сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-88-480 e

Б.Н.Хоромский

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ В НЕПОЛНО-НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Исследование нелинейной проблемы

1988

Рассмотрим задачу решения двух- или трехмерных эллиптических уравнений, возникающих в магнитостатике при использовании дифференциальной и смешанной [1] постановок. Применение метода конечных элементов /МКЭ/ или метода конечных разностей /МКР/ основано на дискретизации области определения неизвестной функции с шагом, локально согласованным с градиентом искомого решения. При этом аппроксимация нелинейности проводится, как правило, с использованием того же самого сеточного либо конечноэлементного разбиения, что в общем случае многократно увеличивает вычислительные затраты на учет нелинейных эффектов по сравнению с линейным случаем.

Решение нелинейной проблемы сводится к определению в каждой точке x /континуальная нелинейность/ области ферромагнетика Ω_F, наряду с искомым потенциалом, значений функции $\mu(x)$ - магнитной проницаемости среды /либо функции $\nu(x) = \mu^{-1}(x)$ /, зависящей нелинейно от модуля градиента искомой функции в точке x. Для широкого класса задач влияние точности аппроксимации функции $\mu(x)$, $x \in \Omega_F$, на значения решения в исследуемой области таково, что нет необходимости использовать функцию $\mu(x)$ в области нелинейности на столь же мелкой сетке, что и для аппроксимации искомого решения. На практике это приводит к тому, что в ряде случаев используется упрощенная линейная модель с постоянными значениями магнитной проницаемости в одной или нескольких подобластях, из которых состоит ферромагнетик. Выбор этих постоянных осуществляется эмпирически. Естественно, что такое "огрубление" модели не позволяет получить решение с гарантированной точностью.

В работе предлагается неполно-нелинейная (IN) постановка уравнений магнитостатики, в которой используется конечномерная нелинейность. Такая постановка позволяет автоматически регулировать необходимую точность учета континуальной зависимости $\mu(x)$, обеспечивая возможность оптимизации вычислительных затрат на учет нелинейных эффектов. Исходная нелинейная модель получается в предельном случае.

Основная идея неполно-нелинейной постановки заключается в разбиении области нелинейности Ω_F на конечное число p подобластей $\Omega_F = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i$, в каждой из которых полагаем $\mu(x) = \mu_i$,

$i = \overline{1,p}$, где неизвестные константы μ_i, подлежащие определению, выражаются через градиент искомой функции в области Ω_i по формуле $\mu_i = \mu(\bar{x}_i)$, а число $\bar{x}_i$ есть среднее значение по области Ω_i модуля градиента решения. При $p = 1$ получаем модель с постоянным значением коэффициента $\mu(x)$ в области Ω_F, подлежащим определению, а при $p \to \infty$, $d = \max\limits_i(\operatorname{diam}\Omega_i) \to 0$ такая модель сколь угодно близка к исходной задаче с континуальной нелинейностью (FN).

Отметим, что экономичные численные схемы для нелинейных уравнений, альтернативные стандартной аппроксимации по методу Галеркина, могут быть получены на основе групповой формулировки МКЭ [2,3].

В § 1 установлено, что нелинейный оператор краевой задачи в IN-постановке при известных требованиях на функцию $\mu(x)$ обладает свойствами сильной монотонности, липшиц-непрерывности и потенциальности в соответствующих соболевских пространствах. Как следствие - задача имеет единственное решение, которое можно найти методом простых итераций с переобуславливанием, обобщенным методом сопряженных градиентов или методами ньютоновского типа. Получены оценки разности решений для задач в FN- и IN-постановках.

В § 2 рассмотрено уравнение разделения области в IN-формулировке для разбиения "шахматного" типа. Изучены функциональные свойства нелинейного оператора Пуанкаре - Стеклова, определенного лишь на внутренних границах раздела подобластей Ω_i, сформулированы итерационные процессы решения возникающих уравнений, сводящиеся к многократному решению линейной краевой задачи с постоянными значениями коэффициента $\mu(x) = \mu_i$, $x \in \Omega_i$ в каждой из подобластей.

Быстрые итерационные методы решения таких задач, имеющие скорость сходимости, не зависящую от отношения коэффициентов μ_i в соседних подобластях, рассмотрены в следующей работе.

Методы декомпозиции области с внутренними точками пересечения для линейных эллиптических конечноэлементных систем уравнений рассматривались в [4], а переобуславливатели для таких задач, использующие "шахматное" разбиение области, строятся в [5].

Построенные итерационные методы решения нелинейной задачи в IN-постановке, так же, как и алгоритмы решения соответствующей линейной проблемы, сводятся к независимому решению краевых задач в подобластях Ω_i. Такой естественный параллелизм делает рассматриваемый подход наиболее эффективным при использовании на параллельных ЭВМ. Кроме того, IN-постановка позволяет независимо проводить аппроксимацию неизвестной

функции и аппроксимацию нелинейности. Принимая во внимание слабую /логарифмическую/ зависимость вычислительной работы от размерности дискретизованной системы уравнений в расчете на одно неизвестное /как будет показано в следующей работе/, можно сделать вывод о том, что уравнения в IN-постановке могут быть положены в основу гибких /т.е. позволяющих эффективно использовать упрощающие особенности моделируемой системы/ и в то же время универсальных модульных комплексов программ, предназначенных для решения двумерных и пространственных задач магнитостатики в ограниченной области. Случай неограниченной области, согласно § 2, реализуется на основе комбинированной постановки [1,13].

Для решения краевых задач в подобластях можно применять либо МКР, либо МКЭ в зависимости от геометрии подобластей. Поэтому если использовать достаточно широкий набор модулей для решения задач Дирихле и смешанных в подобластях простой формы, то рассмотренный подход дает возможность формировать пакет программ для решения каждой конкретной задачи, адекватно отражающий /по уровню оптимизации отдельных модулей/ сложность геометрии и нелинейной зависимости моделируемой магнитной системы в отдельных подобластях.

Отметим, что операторы Пуанкаре - Стеклова для линейных эллиптических уравнений изучены в [6,7], случай квазилинейных эллиптических задач в ограниченной области рассмотрен в [8], а нелинейная задача в FN-постановке для неограниченной области исследовалась в [1].

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ IN-ПОСТАНОВКИ, ИХ СВОЙСТВА

Уравнения в IN-постановке являются упрощенным вариантом модели, описывающей пространственное распределение магнитного поля на основе стационарного уравнения Максвелла для изотропной среды при использовании двух скалярных потенциалов. В двумерном случае охватываются также уравнения для векторного потенциала. Сформулируем сначала исходные уравнения с континуальной нелинейностью /задача FN/.

Пусть ограниченная область $\Omega \in R^N$, $N = 2,3$ с липшицевой границей Γ есть объединение двух областей $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1^\circ$, имеющих липшицевы границы Γ_0 и Γ_1°. Обозначим $\Gamma_\mu = \Gamma_1^\circ \setminus (\Gamma \cap \Gamma_1^\circ)$.

Задача FN. Найти функцию $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющую уравнению

$$Au \equiv -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(w) = 0,$$

$$u_\Gamma = 0, \quad [\, u\,]_{\Gamma_\mu} = 0, \quad \Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]_{\Gamma_\mu} = \Psi(x), \qquad /1.1/$$

где $w = \operatorname{grad} u \equiv (y_1, \dots, y_N)^T$, $[\cdot]_{\Gamma_\mu}$ - скачок соответствующей функции на Γ_μ, $\partial u/\partial n$ - конормальная производная, а

$$a_i(w) = \begin{cases} y_i, & x \in \Omega_o, \\ \mu(|y|)y_i, & x \in \Omega_1^\circ, \quad i = \overline{1,N} \end{cases} \qquad /1.2/$$

при $|y|^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2$.

Предполагаем, что заданная функция $\mu(t)$, $t \in [\,0,\infty)$ удовлетворяет каким-либо из условий

$$\mu(t) \geq m_1 > 0, \qquad /1.3а/$$

$$\mu(t)t - \mu(r)\cdot r \geq m(t-r), \; t \geq r, \; m > 0, \qquad /1.3б/$$

$$|\mu(t)t - \mu(r)r| \leq M|t-r|, \qquad /1.3в/$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}\mu(t)\cdot t\Big| \leq M. \qquad /1.3г/$$

Задача FN соответствует дифференциальной постановке уравнений магнитостатики в ограниченной области. Кроме того, к такой проблеме приходим на каждом шаге итерационного процесса решения уравнений магнитостатики в комбинированной постановке[1].

Рассмотрим IN -формулировку для уравнений /1.1/, /1.2/. Разобьем область Ω_1° на конечное число подобластей $\Omega_1^\circ = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, $i \neq j$, имеющих липшицевы границы Γ_i.

Задача IN. Найти функцию $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющую уравнению /1.1/ с функцией $a_i(w)$, $i = \overline{1,N}$ вида

$$a_i(w) = \begin{cases} y_i, & x \in \Omega_o, \\ \mu\Big[\Big(\dfrac{1}{\operatorname{mes}\Omega_j}\displaystyle\int_{\Omega_j} |w|^2 dx\Big)^{1/2}\Big]\cdot y_i, & x \in \Omega_j, \; j = \overline{1,p}, \end{cases} \qquad /1.4/$$

дополненному условиями на границах Γ_{kj}, общих для областей Γ_k и Γ_j и не лежащих на Γ_μ:

$$[\,u\,]_{\Gamma_{kj}} = \Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]_{\Gamma_{kj}} = 0, \quad k, j = \overline{1,p}, \quad \Gamma_{kj} \cap \Gamma_\mu = \varnothing. \qquad /1.5/$$

Рассмотрим обобщенную формулировку задачи /1.1/, /1.4/, /1.5/. Определим операторы и пространства

$$H = L_2(\Omega), \quad V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad Y = L_2^{(N)}(\Omega) \equiv \underbrace{L_2 \times \dots \times L_2}_{N},$$

$$T : u \to \{\operatorname{grad} u\}; \quad T \in (V \to Y), \qquad /1.6/$$

$$A_{IN} : y \to \{a_1(y), \dots, a_N(y)\} - \bar{g},$$

где линейный функционал $\bar{g} \in Y^*$, аналогично[1], есть продолжение согласно теореме Хана - Банаха на все $L_2^{(N)}(\Omega)$ линейного непрерывного функционала g :

$$g(Th) = \int_{\Gamma_\mu} \Psi(s)\,\gamma_o(h(s))\,ds, \quad \forall h \in V. \qquad /1.7/$$

Здесь γ_o: $V \to \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma_\mu)$ - оператор следа[11] на Γ_μ функций из пространства V и выполняется условие $\Psi \in \tilde{W}_2^{-1/2}(\Gamma_\mu)$. Знаком ~ будем обозначать некоторое подпространство соответствующего пространства, которое определяется в зависимости от расположения границ Γ и Γ_1°. Например, если $\Gamma \cap \Gamma_1^\circ = \varnothing$, то можно положить

$$\tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma_\mu) = W_{2,g_o}^{1/2}(\Gamma_\mu) \equiv \{u \in W_2^{1/2}(\Gamma_\mu), \; (u, g_o) = 0\},$$
$$\tilde{W}_2^{-1/2}(\Gamma_\mu) = W_{2,1}^{-1/2}(\Gamma_\mu) \equiv \{v \in W_2^{-1/2}(\Gamma_\mu), \; (v, 1) = 0\}, \qquad /1.8/$$

где g_o - плотность потенциала Робена на Γ_μ, а скалярное произведение рассматриваем в $L_2(\Gamma_\mu)$.

Простой проверкой свойств энергетического расширения[19] устанавливается

Лемма 1. Для всякой функции $\Psi \in \tilde{W}_2^{-1/2}(\Gamma_\mu)$ операторы и пространства /1.6/ задают энергетическое расширение $\bar{A} = T^* A_{IN} T$ оператора /1.1/, /1.4/, /1.5/.

Отметим, что естественная область определения оператора /1.1/, /1.4/, /1.5/ есть $M(\bar{A}) = \bigcup_{i=o}^{p} C^2(\bar{\Omega}_i)$, а область определения $D(\bar{A})$ получается из $M(\bar{A})$ при выполнении краевых условий /1.1/, /1.5/.

Таким образом, задачу $\mathbb{N}$ можно записать в обобщенной формулировке: найти функцию $u \in V$ такую, что

$$(A_{IN} Tu, T\eta) = 0, \quad \forall \eta \in V. \qquad /1.9/$$

Перепишем уравнение /1.9/ в эквивалентном виде. Введем обозначения $g_i = \operatorname{mes}\Omega_i$ и $r_i(y) = (g_i^{-1} \int_{\Omega_i} |y|^2 dx)^{1/2}$. Определим константы $\mu_0 = 1$, $\mu_i(u) = \mu(r_i(\nabla u))$, $i = \overline{1,p}$ и рассмотрим квадратичные /в каждой области Ω_i/ формы для $i = \overline{0,p}$:

$$A_i(u,v) = \mu_i(u) \int_{\Omega_i} (\nabla u, \nabla v)\, dx, \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Тогда уравнение /1.9/ примет вид

$$\sum_{k=0}^{p} A_k(u,v) - \int_{\Gamma_\mu} \Psi(s)\gamma_0(v)\, ds = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \qquad /1.10/$$

Лемма 2. а/ Если выполнено условие /1.3а/, то оператор $\bar{A}$ коэрцитивен с функцией $\gamma(s) = m_1 s$, а если функция $\mu(t)t$ возрастает или строго возрастает, то $\bar{A}$ монотонен или строго монотонен.

б/ При выполнении условий /1.3б/ оператор $\bar{A}$ сильно монотонен.

в/ Из свойства /1.3в/ следует липшиц-непрерывность оператора $\bar{A}$.

г/ При условии /1.3г/ оператор $\bar{A}$ дифференцируем по Гато, а при условии п. /б/ производная положительно определена с константой m_1 и симметрична.

д/ Оператор A_{IN} потенциален с потенциалом

$$F_0(y) = F_0(0) + \sum_{i=0}^{p} g_i \int_0^{r_i(y)} \mu(s)\, s\, ds, \qquad /1.11/$$

где при $i = 0$ $\mu(s) = 1$.

Доказательство приведем для определенности при $N = 3$. Используем обозначения: для y, z, $v \in L_2^{(3)}(\Omega)$ полагаем

$$r_i = r_i(y), \quad \sigma_i = r_i(z), \quad (y,z) = \sum_{k=1}^{3} y_k z_k.$$

Так как, согласно лемме 1.4 [9], свойства /а/-/в/ для оператора $\bar{A}$ следуют из соответствующих свойств оператора A_{IN}, рассмотрим этот оператор. Его коэрцитивность очевидна. Используя неравенство Шварца, имеем

$$\langle A_{IN}y - A_{IN}z, y-z\rangle_Y = \sum_{i=0}^{p} [\mu_i(r_i) \int_{\Omega_i} (y, y-z)\, dx -$$

$$-\mu_i(\sigma_i) \int_{\Omega_i} (z, y-z)\, dx] \ge [\mu_i(r_i) g_i (r_i^2 - r_i\sigma_i) -$$

$$-\mu_i(\sigma_i) g_i (r_i\sigma_i - \sigma_i^2)] = \sum_i g_i [\mu_i(r_i) r_i -$$

$$-\mu_i(\sigma_i)\sigma_i](r_i - \sigma_i) \ge m \sum_i g_i (\mu_i - \sigma_i)^2,$$

откуда следует монотонность, либо строгая монотонность оператора A_{IN}.

Свойство /б/ следует из п./а/, если использовать разложение оператора A_{IN} в сумму монотонного и сильно монотонного операторов, в соответствии с представлением $\mu(t) = (\mu(t) - m_1) + m_1$.

Для доказательства п./в/ используем очевидное следствие неравенства /1.3в/:

$$|(\mu(t) - \mu(r))t| \le 2M|t - r|.$$

Получим, полагая $v_i = (\int_{\Omega_i} v^2 dx)^{1/2}$:

$$\langle A_{IN}y - A_{IN}z, v\rangle_Y = \sum_{i=0}^{p} \mu_i(r_i) \int_{\Omega_i} (y-z, v)\, dx +$$

$$+ \sum_{i=0}^{p} [\mu_i(r_i) - \mu_i(\sigma_i)] \int_{\Omega_i} (z, v)\, dx \le$$

$$\le M\|y-z\|_Y \cdot \|V\|_Y + \sum_{i=0}^{p} g_i^{1/2} |\mu_i(r_i) - \mu_i(\sigma_i)|\sigma_i v_i.$$

Далее, используя неравенство

$$g_i^{1/2} |r_i - \sigma_i| \le (\int_{\Omega_i} |y-z|^2 dx)^{1/2},$$

оцениваем второе слагаемое, используя неравенство Гельдера:

$$\le 2M \sum_{i=0}^{p} g_i^{1/2} |r_i - \sigma_i| \cdot v_i \le 2M \sum_{i=0}^{p} v_i \Big(\int_{\Omega} |y-z|^2 dx \Big)^{1/2} \le$$

$$\le 2M \|y-z\|_Y \cdot \|v\|_Y,$$

что приводит к оценке, доказывающей п./в/:

$$\langle A_{IN} y - A_{IN} z, v \rangle_Y \le 3M \|y-z\|_Y \cdot \|v\|_Y .$$

Рассмотрим функцию

$$s \to \Phi(s) = \sum_{i=0}^{p} \mu(r_i(y+sz)) \int_{\Omega_i} (y+sz, v)\, dx .$$

Тогда по определению

$$\langle A'_{IN}(y)z, v \rangle_Y = \Phi'(s)|_{s=0} = \sum_{i=0}^{p} [\mu(r_i(y)) \int_{\Omega_i} (z,v)\,dx + \qquad /1.12/$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial r}(r_i)(g_i r_i(y))^{-1} \int_{\Omega_i} (y,z)\,dx \int_{\Omega_i} (y,v)\,dx],$$

откуда следует симметрия оператора A'_{IN}. Для доказательства положительной определенности используем неравенство

$$\frac{\partial \mu(r)}{\partial r} \cdot r + \mu(r) \ge m > 0. \qquad /1.13/$$

Используя в каждой подобласти Ω_i вектор $\bar{y} = y \cdot (\int_{\Omega_i} y^2 dx)^{-1/2}$, перепишем /1.12/ в виде

$$\langle A'_{IN}(y)z, z \rangle_Y = \sum_{i=0}^{p} [\mu(r_i(y)) \int_{\Omega_i} (z,z)\,dx + \qquad /1.14/$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial r}(r_i) \cdot r_i [\int_{\Omega_i} (\bar{y}, z)\,dx]^2]$$

и рассмотрим два случая:

1/ $\frac{\partial \mu}{\partial r}(r) \cdot r > 0$, тогда из /1.14/, следует

$$\langle A'_{IN}(y)z, z \rangle_Y \ge \sum_{i=0}^{p} \mu(r_i(y)) \int_{\Omega_i} (z,z)\,dx \ge m_1 \int_{\Omega} (z,z)\,dx .$$

2/ $\frac{\partial \mu}{\partial r}(r) \cdot r < 0$, тогда, согласно /1.13/, имеем

$$\langle A'_{IN}(y) z, z \rangle_Y \ge \sum_{i=0}^{p} [\mu(r_i(y)) \int_{\Omega_i} (z,z)\,dx +$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial r}(r_i) r_i \int_{\Omega_i} (z,z)\,dx \cdot \int_{\Omega_i} (\bar{y}, \bar{y})\,dx] \ge m \sum_{i=0}^{p} \int_{\Omega_i} (z,z)\,dx .$$

Поэтому константа положительной определенности для A'_{IN} есть $m_2 = \min(m, m_1) = m_1$.

Напомним, что если F_o есть потенциал для оператора A_{IN}, то $F(x) = F_o(Tx)$ - потенциал для оператора $\bar{A}$ /9/. Пусть $y, z \in L_2^{(3)}(\Omega)$, тогда для $F_o(y)$ из /1.11/ имеем

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [F_o(y+tz) - F_o(y)] = \frac{d}{dt} [\sum_{i=0}^{p} g_i \int_0^{r_i(y+tz)} s \mu(s)\, ds]_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} g_i \mu(r_i(y)) r_i(y) \frac{d}{dt} r_i (y+tz) |_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \mu(r_i(y)) \int_{\Omega_i} (y,z)\,dx = \langle A_{IN}\, y, z \rangle_Y ,$$

что завершает доказательство леммы.

Непосредственным следствием лемм 1, 2 является

Теорема 1. Пусть выполнены условия /1,3б,в/, тогда для всякой функции $\Psi \in \tilde{W}_{2,1}^{-1/2}(\Gamma_\mu)$ задача /1.9/ /или /1.10// имеет единственное обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Перейдем к оценке разности решений задач FN и IN. Обобщенное решение первой из них обозначим u_{FN}, а второй - u_{IN}. Положим $u_\Delta = u_{FN} - u_{IN}$, $\mu_N = \mu(|\nabla u_{IN}|)$, $\mu_{IN} = \mu(r_i)$.

Лемма 3. Справедлива оценка

$$\|u_\Delta\|_V \le m^{-1} \sum_{i=1}^{p} (\int_{\Omega_i} |\mu_N - \mu_{IN}|^2 |\nabla u_{IN}|^2 dx)^{1/2}. \qquad /1.15/$$

Если $|\nabla u_{IN}|^2 \in L_q(\Omega_i)$, $1 \le q < \infty$, $q^{-1} + \rho^{-1} = 1$, то

$$\|u_\Delta\|_V \le c \sum_{i=1}^{p} \|(\mu_N - \mu_{IN})^2\|_{L_\rho(\Omega_i)}^{1/2} \| |\nabla u_{IN}|^2 \|_{L_q(\Omega_i)}^{1/2}. \qquad /1.16/$$

Для доказательства вычтем из равенства

$$\int\limits_{\Omega} \mu(|\nabla u_{FN}|)\nabla u_{FN}\cdot \nabla(u_{FN}-u_{IN})\,dx - \int\limits_{\Gamma_\mu} \Psi\gamma_o(u_\Delta)\,ds = 0$$

равенство /1.10/ при $v = u_\Delta$. Получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega} (\mu(|\nabla u_{FN}|)\cdot\nabla u_{FN} - \mu(|\nabla u_{IN}|)\nabla u_{IN})\nabla u_\Delta dx \; +$$

$$+\sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\Omega_i} (\mu(|\nabla u_{IN}|) - \mu_{IN})\nabla u_{IN}\cdot\nabla u_\Delta dx = 0,$$

из которого в силу сильной монотонности оператора A для задачи FN, неравенства Гельдера и эквивалентности норм $||u||_V$ и $||\nabla u||_{L_2(\Omega)}$ /неравенство Пуанкаре/ имеем оценку /1.15/. Далее замечаем, что $\mu(|\nabla u_{IN}|)\in L_p(\Omega_i)$, $1\le p\le\infty$ для всех i. Поэтому если $|\nabla u_{IN}|^2 \in L_q(\Omega)$, то в силу неравенства Гельдера оценка /1.16/ следует из /1.15/.

При дополнительных предположениях уточним оценку первого сомножителя в правой части /1.16/. Обозначим $v = |\nabla u_{IN}|$. Справедлива

Лемма 4. Пусть $|\nabla v^2|\in L_{p'}(\Omega_i^o)$, число $\rho > 0$ таково, что $\rho\le Np'(N-p')^{-1}$, а $r^{-1} = (p')^{-1} + \rho^{-1}$. Тогда выполнено

$$||\mu(|\nabla u_{IN}|) - \mu(r_i(\nabla u_{IN}))||_{L_\rho(\Omega_i)} \le A_o||\,|\nabla v^2|\,||_{L_{p'}(\Omega_i)}, \qquad /1.17/$$

где $A_o \le c\max\limits_{1\le i\le p} g_i^{-1}(\operatorname{diam}\Omega_i)^{1+\frac{N}{r}}$.

При доказательстве оценки /1.17/ используется легко проверяемая оценка /1.18/.

Лемма 5. Для всякой функции $z\in L_\rho(\Omega_i)$, такой, что $z^2 \in L_\rho(\Omega_i)$ и $z\ge 0$, выполнено

$$||z - r_i(z)||_{L_\rho(\Omega_i)} \le \frac{c}{r_i(z)}||z^2 - (r_i(z))^2||_{L_\rho(\Omega_i)}. \qquad /1.18/$$

Вернемся к оценке /1.16/. В силу /1.18/ имеем

$$||\mu_N - \mu_{IN}||_{L_{2\rho}(\Omega_i)} \le c\Big(\int\limits_{\Omega_i}|v(x) - r_i(v)|^{2\rho}dx\Big)^{1/2\rho} \le$$

$$\le c||v^2 - (r_i(v))^2||_{L_{2\rho}(\Omega_i)}\cdot\frac{1}{r_i(v)}.$$

Применим к первому сомножителю неравенство Соболева /10/, в котором полагаем $x = v^2$, $q' = 2\rho$, $r^{-1} = (p')^{-1} + (q')^{-1}$:

$$||x - m(x)||_{L_{q'}(\Omega_i)} \le \frac{c}{g_i}(\operatorname{diam}\Omega_i)^{1+\frac{N}{r}}\,||\,|\nabla x|\,||_{L_{p'}(\Omega_i)}, \qquad /1.19/$$

что приводит к оценке

$$\le c\, r_i(v)^{-1}A_o||\,|\nabla v^2|\,||_{L_{p'}(\Omega_i)}.$$

С другой стороны,

$$||\,|\nabla v^2|\,||_{L_{p'}(\Omega_i)} \le 2||\,|\nabla v|\,||_{L_{2p'}}\cdot||v||_{L_{2p'}},$$

поэтому в итоге имеем

$$||\mu_N - \mu_{IN}||_{L_{2\rho}(\Omega_i)} \le A_o||\,|\nabla v|\,||_{L_{2p'}(\Omega_i)}||v||_{L_{2p'}}r_i(v)^{-1}.$$

Положим в неравенстве /1.19/ $r = 1$, а также $q' = p' = 2/p = 1$, $q = \infty$/. Предположим также, что $\operatorname{mes}\Omega_i \ge c(\operatorname{diam}\Omega_i)^N$, т.е. $A_o \le c\operatorname{diam}\Omega_i$. В итоге справедлива

Лемма 6. Пусть $|\nabla v|^2 \in L_2(\Omega_i)$, $v^2\in L_\infty(\Omega_i)$, $i = \overline{1,p}$, тогда выполнена оценка

$$||u_\Delta||_V \le c\,d_1\cdot d_2(\operatorname{mes}\Omega_i^o)^{1/2}, \qquad /1.20/$$

где $d_1 = \max\limits_{1\le i\le p}(\operatorname{diam}\Omega_i)$,

$$d_2 = \max_i\big(||\,|\nabla v|^2\,||^{1/2}_{L_2(\Omega_i)}\cdot||v^2||^{1/2}_{L_2(\Omega_i)}\times$$

$$\times||v^2||^{1/2}_{L_\infty(\Omega_i)}\cdot||v||^{-1}_{L_2(\Omega_i)}\big).$$

Замечание. Если $|\nabla u_{IN}|\in C^1(\bar\Omega_i)$, то из /1.16/ следует оценка

$$||u_\Delta||_V \le c\operatorname{diam}\Omega_i\sum_{i=1}^{p}||v^2||^{1/2}_{L_q(\Omega_i)}.$$

Отметим, что оценка вида $||u_\Delta||_V \le c\cdot d_1$ является, по-видимому, неулучшаемой для рассмотренного способа аппроксимации нелинейности.

Рассмотрим другие типы краевых условий на границе Γ. Аналогично теореме 1 устанавливается однозначная разрешимость неоднородных /на Γ/ краевых задач Дирихле и Неймана для $\mathbb{N}$-постановки. Например, для задачи Неймана справедлива лемма, подобная лемме 2, а также

Теорема 2. Для всякой функции $\Psi \in \tilde{W}_{2,1}^{-1/2}(\Gamma_\mu)$ и $g \in W_{2,1}^{-1/2}(\Gamma)$ существует единственное обобщенное решение $u \in W^1_{2,g_0}(\Omega)$, удовлетворяющее уравнению $\forall \eta \in W^1_{2,g_0}(\Omega)$:

$$\sum_{k=0}^{p} A_k(u,\eta) - \int_{\Gamma_\mu} \Psi(s)\gamma_0(\eta)ds = \int_{\Gamma} g(s)\gamma_0(\eta)ds. \qquad /1.21/$$

Используя результат теоремы 2, можем определить нелинейный оператор Пуанкаре - Стеклова $S_{\mathbb{N}}$ для задачи в $\mathbb{N}$-постановке, $S_{\mathbb{N}} \in (W_{2,1}^{-1/2}(\Gamma) \to W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma))$, который всякой функции $g \in Z^* = W_{2,1}^{-1/2}$ сопоставляет след $\gamma_0(u) \in Z$ функции u на границе Γ, где u - решение задачи /1.21/, так что справедливо равенство

$$\langle S_{\mathbb{N}} g, \eta \rangle = \langle \gamma_0(u), \eta \rangle, \quad \forall \eta \in Z^*. \qquad /1.22/$$

Используя свойства оператора $\bar{A}$, установленные в лемме 2, аналогично[1], можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. При выполнении условий /1.3а-в/ оператор $S_{\mathbb{N}}$ является сильно монотонным, непрерывным и обладает обратным $S^{-1}_{\mathbb{N}}$, который является липшиц-непрерывным, сильно монотонным, $S^{-1}_{\mathbb{N}} \in (Z \to Z^*)$. При условии /г/ оператор $S^{-1}_{\mathbb{N}}$ дифференцируем по Гато, причем $R = [S^{-1}_{\mathbb{N}}]'(v)$ положительно определен и симметричен. Потенциал оператора $S^{-1}_{\mathbb{N}}$ задается равенством

$$F(u) = F(0) + \sum_{i=0}^{p} g_i \int_0^{r_i(|\mathrm{grad}\, v|)} \mu(t)\,t\,dt, \quad \gamma_0(v) = u.$$

Теорема 3 позволяет построить, аналогично[1], уравнения метода разделения области для комбинированной постановки, когда решение u краевой задачи $\mathbb{N}$ ищется во всем пространстве R^N для краевого условия $u(\infty) = 0$. Если K и L - интегральные операторы двойного и простого слоя на поверхности Γ, а $u_\Gamma = \gamma_0(u)$ есть след решения u на этой поверхности, то справедливо уравнение

$$S^{-1}_{\mathbb{N}} u_\Gamma + G^{-1} u_\Gamma = 0, \qquad /1.23/$$

где $G \in \mathfrak{L}(Z \to Z^*)$, $G = (E + K)^{-1}L$. При решении уравнения /1.22/ с необходимостью приходим к вычислению значений оператора $S^{-1}_{\mathbb{N}} u$ для $u \in Z$, что включает решение неоднородной задачи Дирихле вида $\mathbb{N}$ /1.1/, /1.4/, /1.5/ в области Ω. Последняя задача легко сводится к однородной, т.е. с условием $u_\Gamma = 0$. Далее сосредоточим внимание на методах решения однородной задачи $\mathbb{N}$.

Замечание. Полученные результаты справедливы в двумерном случае как для декартовой системы координат, так и в (r,z)-геометрии для уравнения вида

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \Phi,$$

которое получается из трехмерного уравнения /1.1/ в цилиндрических координатах с учетом равенства $\partial u/\partial\phi = 0$.

§ 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ $\mathbb{N}$ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ГАЛЕРКИНСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим разбиения области Ω "шахматного" типа /черно-белое/ $\Omega = \bigcup_{k=0}^{M} \Omega_k$, где Ω_k есть прямоугольники либо параллелепипеды, так же, как и Ω. Множество подобластей Ω_k разбиваем на два подмножества Ω_B и Ω_W, так что $\Omega = \Omega_B \cup \Omega_W \cup \Gamma_I$, где Γ_I - внутренние границы областей Ω_k, т.е. $\Gamma_I \cap \Gamma = \emptyset$. Например, в двумерном случае клетки Ω_k получаются разбиением области Ω $(m-1)$ вертикальными и $(n-1)$ горизонтальными линиями. При использовании двумерной нумерации областей Ω_k, т.е.

$\Omega = \bigcup_{i,j} \bar{\Omega}_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $M = m \cdot n$, полагаем

$\Omega_B = \bigcup_{i,j} \bar{\Omega}_{ij}$, $i+j$ - четное число

$\Omega_W = \bigcup_{i,j} \bar{\Omega}_{ij}$, $i+j$ - нечетное число.

Разбиения в трехмерном случае строим аналогично. Придерживаясь одномерной индексации, обозначим через I_B и I_W множества индексов для клеток из Ω_B и Ω_W соответственно. Для большей ясности изложения рассмотрим двумерный случай, останавливаясь, по мере надобности, на особенностях в трехмерном варианте.

Обозначим $\partial\Omega_i = \bigcup_{k=1} \Gamma_i^k \equiv \Gamma_i$, тогда $\bigcup_{i \in I_B} \Gamma_i = \Gamma \cup \Gamma_I = \bigcup_{i \in I_W} \Gamma_i$.

Определим набор пространств: $V = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $V_i \doteq \tilde{W}^1_2(\Omega_i) = \{\bar{u} \in W^1_2(\Omega_i)$, являющихся для всех $i = \overline{0,M}$ сужением на Ω_i некоторой функции $u \in V\}$. Пространства следов $\gamma_i u$ на Γ_i функций $u \in V$ обозначим $V_i^{1/2} = \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma_i)$, $i = \overline{0,M}$ а пространства следов нормальных производных $\gamma_i^1 u = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_i}$ через $V_i^{-1/2} = \tilde{W}_{2,1}^{-1/2}(\Gamma_i)$. Обозначим также

$$W^{1/2}_{\Gamma,B} = \sum_{i \in I_B} \oplus V_i^{1/2}; \qquad W^{1/2}_{\Gamma,W} = \sum_{i \in I_W} \oplus V_i^{1/2}.$$

Пусть $u \in V$ - решение исходной задачи IN, тогда существует единственный след $\gamma_I u$ на Γ_I этой функции и справедливы представления

$$\gamma_I u = \sum_{i \in I_B} \oplus \gamma_i u \in W_{\Gamma,B},$$

$$\gamma_I u = \sum_{i \in I_W} \oplus \gamma_i u \in W_{\Gamma,W}.$$

Операторы Пуанкаре - Стеклова для лапласиана в Ω_i обозначим через $S_{\Delta,i}$ и, соответственно, $S^{-1}_{\Delta,i} : V_i^{1/2} \to V_i^{-1/2}$. Отмечаем, что

$$\mathrm{Ker}\, S^{-1}_{\Delta,i} = \{u \in V_i^{1/2} : u = \mathrm{const}\}.$$

В силу формулы Грина имеем

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 dx = -\int_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} u\, ds = \langle S^{-1}_{i,\Delta} u, u \rangle,$$

откуда для $i = \overline{0,M}$ получаем

$$r_i(\nabla u) = \left[\frac{1}{g_i} \langle S^{-1}_{i,\Delta} u_i, u_i \rangle\right]^{1/2}, \quad u_i = \gamma_i u, \qquad /2.1/$$

т.е. константы $\mu_i(u) = \mu(r_i(\nabla u))$, $i = \overline{1,M}$ выражаются только через значения компонент $\gamma_i u \in V_i^{1/2}$. Пусть для $u \in V$ определены константы $\mu_i(u)$ согласно /2.1/. Тогда определим диагональные операторы $M_B = \sum_{i \in I_B} \oplus \mu_i E_i$ и $M_W = \sum_{i \in I_W} \oplus \mu_i E_i$, где

E_i - тождественные операторы на $V_i^{1/2}$, а также операторы

$$S^{-1}_{B,\Delta} = \sum_{i \in I_B} \oplus S^{-1}_{i,\Delta},\ S^{-1}_{W,\Delta} = \sum_{i \in I_W} \oplus S^{-1}_{i,\Delta};\ S_B^{-1} = M_B \cdot S^{-1}_{B,\Delta},\ S_W^{-1} = M_W \cdot S^{-1}_{W,\Delta}.$$

В силу определения пространств $W^{1/2}_{\Gamma,B}$ и $W^{1/2}_{\Gamma,W}$ всякую функцию $u \in W^{1/2}_{\Gamma,B}$ можно считать и элементом $W^{1/2}_{\Gamma,W}$, если подействовать

на нее некоторым оператором перестановки T, таким, что $TT^* = E$, $T: W^{1/2}_{\Gamma,B} \to W^{1/2}_{\Gamma,W}$, и определяемым в соответствии с блочным представлением элементов на Γ_i: $u_i = \gamma_i u = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i, u_4^i\}$, где четыре компоненты соответствуют четырем сторонам прямоугольника Ω_i и одновременно являются компонентами четырех прилегающих к Ω_i прямоугольников. Теперь определим норму в пространстве $W^{1/2}_{\Gamma,B}$ /и аналогично в $W^{1/2}_{\Gamma,W}$ / по формулам

$$\|u\|^2_{W^{1/2}_{\Gamma,B}} = \sum_{i \in I_B} \|u_i\|^2_{V_i^{1/2}} + \sum_{i \in I_W} \|(Tu)_i\|^2_{V_i^{1/2}},$$

$$\|v\|^2_{W^{1/2}_{\Gamma,W}} = \sum_{i \in I_B} \|(T^* v)_i\|_{V_i^{1/2}} + \sum_{i \in I_W} \|v_i\|_{V_i^{1/2}}. \qquad /2.2/$$

Таким образом, оператор T устанавливает взаимно однозначное соответствие между $W^{1/2}_{\Gamma,B}$ и $W^{1/2}_{\Gamma,W}$, а операторы S_B^{-1} и S_W^{-1} действуют как

$$S_B^{-1} : W^{1/2}_{\Gamma,B} \to W^{-1/2}_{\Gamma,B} = \sum_{i \in I_B} \oplus V_i^{-1/2},$$

$$S_W^{-1} : W^{1/2}_{\Gamma,W} \to W^{-1/2}_{\Gamma,W} = \sum_{i \in I_W} \oplus V_i^{-1/2}. \qquad /2.3/$$

Поэтому если $u \in V$ есть решение задачи IN, то функция $u_\Gamma = \gamma_I u$, определенная на Γ_I, удовлетворяет уравнению /в смысле равенства в $W^{-1/2}_{B,\Gamma}$ /

$$A_I u_\Gamma \equiv M_B \cdot S^{-1}_{B,\Delta} u_\Gamma + T^* M_W S^{-1}_{W,\Delta} T u_\Gamma = \Psi, \qquad /2.4/$$

где функция $\Psi \in \tilde{W}^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_\mu)$ определена ранее. Предполагается, что $\Gamma_\mu \in \Gamma_I$. Уравнение /2.4/ есть уравнение разделения области для задачи IN при использовании подобластей Ω_B и Ω_W, состоящих из клеток, имеющих внутренние точки пересечения границ. Структура нелинейности оператора A_I определяется диагональными множителями M_B и M_W с использованием формулы /2.1/.

Рассмотрим методы решения уравнения /2.4/, предварительно изучив функциональные свойства оператора $A_I = A_1 + A_2$. Пусть сначала константы $\mu_i > 0$, $i = \overline{0,M}$, определяющие оператор A_I в /2.4/, не зависят от u_Γ, т.е. $\bar{\mu}_0 = (\mu_0, \dots, \mu_M)^T$ - фиксированный вектор. Обозначим соответствующий линейный оператор через $A(\bar{\mu}_0)$, $X = W^{1/2}_{\Gamma,B}$, $X^* = W^{-1/2}_{\Gamma,B}$.

Лемма 7. Оператор $A(\bar{\mu}_0) \in \mathfrak{L}(X \to X^*)$ симметричен и положительно определен. Если определить эквивалентные нормы

$$\|u\|^2_X = (M_B(\bar\mu_o)S^{-1}_{\Delta,B}u,u) + (M_W(\bar\mu_o)S^{-1}_{\Delta,W}Tu,Tu), \qquad /2.5/$$

$$\|v\|^2_{X^*} = (A(\bar\mu_o)^{-1}v,v),$$

то $A(\bar\mu_o)$ является дуализирующим отображением этих пространств, т.е. обладает свойством

$$(A(\bar\mu_o)u,u) = \|u\|^2_X = \|A(\mu_o)u\|^2_{X^*}.$$

Доказательство. Операторы $S^{-1}_{\Delta,B}$ и $S^{-1}_{\Delta,W}$ симметричны и перестановочны с операторами M_B и M_W, откуда следует симметричность операторов A_1 и A_2. Далее

$$(A_1+A_2u,u) = \sum_{i\in I_B\cup I_W=I}\mu_i(S^{-1}_{i,\Delta}u_i,u_i) \ge m_1\sum_{\in I}(S^{-1}_{i,\Delta}u_i,u_i) =$$

$$= m_1\int_\Omega|\nabla\bar u|^2dx \ge c\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} = c\sum_{i\in I}\|\bar u_i\|^2_{W^1_2(\Omega_i)} \ge \qquad /2.6/$$

$$\ge c\Big(\sum_{i\in I_B}\|u_i\|^2_{V_i^{1/2}} + \sum_{i\in I_W}\|(Tu)_i\|^2_{V_i^{1/2}}\Big) = c\|u\|^2_X,$$

где использовали эквивалентность $\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}$ и $\|(\nabla u)\|_{L_2(\Omega)}$, а также известную оценку для следов функций из $W^1_2(\Omega_i)$ на липшицевых кривых либо поверхностях[12]:

$$\|\gamma_o u\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_i)} \le c\|u\|_{W^1_2(\Omega_i)}.$$

Из неравенства /2.6/ следует положительная определенность $A(\bar\mu_o)$, а аналогичная п./в/ леммы 2 оценка сверху устанавливает ограниченность $A(\bar\mu_o)$. Последнее утверждение леммы следует из неравенства /2.6/ и определения дуализирующего отображения[9].

Рассмотрим нелинейный случай.

Лемма 8. а/ Оператор $A_I\in(X\to X^*)$ при условиях /б/-/г/ леммы 2 сильно монотонен с константой m_1, липшиц-непрерывен с константой $3M$, потенциален и имеет производную Гато, являющуюся симметрическим и положительно определенным оператором.

б/ Для всякой функции $\Psi\in X^*$ существует единственное решение $u_\Gamma\in X$ уравнения /2.4/, совпадающее со следом $\gamma_{\Gamma_I}u$ на Γ_I обобщенного решения уравнения /1.10/.

Свойства пункта /а/ следуют из соответствующих свойств оператора A_{IN}. Имеем, например,

$$(A_\Gamma u - A_\Gamma v, u-v) = \sum_{i\in I}(\mu_i(u_i)S^{-1}_{i,\Delta}u_i -$$

$$-\mu_i(v_i)S^{-1}_{i,\Delta}v_i, u_i-v_i) = \sum_{i\in I}(A_{IN}(u)T\gamma^{-1}_{o,i}u_i - \qquad /2.7/$$

$$-A_{IN}(v)T\gamma^{-1}_{o,i}v_i, \gamma^{-1}_{o,i}(u-v) \ge m_1\sum_{i\in I}\|\gamma^{-1}_{o,i}(u_i-v_i)\|^2_{W^1_2(\Omega_i)} \ge$$

$$\ge c\|u-v\|^2_X,$$

подобно оценке /2.6/. Липшиц-непрерывность получается из аналогичного свойства оператора A_{IN}. Свойства производной Гато следуют из свойств оператора $A'_{IN}(y)$, $y\in X$, и представления

$$(A'_I(y)\ z,v) = \sum_{i\in I}\langle A'_{IN}(y)\gamma^{-1}_{o,i}z_i, \gamma^{-1}_{o,i}v_i\rangle = \langle A'_{IN}(y)\bar z,\bar v\rangle,$$

вытекающего из /2.7/. Пункт /б/ следует из утверждений пункта /а/ и вывода уравнения /2.4/.

Леммы 7,8 позволяют сформулировать условия сходимости ньютоновских и градиентных методов решения уравнения /2.4/, а также методов типа простых итераций с переобуславливателем. Остановимся на последней группе методов. Используя теорему 4, 5[9], легко доказывается

Теорема 4. Пусть $\bar\mu_o\in R^{M+1}$ - произвольный вектор с положительными компонентами и выполнены неравенства

$$(A_Iu - A_Iv, u-v) \ge m_o(A(\bar\mu_o)(u-v), u-v),$$

$$\|A_Iu - A_Iv\|^2_{X^*} \le M_o^2(A(\bar\mu_o)(u-v), u-v),\ u,v\in X. \qquad /2.8/$$

Тогда при $\tau\in(0,2M_o^{-1})$ итерационный процесс

$$A(\bar\mu_o)\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} = -A_Iu_n + \Psi;\ n=1,2,\ldots \qquad /2.9/$$

сходится к решению u_Γ уравнения /2.4/ со скоростью

$$\|u_n - u_\Gamma\| \le \frac{\tau q^n(\tau)}{1-q(\tau)} \|A_\Gamma u_0 - \Psi\|_{X^*}, \quad q = \max\{1-\tau m_0, 1-\tau M_0\},$$

для любого $u_0 \in X$.

Отметим, что при $\tau = 2(M_0 + m_0)^{-1}$ получаем $q(\tau) = (M_0-m_0)(M_0+m_0)^{-1}$.

Замечание. Относительно метода Ньютона справедливо утверждение, полностью аналогичное теореме 7 из [1]. При исследовании градиентных методов можно применить теорему 4.2 [9].

Эффективная реализация метода /2.9/, так же как ньютоновских и градиентных методов, зависит от возможности экономичного обращения линейного оператора $A(\bar\mu_0)$. Поэтому далее рассмотрим проблему построения легко обратимых переобуславливателей B для оператора типа $A(\bar\mu_0)$, т.е. таких симметричных линейных операторов $B > 0$, что

$$c_2(Bu,u) \ge (A(\bar\mu_0)u,u) \ge c_1(Bu,u), \quad u \in X, \qquad /2.10/$$

где константы $c_2, c_1 > 0$ "слабо" зависят, либо вовсе не зависят от элемента u. Но прежде сформулируем конечномерную аппроксимацию уравнения /2.4/ по методу Галеркина и установим для нее сходимость алгоритмов типа /2.9/. Для аппроксимации /2.4/ можно также использовать схемы МКР.

Пусть $X_n \subset X$ - линейное подпространство в X с нормой, индуцированной из X, $h_1, \dots, h_n$ - полная линейно независимая система базисных функций в X_n. Обозначим через $I_n \in (X_n \to X)$ оператор вложения X_n в X и через $I_n^* \in (X^* \to X_n^*)$ - сопряженный к I_n оператор. Рассмотрим систему уравнений для галеркинского решения $u_n \in X_n$:

$$\langle A_I u_n, h_i \rangle = \langle \Psi, h_i \rangle, \quad i = \overline{1,n}, \qquad /2.11/$$

которое можно записать как операторное уравнение в X_n [9]:

$$A_n u_n = \Psi_n; \; A_n = I_n^* A_I I_n \in (X_n \to X_n^*), \; \Psi_n = I_n^* \Psi \in X_n^*. \qquad /2.12/$$

Согласно лемме 1.4 [9] свойства оператора A_I переносятся на A_n в силу равенства $\|I_n u_n\| = \|u_n\|$. Из теоремы 3.3 [9] следует

Лемма 9. При условиях /б/-/в/ леммы 2 уравнение /2.12/ имеет единственное решение, для которого справедлива оценка

$$\|u_n - u_\Gamma\|_X \le \frac{3M}{m_1} \inf_{v \in X_n} \|v - u_\Gamma\|_X. \qquad /2.13/$$

Применяя теорему 4.6 [9], приходим к утверждению /эквивалентная норма в X_n и X_n^* определяется через оператор $I_n^* A(\bar\mu_0) I_n$ аналогично /2.5//.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для $\tau \in (0, 2M_0^{-1})$ итерационный процесс

$$A_n(\bar\mu_0)\frac{u_{n,i} - u_{n,i-1}}{\tau} = -A_n u_{n,i-1} + \Psi_n, \qquad /2.14/$$

$$A_n(\bar\mu_0) = I_n^* A(\bar\mu_0) I_n, \quad i = 1,2,\dots$$

сходится в X к решению u_n уравнения /2.12/ со скоростью

$$\|u_{n,i} - u_n\|_X \le \frac{\tau q^i}{1-q} \|A_I u_{n,0} - \Psi\|_{X^*}, \quad q = \max\{1-\tau m_0, 1-\tau M_0\},$$

от любого начального приближения $u_{n,0} \in X_n$.

При решении уравнения /2.12/ на подпространстве X_n оценку /2.10/ также следует рассматривать лишь для $u \in X_n$, причем константы c_1, c_2 должны "слабо" зависеть от размерности n подпространства X_n. Более подробно вопросы выбора пространств X_n для используемого разбиения на подобласти Ω_i, $i = \overline{0,M}$, в двумерном и трехмерном случае рассмотрим в следующей работе. Здесь приведем лишь один простой пример. Обозначим внутренние вершины подобластей Ω_i через g_k, $k = \overline{1,M_I}$, $g_k \notin \Gamma$. Будем рассматривать области Ω_i /прямоугольники либо параллелепипеды/ как стандартные конечные элементы первого порядка серендипова семейства с узлами в вершинах g_k. Если через V_n обозначить пространство соответствующих серендиповых базисных функций, то следы этих базисных функций на внутренних границах Γ_I образуют базис h_i интересующего нас подпространства X_n. В двумерном случае $X_n \equiv L_{n,2}$ - множество линейных на каждой из четырех сторон прямоугольника Ω_i функций, непрерывных на Γ_I. В трехмерном случае функции из $X_n \equiv L_{n,3}$ линейны на ребрах областей Ω_i и билинейны на всех гранях. Размерность пространства $L_{n,2}$ и $L_{n,3}$ равна M_I. Пусть u_{M_I} есть решение задачи /2.12/. Тогда для вектора $\bar c = (c_1, \dots, c_{M_I})^T \in R^{M_I}$, где $u_{M_I} = \sum_{i=1}^{M_I} c_i h_i$, уравнение /2.12/ превращается в нелинейную алгебраическую систему уравнений, совпадающую с конечно-элементной системой для уравнения в форме /1.20/, полученной на основе метода Галеркина для построенного семейства серендиповых базисных функций. Это следует из соотношения

$$\langle A_I u_n, h_i \rangle = \sum_{p=o}^{M} A_k(\bar{u}_n, \bar{h}_i) \qquad /2.15/$$

$$u_n, h_i \in X_n, \quad \bar{u}_n, \bar{h}_i \in V_n, \quad \gamma_{o,\Gamma_I} \bar{u}_n = u_n, \quad \gamma_{o,\Gamma_I} \bar{h}_i = h_i,$$

вытекающего из того, что рассмотренные базисные функции являются гармоническими внутри каждой области Ω_i.

Таким образом, простейшие аппроксимации уравнения /2.11/ /в этом случае предполагаем, что d порядка h / могут совпадать с соответствующими дискретизованными уравнениями для задачи /1.20/.

Отметим, что операторы A_I и $A_{I,n}$ имеют блочную пятидиагональную структуру в двумерном случае и семидиагональную структуру в трехмерном случае, если к одному блоку отнести неизвестные, определенные на Γ_i, $i = \overline{1,M}$.

Легко видеть, что все результаты из § 2 справедливы для произвольного разбиения, топологически эквивалентного "шахматному", т.е. получающемуся из него при помощи взаимно однозначного отображения класса C^1. В двумерном случае требуется, чтобы каждая внутренняя вершина была общей для четырех подобластей, а в трехмерном - для восьми. Границы подобластей Ω_i должны быть липшицевыми. Результаты справедливы и для разбиений более общего вида, когда внутренняя вершина является общей для четного числа /не менее четырех/ подобластей /4/.

В следующей работе рассмотрим переобуславливатели для оператора A_I и его дискретных аналогов $A_{I,n}$, а также изучим вопросы оптимизации размерности массивов, необходимых для решения проблемы /2.12/.

Автор выражает благодарность проф. Е.П.Жидкову за внимание к работе, а также С.Димовой и Г.Е.Мазуркевичу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ, Р11-87-501, Дубна, 1987.
2. Christie I., Griffiths D.F., Mitchell A.R., Sandz-Serna J.M. - IMA J. Numer. Anal., 1981, 1, p.253-266.
3. Fletcher C.A.J. - Comput.Meth.Appl.Mech. Engrg., 1983, 37, p.225-243.
4. Dryja M., Proskurowski W., Widlund O. In: Proc. of the Int. Symp. on Optimal Algorithms, Blagoevgrad, Bulgaria, 1986, p.15.

5. Bramble J.H., Pasciak J.E., Schatz A.H. - Math. Comp., 1986, v.47, No.175, p.103-134; 1987, v.49, No.179, p.1-16.
6. Агошков В.И., Лебедев В.И. В кн.: Вычислительные процессы и системы. Вып.2, М.: Наука, 1985, с.173-227.
7. Лебедев В.И. Метод композиции. М.: ОВМ АН СССР, 1986,
8. Кузнецов С.Б. Препринт ВЦ СО АН СССР, №111, Новосибирск, 1984.
9. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
11. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
12. Яковлев Г.Н. - Матем. сборник, 1967, 74/116/, №4, с.526-543.
13. Zhidkov E.P., Khoromsky B.N. - SJNAMM, Noth. Holland, Antverpen, 1988, No.6, p.463-488.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июля 1988 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Хоромский Б.Н. P11-88-480
Краевые задачи магнитостатики в неполно-нелинейной постановке и методы их решения
Исследование нелинейной проблемы

Предлагается неполно-нелинейная постановка уравнений магнитостатики для скалярного потенциала. Область нелинейности разбивается на конечное число подобластей, в каждой из которых полагаем значение магнитной проницаемости равным константе, подлежащей определению и зависящей нелинейно от среднего значения градиента решения в данной подобласти. Получена оценка погрешности такой модели по отношению к исходному уравнению Максвелла для скалярного потенциала. Изучены функциональные свойства нелинейного оператора. Построено уравнение разделения области, определенное лишь на внутренних границах подобластей. Рассмотрены итерационные процессы решения уравнений в неполно-нелинейной постановке, а также их дискретных аналогов, полученных на основе метода Галеркина. Рассмотренная математическая модель наиболее эффективна при использовании на параллельных ЭВМ, так как каждый шаг итерационного процесса сводится к независимому решению задач в подобластях.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод автора

Khoromsky B.N. P11-88-480
Magnetostatics Boundary Value Problems in Incomplete-Nonlinear Formulation and Methods for Their Solution.
Investigation of Nonlinear Problem

Incomplete-nonlinear formulation of the magnetostatic equations for the scale potential is presented. The domain of non-linearity is partitioned into a finite number of subdomains with the quantity of magnetic permeance fixed constant in each of subdomains. These constants depend on the average value of solution gradient in substructures. The estimations of accuracy for this model in comparison with the Maxwell equation is presented. The functional characteristics of nonlinear operator is studied. The equation of domain decomposition defined only on the internal boundaries of subregions is developed. The iteration processes for solving equations in the incomplete-nonlinear formulation and their discrete analogues based on the Galerkin method are proposed. This mathematical model is well suited for parallel computing environments, since every step of the iteration process consists of independent solution of problems in subdomains.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. (2 тома)	7 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р. 00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р. 80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике Алушта, 1986.	4 р. 50 к.
—	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. (2 тома)	13 р. 50 к.
Д1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. (2 тома)	7 р. 35 к.
Д9-87-105	Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1986. (2 тома)	13 р. 45 к.
Д7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна, 1986.	7 р. 10 к.
Д2-87-123	Труды Совещания "Ренормгруппа - 86". Дубна, 1986.	4 р. 45 к.
Д4-87-692	Труды Международного совещания по теории малочастичных и кварк-адронных систем. Дубна, 1987.	4 р. 30 к.
Д2-87-798	Труды VIII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1987.	3 р. 55 к.
Д14-87-799	Труды II Международного симпозиума по проблемам взаимодействия мюонов и пионов с веществом. Дубна, 1987	4 р. 20 к.
Д17-88-95	Труды IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1987.	5 р. 20 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.