, \quad C_1 > 0, \quad (31)$$

$$\|\varphi(g, h) - \varphi(g, h, i)\| \leq C_2 \delta_i, \quad C_2 > 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0, \quad (32)$$

где δ_i - погрешность, полученная в результате подстановки приближенного решения $\varphi(g, h, i)$ в разностную граничную задачу. Относительно первого слагаемого в правой части оценки (30) естественно предположить, что $\|\varphi^* - \varphi(g)\| \rightarrow 0$ при $g \rightarrow \infty$. Однако получить количественно оценить сложно, и о поведении этой величины можно судить по результатам расчетов, выполненных для нескольких увеличивающихся значений g . Из изложенного следует, что параметры g , i вычислительной схемы целесообразно выбрать такими, чтобы

$$\|\varphi^* - \varphi(g, h, i)\| \approx C h^2 \quad (33)$$

Это дает возможность дополнительно уточнить численное решение на последовательности сгущающихся сеток^{/11/}. При заданной точности расчетов параметры вычислительной схемы определялись методом проб и экстраполяции по параметру m^* . В таблицах I-3 представлены результаты расчетов на трех сгущающихся сетках, демонстрирующие для различных значений m^* сходимость разностных решений. Параметры вычислительной схемы выбраны таким образом, что сходимость соответствует оценке (33). В случае $m^* = 0$ нами воспроизведены результаты работы^{/6/}.

Таблица I. Сходимость разностного решения для уравнения (25) ($h = 0,1$, $p_{max} = 25$, $n = 0$, где n - число нулей в решении)

p	φ_h	$\varphi_{h/2}$	$\varphi_{h/4}$	$\frac{\varphi_h - \varphi_{h/2}}{\varphi_{h/2} - \varphi_{h/4}}$
0,1	1,36869363	1,36842472	1,36837274	5,17
0,5	0,684505886	0,686250627	0,686683218	4,03
1,0	0,241059	0,242268	0,242569	4,02
1,5	$0,770198 \cdot 10^{-1}$	$0,774681 \cdot 10^{-1}$	$0,775800 \cdot 10^{-1}$	4,00
2,0	$0,2277095 \cdot 10^{-1}$	$0,229015 \cdot 10^{-1}$	$0,229340 \cdot 10^{-1}$	4,00
4,0	$0,816434 \cdot 10^{-4}$	$0,815649 \cdot 10^{-4}$	$0,8154407 \cdot 10^{-4}$	3,78
6,0	$0,937920 \cdot 10^{-7}$	$0,920767 \cdot 10^{-7}$	$0,916485 \cdot 10^{-7}$	4,01
8,0	$0,390587 \cdot 10^{-10}$	$0,372023 \cdot 10^{-10}$	$0,368567 \cdot 10^{-10}$	5,99

Таблица 2. Сходимость разностного уравнения (27) ($h = 0,1$, $p_{max} = 25$, $n = 0$, $m^* = 50$)

p	φ_h	$\varphi_{h/2}$	$\varphi_{h/4}$	$\frac{\varphi_h - \varphi_{h/2}}{\varphi_{h/2} - \varphi_{h/4}}$
0,1	1,56880	1,56880	1,56880	4,25
0,5	1,56080	1,56080	1,56080	4,00
1,0	1,55080	1,55080	1,55080	4,00
1,5	1,54081	1,54081	1,54081	4,00
2,0	1,53082	1,53082	1,53082	4,00
4,0	1,49097	1,49097	1,49097	4,00
6,0	1,451368	1,451368	1,451368	3,99
8,0	1,412142	1,412142	1,412142	3,97

Таблица 3. Сходимость разностной схемы решения уравнения (29)
 ($h = 0,1$, $\partial e_{\min} = -15$, $\partial e_{\max} = 10$, $n = 2$, $m^0 = 0,04$)

∂e	Ψ_h	$\Psi_{h/2}$	$\Psi_{h/4}$	$\frac{\Psi_h - \Psi_{h/2}}{\Psi_{h/2} - \Psi_{h/4}}$
-9,0	1,5671614	1,56715923	1,5671587	4,0
-8,0	1,56092389	1,56091185	1,56090885	4,0
-7,0	1,54398478	1,54393535	1,54392300	4,0
-6,0	1,49801962	1,49784053	1,49779572	3,99
-5,0	1,37400861	1,37341306	1,37326395	3,99
-4,0	1,05288316	1,05121485	1,05079740	3,99
-3,0	0,400152275	0,397837405	0,397260332	4,01
-2,0	-0,183260992	-0,183698758	-0,183807519	4,02
-1,0	-0,209669955	-0,209335786	-0,209252512	4,01
0,0	-0,024884821	-0,024876592	-0,0248745262	3,98
1,0	0,01430120	0,014729845	0,0147297648	3,50

Можно показать, что граничная задача (27)-(28) не имеет решений $\Psi_n(p)$ с нечетным числом узлов для $m^0 > 0$. Предположив обратное и выполнив интегрирование уравнения (27) с $\Psi = \Psi_n(p)$ в пределах от p_{\max} до ∞ , где $\Psi_n(p) < 0$, получим

$$-p_{\max}^2 \Psi_n'(p_{\max}) = \int_{p_{\max}}^{\infty} [2p^2 \sin \Psi_n(p) - \sin 2\Psi_n(p) - 2m^0 p^2 \cos \Psi_n(p)] dp. \quad (34)$$

Интеграл в правой части расходится, что приводит к противоречию, которое доказывает высказанное утверждение. Аналогично при $m^0 < 0$ задача (27)-(28) не имеет решений с четным числом узлов.

Отметим, что с помощью рассмотренной вычислительной схемы удалось обнаружить два различных решения с двумя узлами при $m^0 = 0,04$. Это свидетельствует о возможной трансформации спектра решений задачи (27)-(28), когда вместо решений с нечетным числом узлов появляются двукратно решения с четным числом узлов. Однако подробный анализ является предметом отдельной работы.

В данной работе основное внимание уделено численному нахождению бивузловых решений граничной задачи (27)-(28) для широкого диапазона изменения m^0 . Результаты расчетов представлены на рис.1. Для найденных решений вычислены зависимости $E(p)$, которые изображены на рис.2.

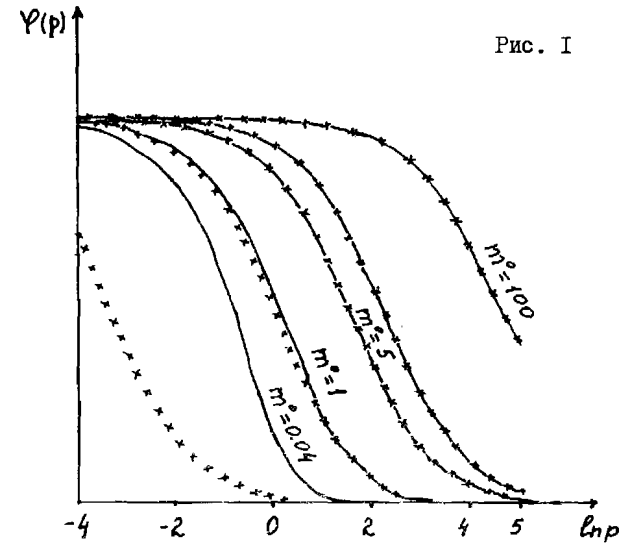


Рис. 1

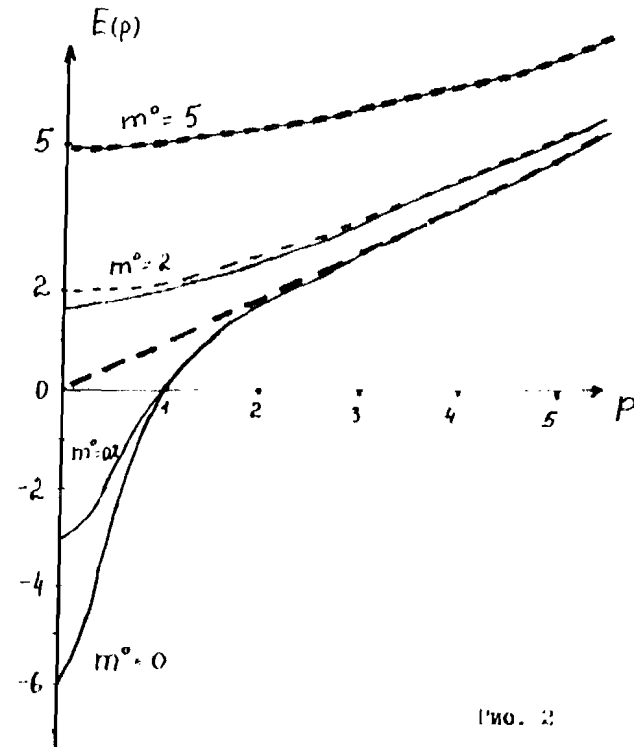


Рис. 2

Заключение

В настоящей работе была рассмотрена система уравнений Швингера-Дайсона и Бете-Солпитера для массивных кварков с численными решениями уравнения Швингера-Дайсона.

Основными результатами работы является новый метод решения этой системы уравнений (метод "раздевания") и исследование перехода от безмассовых кварков к тяжелым (см. рис.2). Мы видим, что при токовой массе кварка, сравнимой с константой осцилляторного потенциала

$m > (\frac{4}{3} V_0)^{\frac{1}{2}}$ (или $m > 1$), эффект спонтанного нарушения симметрии пропадает (токовая масса кварка практически совпадает со структурной).

Кроме того, мы обнаружили, что в работах^{6,7/} дано неправильное описание движущихся мезонов, перепутаны структуры $L_1(N_1)$ и $L_2(N_2)$ и потеряна часть членов в уравнении для векторных и скалярных возмущений (I). Поэтому необходимо уточнить найденный в этой работе спектр мезонов.

Вычисление спектра мезонов из массивных кварков будет посвящена следующая работа авторов.

Литература

1. Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В.-УФН, 143 (1984), с.3.
2. Hasenfratz P. Cern preprint, TH-3737, 1983;
Schierholz G. Cern preprint, TH-4139, 1985;
Klinkhamer F.R., Halpern M.B. Quark confinement and liberation, World scientific Co Pte Ltd., 1985.
3. Nguyen Suan Han, Pervushin V.N.-Mod. Phys. Lett A., 1987, v2, 400;
Илиева Н.П., Нгуен Суан Хан, Первушин В.Н. ЯФ, 1987, 45, с.1169.
4. Первушин В.Н., Каллис В., Нгуен Суан Хан, Сариков Н.А. Препринт ОИЯИ, P2-87-674, Дубна, 1987.
5. Adler S.L., Davis A.G. - Nucl. Phys., 1984, B224, p.469.
6. Le Yaouanc A., Oliver L., Pene O., Raynal J-C.
Phys. Rev., 1984, D29, p.1233.
7. Le Yaouanc A., Oliver L., Pene O., Raynal J-C.
Phys. Rev., 1985, D31, p.137.
8. Salpeter E.E.-Phys. Rev., 1952, 87, p.328.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Мир, М., 1975.
10. Жидков Е.П., Пузынин И.В.-ЖВМ и МФ, 1967, 7, с.1086.
11. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности разностных уравнений. Наука, М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июля 1988 года.

Амирханов И.В. и др.

P11-88-506

Кварконий в КХД с растущим потенциалом

Рассмотрена система релятивистски-ковариантных уравнений Швингера - Дайсона и Солпитера с растущим потенциалом. Предложен метод решения этой системы, и получены численные решения уравнения Швингера - Дайсона для осцилляторного потенциала с учетом затравочной массы кварка.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Amirkhanov I.V. et al.

P11-88-506

Quarkonium in QCD with an Increasing Potential

The system of relativistic - covariant Schwinger - Dyson and Salpeter equations with an increasing potential is considered. The method for solving this system is proposed, and the numerical solutions for Schwinger - Dyson equations with oscillator potential by taking into account bare quark masses are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988