

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

Д 465

P11-88-473 e

С.Н.Димова, М.С.Касчиев, С.П.Курдюмов*

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ГОРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ.
ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ЭКСПЕРИМЕНТЫ**

Направлено в "Журнал вычислительной
математики и математической физики"

* Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша
АН СССР, Москва

1988

Рассматриваемая нелинейная краевая задача возникает при исследовании неограниченных автомодельных решений задачи Коши для уравнения теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности и источник тепла являются степенными функциями температуры. Решения краевой задачи определяют типы структур и волн, которые могут быть возбуждены в соответствующей нелинейной диссипативной среде. Эти решения принято называть [1] собственными функциями (СФ) горения нелинейной среды.*

Исследования СФ в одномерном и многомерном случаях посвящены работы [1]–[15]. Оно проводилось на основе вычислительного эксперимента в сочетании с аналитическими и качественными методами [2]: локальный анализ, асимптотический анализ, линеаризация нелинейного уравнения около гомотермического или фундаментального решения [8]–[14]. При дискретизации нелинейной краевой задачи использовался метод конечных разностей. Для решения нелинейной системы разностных уравнений применялись различные итерационные методы, в том числе метод Ньютона и его модификации [11], [14], и метод стрельбы [1], [8].

В этой работе разрабатывается иной подход к вычислению СФ горения нелинейной среды как в одномерном, так и в двумерном случаях. Он основан на использовании непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) [16], [17] с последующим решением уравнения НАМН методом конечных элементов (МКЭ) [25]. Такой подход ранее использовался при решении двумерных полулинейных [18] и нелинейных [19], [20] задач. Например, в работе [19] решалась задача двух центров в рамках уравнений Янга–Миллса, а в [20] – задача теории конденсированных сред.

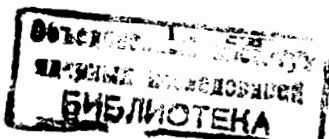
1. Постановка задачи

При исследовании пространственно-временной структуры и условий возникновения неограниченных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности с источником

$$U_t = \sum_{i=1}^N (U^{\beta_i} U_{x_i})_{x_i} + U^{\beta}, \quad t > 0, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N, \quad (1)$$

$$U(0, x) = U_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N, \quad U_0^{\beta+1} \in C^1(R^N) \quad (2)$$

*Об использованной терминологии и для ознакомления с результатами в этой области см. монографию [2] и ссылки в ней.



особо важную роль играет анализ частных автомодельных решений. Известно [2], [3], что при любых $\sigma_i > 0$ и $\beta > 1$ уравнение (1) имеет неограниченные автомодельные решения следующего вида:

$$u_A(t, x) = \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\beta-1} \theta(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N), \quad (3)$$

$$\xi_i = x_i / \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{m_i}, \quad m_i = (\beta - \sigma_i - 1) / 2(\beta - 1), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь $T_0 > 0$ - время существования решения u_A . Функция $\theta(\xi) \geq 0$ удовлетворяет в R^N эллиптическому уравнению

$$\sum_{i=1}^N \left[-(\theta^{\sigma_i} \theta_{\xi_i})_{\xi_i} + \frac{m_i}{T_0} \xi_i \theta_{\xi_i} \right] + \frac{1}{(\beta-1)T_0} \theta - \theta^\beta = 0. \quad (4)$$

Помимо других решений это уравнение имеет пространственно-однородное решение

$$\theta(\xi) \equiv \theta_0 = (T_0(\beta-1))^{-\frac{1}{\beta-1}}.$$

Без ограничения общности [1] выбираем

$$T_0 = \frac{1}{(\beta-1)}, \quad (5)$$

и тогда $\theta_0 \equiv 1$.

Мы ограничиваемся анализом изотропных ($\sigma_i = \sigma$, $i = 1, 2, 3$) радиально-симметричных автомодельных решений, зависящих от одной пространственной переменной:

$$\xi = r / \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^m, \quad r = |x|. \quad (6)$$

С учетом (5), (6) уравнение (4) принимает вид

$$\Delta \theta \equiv - \frac{1}{\xi^{N-1}} \left(\xi^{N-1} \theta^{\sigma} \theta' \right)' + \tilde{m} \xi \theta' + \theta - \theta^\beta = 0, \quad \xi > 0, \quad (7)$$

$$\tilde{m} = (\beta-1)m = (\beta-\sigma-1)/2, \quad N = 1, 2, 3.$$

Ищем решения (7), удовлетворяющие граничным условиям (2):

$$\theta'(0) = 0, \quad (8)$$

$$\theta(\infty) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (7) вырождается при $\theta = 0$, поэтому задача (7)-(9) имеет, вообще говоря, обобщенное решение; в точках вырождения нет

нужной гладкости. Так как тепловой поток $(-\xi^{N-1} \theta^{\sigma} \theta')$ должен быть непрерывным, то

$$\theta^{\sigma} \theta' = 0 \quad \text{всюду, где } \theta = 0.$$

Пространственно-временная структура автомодельных решений (3) существенно различна в следующих трех случаях: $1 < \beta < \sigma+1$ (NS - режим с обострением), $\beta = \sigma+1$ (S - режим с обострением), $\beta > \sigma+1$ (LS - режим с обострением). Она несет основную информацию об общих свойствах эволюции неограниченных решений уравнения (1). Частные решения (3) задачи (1), (2) и соответствующие решения задачи (7)-(9) называются собственными функциями горения нелинейной диссипативной среды, описываемой уравнением (1).

Перечислим некоторые известные результаты [2], [3]:

При любых $1 < \beta \leq \sigma+1$ и $N \geq 1$ существует финитное решение $\theta(\xi) \geq 0$ задачи (7)-(9). Если $\text{mes supp } \theta = \xi_0 > 0$, то $\theta(\xi) = 0$ при $\xi \geq \xi_0$, и из условий непрерывности $\theta^{\sigma} \theta'(\xi_0) = 0$. При $\beta < \sigma+1$, $N \geq 1$ и при $\beta = \sigma+1$, $N > 1$ задача (7)-(9) не имеет немонотонных решений. Единственность решения доказана только в случае $\beta < \sigma+1$, $N = 1$.

При $\beta > \sigma+1$, $N \geq 1$ задача (7)-(9) не имеет финитных обобщенных решений. Решение $\theta(\xi)$ имеет следующую асимптотику при $\xi \rightarrow \infty$:

$$\theta(\xi) = C \xi^{-\frac{2}{\beta-\sigma-1}} (1 + \nu(\xi)), \quad \nu(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Справедлива следующая теорема [2]:

а) Если $\sigma+1 < \beta < (\sigma+1)(N+2)/(N-2)^*$, то задача (7)-(9) имеет, по крайней мере, одно решение $\theta(\xi) > 0$ в R_+^N , которое строго монотонно убывает по ξ и имеет асимптотику (10).

б) При $N = 1$ задача (7)-(9) имеет не менее

$$M = -[a] - 1, \quad a = (\beta-1)/(\beta-\sigma-1) > 1$$

различных решений, отличающихся по числу точек экстремума при $\xi \in [0, \infty)$ (см. также [9], [10]).

На основе линейного анализа [10], [11] и некоторых численных результатов в работах [6], [8], [10], [11] было высказано предположение, что число различных решений задачи (7)-(9) при $\beta > \sigma+1$ и $N \geq 1$ равно $M+1$.

Опираясь на эти факты, при численном решении задачи (7)-(9) граничное условие (9) заменим условием

$$\theta(\ell) = 0, \quad \ell \gg 1, \quad \ell > \xi_0 \quad (11)$$

$$* (z)_+ = \max\{z, 0\}.$$

для СФ S- и NS- режимов и

$$\theta'(l) + p\theta(l)/l = 0, \quad p = 2/(\beta - \nu - 1) \quad (I2)$$

для LS- режима. Величина l в этом случае выбирается из условия выхода решения на асимптотику (I0). Условие (I2) легко следует из асимптотики.

Таким образом, сформулированы краевые задачи, решениями которых являются СФ горения нелинейной изотропной среды в плоском ($N=1$), радиально-симметричном ($N=2$) и сферически-симметричном ($N=3$) случае. Трудности численного решения заключаются в следующем:

- нелинейность задачи;
- вырождение уравнения (7) в случае $1 < \beta \leq \nu + 1$ и потеря гладкости решения в точке вырождения $\xi_0(\theta'/\xi)$ терпит разрыв в т. ξ_0);
- неединственность решения и бесконечный интервал интегрирования в случае $\beta > \nu + 1$.

Заметим, что нетривиальные решения этих задач не могут быть получены методом установления, так как они неустойчивы в этой постановке [2].

2. Метод численного решения

Решение нелинейных задач (7), (8), (II) и (7), (8), (I2) реализовано с использованием НАМН [I6], [I7]. Он относится к классу методов введения непрерывного параметра: сводящих исходную стационарную задачу к эволюционной.

2.1. Непрерывный аналог метода Ньютона

Введем непрерывный параметр $0 \leq t < \infty$, от которого зависит неизвестная функция $\theta(\xi, t)$. Запишем эволюционное уравнение НАМН, соответствующее уравнению $L(\theta) = 0$:

$$L'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = -L(\theta), \quad (I3)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi). \quad (I4)$$

Здесь $\theta_0(\xi)$ - заданная функция, удовлетворяющая граничным условиям (8), (II) для S- и NS- режимов и (8), (I2) для LS- режима. В работе [I7] показано, что при некоторых условиях на оператор $L(\theta)$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(\xi, t) = \theta^*(\xi),$$

где $\theta(\xi, t)$ - решение задачи (I3), (I4), а $\theta^*(\xi)$ - решение задач (7), (8), (II) или (7), (8), (I2).

Положим $v = \partial \theta / \partial t$. Применяя к задаче Коши (I3), (I4) метод Эйлера, получаем итерационную схему

$$L'(\theta_k) v_k = -L(\theta_k), \quad (I5)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \tau_k v_k, \quad 0 < \tau_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (I6)$$

$$\theta_k = \theta_k(\xi) = \theta(\xi, t_k), \quad v_k = v_k(\xi) = v(\xi, t_k),$$

$\theta_0(\xi)$ - начальное приближение.

При $\tau_k = 1$ она совпадает с классическим методом Ньютона-Канторовича, имеющим асимптотически квадратичную сходимость. При $\tau_k < 1$ скорость сходимости итерационного процесса (I5), (I6) линейная, но при этом существенно расширяется область допустимых значений начального приближения $\theta_0(\xi)$. С уменьшением нормы невязки $\delta_k = \|L(\theta_k)\|$ "временной шаг" τ_k стремится к 1.

В нашем случае уравнение (I5) принимает вид

$$-\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_k^\sigma v_k')' - \frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \sigma \theta_k^{\sigma-1} \theta_k' v_k')' + \tilde{m} \xi v_k' + (1 - \beta \theta_k^{\beta-1}) v_k = - \left[-\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_k^\sigma \theta_k')' + \tilde{m} \xi \theta_k' + \theta_k - \theta_k^\beta \right]. \quad (I7)$$

Итерационные поправки $v_k(\xi)$ удовлетворяют однородным граничным условиям

$$v_k'(0) = 0, \quad v_k'(l) = 0 \quad (I8)$$

для S- и NS- режимов,

$$v_k'(0) = 0, \quad v_k'(l) + p \frac{v_k(l)}{l} = 0 \quad (I9)$$

для LS- режима.

2.2. Слабая форма задачи

Дискретизация по МКЭ проводится на основе слабой формы задач (I7), (I8) и (I7), (I9):

Найти функцию $v_k(\xi) \in H^1(0, l)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(L'(\theta_k) v_k, w) = -(L(\theta_k), w), \quad \forall w \in H^1_2(0, l) \quad (20)$$

и граничным условиям (I8) или (I9), где $\theta_k(\xi)$ - заданная функция,

$$\theta_k \in D = \{ \theta(\xi) : \theta, \theta \sigma^{1/2} / d\xi \in L^2(0, l) \},$$

$$H^1_2(0, l) = \{ w : w, w' \in L^2(0, l), (1-\alpha)w(l) = 0 \}.$$

Значение $\alpha = 0$ отвечает условию (I8), а $\alpha = 1$ - условию (I9).

Скалярное произведение в (20) определяется

$$(v, w) = \int_0^l \xi^{N-1} v(\xi) w(\xi) d\xi.$$

Для задач (17), (18) и (17), (19) тождество (20) имеет вид (для удобства здесь и далее индекс "k" опущен)

$$\int_0^l \left\{ \xi^{N-1} a(\theta) v' w' + \xi^{N-1} q_1(\theta) v w' + m \xi^N v' w + \xi^{N-1} q_2(\theta) v w \right\} d\xi + \int_0^l (1+\sigma) p \xi^{N-2} \theta^{\sigma+1} v w / \xi = \int_0^l 2 p \xi^{N-2} \theta^{\sigma+1} w / \xi - \int_0^l \left\{ \xi^{N-1} a(\theta) \theta' w' + m \xi^N \theta' w + \xi^{N-1} q_3(\theta) \theta w \right\} d\xi, \quad \forall w \in H_2^1(0, l). \quad (21)$$

Функции a, q_1, q_2, q_3 определяются формулами

$$a(\theta) = \theta^\sigma, \quad q_1(\theta) = \sigma \theta^{\sigma-1} \theta', \quad q_2(\theta) = 1 - \beta \theta^{\beta-1}, \quad q_3(\theta) = 1 - \theta^{\beta-1}. \quad (22)$$

Аппроксимация (21) проводится на основе МКЭ.

2.3. Дискретизация по МКЭ

Для аппроксимации (21) используем изопараметрические квадратичные элементы [25].

Пусть $\{0 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = l, \xi_{i+1} - \xi_i \leq h\}$ - разбиение отрезка $[0, l]$ на элементы $e_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$, $S_h = \{w(\xi) \in C[0, l]; w|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]} \in P_2\}$, S_h - конечномерное пространство пробных функций, P_2 - множество полиномов второй степени. Аппроксимационные свойства функций из S_h определяются неравенствами [25]

$$\|I_h w - w\|_{L^2(0, l)} + h \|\nabla I_h w - \nabla w\|_{L^2(0, l)} \leq C h^3 \|w\|_{H^3}, \quad (23)$$

$$\|I_h w - w\|_{L^\infty[0, l]} \leq C h^3 \|w\|_{W_2^3[0, l]}.$$

Здесь $I_h w$ - интерполант функции w по базису $\{\varphi_i\}_{i=1}^{2n-1}$ пространства S_h ; $\varphi_j(\eta_i) = \delta_{ij}$, δ_{ij} - символ Кронекера; $\bar{\omega}_h = \{0 = \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{2n-1} = l, \eta_{2i-1} = \xi_i, i=1, \dots, n, \eta_{2i} = \xi_{i+1/2}, i=1, \dots, n-1\}$ - множество всех узлов сетки на отрезке $[0, l]$.

Разложим функции θ, v, w по базису $\{\varphi_i\}$:

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n-1} \bar{\theta}_i \varphi_i, \quad v = \sum_{i=1}^{2n-1} \bar{v}_i \varphi_i, \quad w = \sum_{i=1}^{2n-1} \bar{w}_i \varphi_i, \quad (24)$$

где $\bar{\theta}^T = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_{2n-1})$, $\bar{v}^T = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{2n-1})$, $\bar{w}^T = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{2n-1})$ - векторы значений соответствующих функций в узлах сетки $\bar{\omega}_h$.

Подставляя (24) в (21), для итерационных поправок \bar{v} получаем линейную систему сеточных уравнений

$$A(\theta) \bar{v} = -B(\theta) \bar{\theta}. \quad (25)$$

Матрицы A и B несимметричны и ленточны. Далее, пусть $a^{(m)} = \{a_{ij}^{(m)}\}$, $b^{(m)} = \{b_{ij}^{(m)}\}$ - локальные (3x3) - матрицы элемента $e^m = [\xi_m, \xi_{m+1}]$, так что

$$A = \sum_{m=1}^{n-1} a^{(m)}, \quad B = \sum_{m=1}^{n-1} b^{(m)}. \quad (26)$$

Используя функции формы

$$\psi_1(s) = -\frac{1}{2} s(1-s), \quad \psi_2(s) = 1-s^2, \quad \psi_3(s) = \frac{1}{2} s(1+s), \quad -1 \leq s \leq 1$$

канонического элемента $e = [-1, 1]$, для элементов a_{ij} и b_{ij} матриц $a^{(m)}$ и $b^{(m)}$ получаем

$$a_{ij}^{(m)} = \int_{-1}^1 \left\{ \xi^{N-1} \tilde{a}(\theta) \psi_i' \psi_j' / h_m^2 + \xi^{N-1} \tilde{q}_1(\theta) \psi_i \psi_j' / h_m + \tilde{m} \xi^N \psi_i' \psi_j / h_m + \xi^{N-1} \tilde{q}_2(\theta) \psi_i \psi_j \right\} h_m ds + (1+\sigma) p \xi^{N-2} \theta^\sigma \delta(\xi-l),$$

$$b_{ij}^{(m)} = \int_{-1}^1 \left\{ \xi^{N-1} \tilde{a}(\theta) \psi_i' \psi_j' / h_m^2 + \tilde{m} \xi^N \psi_i' \psi_j / h_m + \xi^{N-1} \tilde{q}_3(\theta) \psi_i \psi_j \right\} h_m ds - 2 p \xi^{N-2} \theta^{\sigma+1} \delta(\xi-l),$$

$$\xi = \xi_m + \frac{1}{2} (s+1) h_m, \quad h_m = \xi_{m+1} - \xi_m, \quad \bar{h}_m = h_m / 2,$$

$$\delta(\xi-l) = 0, \quad \xi \neq l, \quad \delta(\xi-l) = 1, \quad \xi = l.$$

Через $\tilde{a}(\theta), \tilde{q}_1(\theta), \tilde{q}_2(\theta), \tilde{q}_3(\theta)$ обозначены аппроксимации функций (22) в элементе e^m . Использованы два способа аппроксимации:

- стандартная аппроксимация по МКЭ:

$$\tilde{a}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^3 \theta_i^{(m)} \psi_i(s) \right)^\sigma,$$

$$\tilde{q}_2(\theta) = \sigma \left(\sum_{i=1}^3 \theta_i^{(m)} \psi_i(s) \right)^{\sigma-1} \left(\sum_{i=1}^3 \theta_i^{(m)} \psi_i'(s) / h_m \right) \quad (28)$$

и т.д.;

- интерполяция нелинейных коэффициентов (22) по базису $\{\psi_c\}_{c=1}^{2n-1}$ [21], [22]:

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \sum_{c=1}^3 (\theta_c^{(m)})^\sigma \psi_c(s), \quad (29)$$

$$\tilde{q}_1(\theta) = \sigma \sum_{c=1}^3 (\theta_c^{(m)})^{\sigma-1} \psi_c(s) \cdot \sum_{c=1}^3 \theta_c^{(m)} \psi_c'(s) / h_m$$

и т.д.

Замечание. Мы ищем неотрицательное решение $\theta(\xi)$ непрерывной задачи. Однако из-за аппроксимации $\theta(\xi)$ и из-за вычислительных погрешностей разностное решение может принимать отрицательные значения. Поэтому при составлении разностных уравнений (25)-(29) уравнение (7) заменено одним из нижеследующих:

$$-\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} |\theta|^\sigma \theta)' + \tilde{m} \xi \theta' + \theta - |\theta|^{\beta-1} \theta = 0 \quad (7')$$

или

$$-\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} [\max\{0, \theta\}]^\sigma \theta)' + \tilde{m} \xi \theta' + \theta - [\max\{0, \theta\}]^\beta = 0, \quad (7'')$$

которые тождественно совпадают с (7) при $\theta(\xi) \geq 0$.

2.4. Реализация итерационного процесса

Решение задачи (I5), (I6) включает в себя решение разностной системы (25), определение "ньютоновского" шага τ_k и задание начального приближения θ_0 .

Матрица A задачи (25), как уже отмечалось, является несимметричной и имеет ленточную структуру. На каждом итерационном шаге проводится разложение $A = LV$, где V - верхняя треугольная матрица, L - нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали. При реализации этого разложения в памяти ЭВМ хранятся верхний и нижний профили матрицы A . Существенно, что LV -разложение не увеличивает указанных профилей. Заметим, что разработанные программы могут быть использованы и в двумерном случае.

Шаг τ_k в (I6) определяется экстраполяционной формулой [24]:

$$\tau_k = \begin{cases} \min(1, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}), & \delta_k < \delta_{k-1}, \\ \max(\tau_0, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}), & \delta_k \geq \delta_{k-1}. \end{cases}$$

Здесь δ_k является некоторой нормой невязки $L(\theta_k)$. В расчетах

$$\delta_k = \max_{\eta \in \Omega_k} |B(\theta_k) \bar{\theta}_k|. \quad (30)$$

Значение τ_0 варьировалось от 0,01 до 0,1. Такой выбор τ_k при уменьшении δ_k обеспечивает стремление τ_k к 1, и скорость сходимости (I5), (I6) становится квадратичной.

Остановимся на выборе начальных приближений для S - и HS -режимов. Для S -режима при $N = 1$ известно точное решение [15]:

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{2(\sigma+1)}{(\sigma+2)} \cos^2 \frac{\pi \xi}{2 \xi_0^{(u)}} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, & \xi \leq \xi_0^{(u)}, \\ 0, & \xi \geq \xi_0^{(u)}, \end{cases} \quad (31)$$

где $\xi_0^{(u)} = \pi \sqrt{\sigma+1} / \sigma$. Кроме того, в работе [6] получены приближенные оценки для ξ_0 при $N = 2, 3$:

$$\xi_0^{(N)} \approx \pi \sqrt{\sigma+1 + 1.84(N-1)\sigma/\pi} / \sigma. \quad (32)$$

На основании этой информации начальные приближения для S -режима вычислялись

$$\theta_0(\xi) = \begin{cases} A^{(N)} \cos^2(\pi \xi / 2 \xi_0^{(N)}), & \xi \leq \xi_0^{(N)}, \\ 0, & \xi_0^{(N)} \leq \xi \leq \ell, \end{cases} \quad (33)$$

где $A^{(N)} \geq 1$ - константы. Как показывают расчеты, значение ξ_0 для HS -режима при $N = 1, 2, 3$ меньше соответствующего ξ_0 для S -режима при том же значении δ . Поэтому начальные приближения для HS -режима определялись по тем же формулам (32), (33).

Определение начальных приближений для LS -режима является более тонкой задачей, так как решение в этом случае неединственно и имеет более сложную структуру. В работе начальные приближения задаются тремя способами.

В работах [8], [11] получены приближенные решения задачи (7)-(9) на основе "сшивания" решений линеаризованного около гомотермического решения $\theta_0 = 1$ уравнения (7) с асимптотикой (10). Эти решения имеют вид

$$\tilde{\theta}(\xi) = \begin{cases} 1 + \alpha y(\xi), & 0 \leq \xi < \bar{\xi}_0, \\ c \xi^{-\rho}, & \bar{\xi}_0 \leq \xi \leq \ell. \end{cases} \quad (34)$$

Здесь $y(\xi)$ - решение линеаризованного уравнения, а параметры $\bar{\xi}_0$, α , c определяются из условий $\tilde{\theta}(\xi) \in C^2[0, \ell]$ (C^2 -приближения) или $\tilde{\theta}(\xi) \in C^1[0, \ell]$ (C^1 -приближения). В обоих случаях

$$\alpha = -1 / [y(\bar{\xi}_0) + \frac{\bar{\xi}_0}{\rho} y'(\bar{\xi}_0)], \quad (35)$$

$$c = \bar{\xi}_0^{\rho+1} y'(\bar{\xi}_0) / [y(\bar{\xi}_0) + \frac{\bar{\xi}_0}{\rho} y'(\bar{\xi}_0)] / \rho,$$

где

$$y(\xi) = F(-(\beta-1)/(\beta-\sigma-1), N/2, (\beta-\sigma-1)\xi^2/4),$$

$F(-a, b, z)$ - вырожденная гипергеометрическая функция.

Для C^2 -приближений точка $\bar{\xi}_0$ является корнем уравнения

$$(p+1)y'(\xi)/\xi + y''(\xi) = 0, \quad (36)$$

а для C^1 -приближений $-y(\xi) = 0$.

Известно, что уравнение $y(\xi) = 0$ имеет $M+1 = -\left[-\frac{\beta-1}{\beta-\sigma-1}\right]$ различных корней, а уравнение (36) — M различных корней. Для каждого корня $\bar{\xi}_i$ из (34) и (35) получаем начальное приближение к соответствующей СФ задачи (7), (8), (12).

Третий вид начальных приближений использует только априорную информацию о поведении решения $y(\xi)$ линеаризованного уравнения. Приближение $\tilde{\theta}_{0i}(\xi)$ к i -той СФ имеет вид

$$\tilde{\theta}_{0i}(\xi) = \begin{cases} 1 + \frac{(-1)^{i-1}}{i+1} \cos(\pi\xi/2\bar{\xi}_i), & 0 \leq \xi \leq \bar{\xi}_i, \\ 1 + \frac{(-1)^{i-1}}{i+1} \sin(\pi\xi/\bar{\xi}_i), & \bar{\xi}_i \leq \xi \leq \bar{\xi}_i, \\ (\xi/\bar{\xi}_i)^{-p}, & \bar{\xi}_i < \xi \leq \ell, \end{cases} \quad (37)$$

где $\bar{\xi}_i$, $i = 1, 2, \dots, M+1$ — корни уравнения $y(\xi) = 0$.

3. Численные эксперименты и результаты

Основной целью численных экспериментов являлась проверка точности и эффективности предложенного подхода вычисления одномерных СФ ($N = 1, 2, 3$) горения нелинейной среды с заданными параметрами β и σ .

Сравнение численного решения S -режима при $N = 1$ с точным решением (31) и анализ результатов на последовательностях вложенных сеток для HS - и LS -режимов указывают на сверхсходимость МКЭ в узлах разбиения в той части области, где решение имеет необходимую гладкость (см. (23)). В этих узлах порядок сходимости, по-видимому, равняется четырем.

В таблице I приведены значения абсолютной погрешности $e(\bar{\xi}) = |\theta_h(\bar{\xi}) - \theta(\bar{\xi})|$, $\bar{\xi} \in \bar{\omega}_h$ для S -режима при $N = 1$, $\beta = \sigma + 1 = 3$ в разных точках 6 вложенных разбиений с шагами $h = 0,05$; $h = 0,1$; $h = 0,2$; $h = 0,4$; $h = 0,8$; $h = 1,6$. Отметим, что в этом случае $\bar{\xi}_0^{(1)} \approx 2,7207$ и, следовательно, в точке $\bar{\xi}_0^{(1)}$ производная $\theta'(\xi)$ терпит разрыв. Тем не менее, как видно из таблицы I, в окрестности этой точки точность вычислений остается достаточно высокой. В качестве начального приближения использовалась функция $\theta_0(\xi)$ из (33) с $A = 1$, $\bar{\xi}_0 = 3$, $\ell = 4,8$. В последних столбцах таблицы I приведены: число итераций, необходимых для достижения невязки $\delta_k \leq 10^{-6}$ (30), и использованное время (в секундах) на ЭВМ ЕС-1061.

Таблица I

$$\beta = \sigma + 1 = 3, N = 1 : |e(\bar{\xi})| = |\theta_h(\bar{\xi}) - \theta(\bar{\xi})|, \bar{\xi} \in \bar{\omega}_h, \delta = 10^{-6}$$

h	$\bar{\xi} = 0,0$	$\bar{\xi} = 0,8$	$\bar{\xi} = 1,6$	$\bar{\xi} = 2,4$	$\bar{\xi} = 2,7$	итер.	t (с)
1,6	$0,1077 \times 10^{-2}$	$0,5052 \times 10^{-2}$	$0,1394 \times 10^{-2}$	$0,4358 \times 10^{-1}$		23	0,16
0,8	$0,3539 \times 10^{-3}$	$0,3813 \times 10^{-3}$	$0,3469 \times 10^{-3}$	$0,9249 \times 10^{-2}$		23	1,1
0,4	$0,3058 \times 10^{-4}$	$0,2799 \times 10^{-4}$	$0,6701 \times 10^{-5}$	$0,9392 \times 10^{-3}$		31	2,5
0,2	$0,2269 \times 10^{-5}$	$0,1925 \times 10^{-5}$	$0,3499 \times 10^{-6}$	$0,7831 \times 10^{-4}$	$0,5833 \times 10^{-2}$	43	6,1
0,1	$0,8967 \times 10^{-8}$	$0,6180 \times 10^{-6}$	$0,2477 \times 10^{-6}$	$0,5971 \times 10^{-6}$	$0,1710 \times 10^{-2}$	45	13,1
0,05	$0,7462 \times 10^{-8}$	$0,1120 \times 10^{-7}$	$0,9304 \times 10^{-7}$	$0,3308 \times 10^{-6}$	$0,5861 \times 10^{-3}$	56	29,1

Таблица 2а

$\theta_1(\xi)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3(18)$, $N = 1$, $\delta = 10^{-6}$

h	$\bar{\xi} = 0,0$	$\bar{\xi} = 0,8$	$\bar{\xi} = 1,6$	$\bar{\xi} = 2,4$	$\bar{\xi} = 2,4$	$\bar{\xi} = 2,4$	итер.	t (с)
0,8	1,191209	1,069819	0,7431921	0,3214832			34	3,50
0,4	1,191105	1,069530	0,7425312	4,10	0,3225359	4,11	49	8,10
0,2	1,191095	1,069511	0,7424929	3,94	0,3225966	4,16	55	17,50
0,1	1,191095	1,069510	0,7424904		0,3226000		57	36,20

Таблица 2б

$\theta_2(\xi)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3(18)$, $N = 1$, $\delta = 10^{-6}$

h	$\bar{\xi} = 0$	$\bar{\xi} = 0,8$	$\bar{\xi} = 2,4$	$\bar{\xi} = 4,8$	итер.	t (с)	
0,8	0,7953555	0,9211291	1,140073	0,3302879	31	3,20	
0,4	0,7954623	0,9214588	1,139830	3,75	0,3296005	46	7,50
0,2	0,7954710	0,9214811	1,139812	4,17	0,3295319	56	17,90
0,1	0,7954715	0,9214825	1,139811		0,3295268	59	37,00

В таблицах 2а и 2б приведены значения первых двух СФ θ_1 и θ_2 для LS-режима при $\sigma = 2$, $\beta = 3(18)$, $N = 1$ в разных точках четырех вложенных разбиений с шагами $h = 0,1; 0,2; 0,4; 0,8$. Вычисленный по методу Рунге порядок точности вычислительных схем

$$\alpha = \rho n \frac{\theta_n - \theta_{n/2}}{\theta_{n/2} - \theta_{n/4}} / \rho n 2 \sim 4,$$

что подтверждает гипотезу о сверхсходимости МКЭ в этих точках. Отметим, что для линейных одномерных двухточечных краевых задач второго порядка в работе [23] доказана сверхсходимость МКЭ в точках разбиения при использовании непрерывных кусочно-полиномиальных пространств степени $r-1$:

$$S_h = \{w \in C[0,1], w|_{(\xi_i, \xi_{i+1})} \in P_{r-1}, w(0) = w(1) = 0\},$$

$$|e(\bar{\xi})| = |\theta_h(\bar{\xi}) - \theta(\bar{\xi})| \leq Ch^{2r-2} \|\theta\|_{H^r},$$

$$\bar{\xi} \in \{0 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = 1, \xi_{i+1} - \xi_i \leq h\}.$$

По-видимому, этот факт имеет место и в случае нелинейной задачи при использовании аппроксимаций (28), (29).

В двух последних столбцах таблиц 2а, 2б снова приведены число итераций для достижения невязки $\delta_k = 10^{-6}$ и время счета на машине ЕС-1061. В качестве начальных приближений выбирались C^2 -приближения (34)-(36).

На рис.1 представлены графики собственных функций S-режима ($\beta = \sigma + 1 = 3$) и HS-режима ($\beta = 2,75$, $\sigma = 2$) для $N = 1, 2, 3$.

В качестве начальных приближений выбирались функции (33) с $\hat{c} = 5$, с разными константами A и с носителями ξ_0 , большими, равными или меньшими приближенного носителя (32). Наблюдалось следующее. В случае $N=3$ при использовании начальных приближений с носителем, меньшим, чем носитель соответствующей СФ, итерационный процесс (15), (16) сходил к тривиальному решению $\theta \equiv 0$. В случае $N = 1, 2$ итерационный процесс сходил к СФ S- и HS-режимов независимо от величины носителя начального приближения. Для указанных значений β и σ получены следующие величины носителей СФ S- и HS-режимов при $N = 1, 2, 3$:

$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
$\xi_{0,S} \sim 2,72$	$\xi_{0,S} \sim 3,1$	$\xi_{0,S} \sim 3,46$
$\xi_{0,HS} \sim 2,25$	$\xi_{0,HS} \sim 2,6$	$\xi_{0,HS} \sim 3,1$

Отметим, что приближенные значения (32) для $\xi_{0,S}^{(N)}$ хорошо согласуются с численными результатами.

На рис.2,3,4 показаны все 4 СФ LS-режима при $\sigma = 2$, $\beta = 3$, (6) и $N = 1, 2, 3$ соответственно.

Многочисленные эксперименты, проведенные для различных значений параметров σ и β и $N = 1, 2, 3$, указывают на хорошую сходимость

S^N, N=1,2,3: Sigma=2, Beta=3
HS^N, N=1,2,3: Sigma=2, Beta=2.75

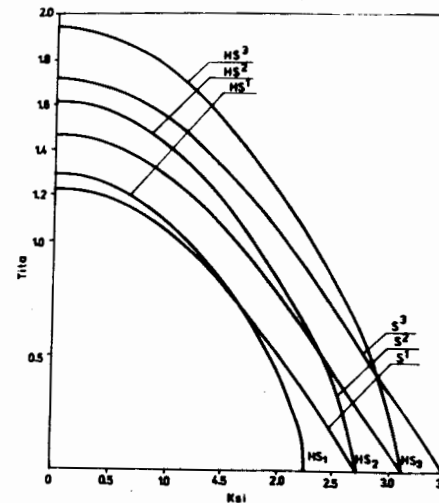


Рис.1

Рис.2

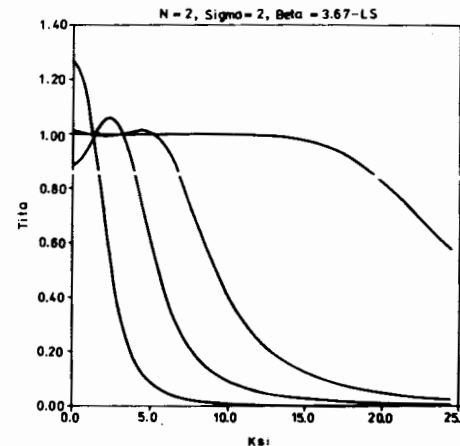
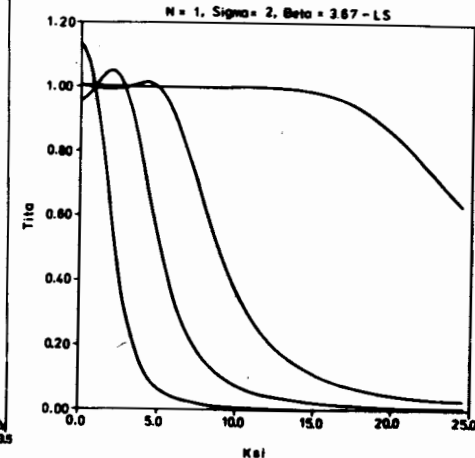


Рис.3

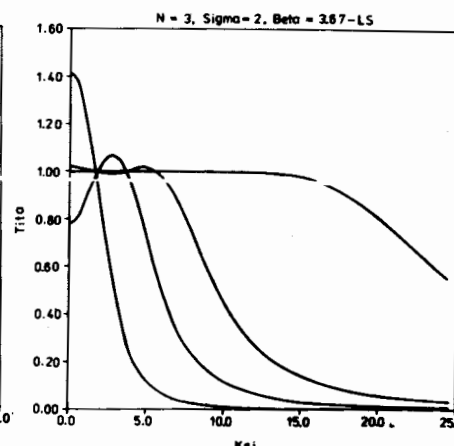


Рис.4

итерационного процесса (15), (16). В случае LS-режима она наблюдалась как при использовании C^2 - и C^4 -начальных приближений (34)-(36), так и при использовании приближений (37), в общем случае разрывных в точке сшива ξ_i , $i = 2, \dots, M+1$. Отметим следующие замеченные нами особенности:

- подтверждаются выводы работы [11], что итерационный процесс сходится быстрее, если в качестве начальных приближений использовать функции $\sqrt{\theta_i}$ вместо θ_i (34)-(36) (обычно число итераций уменьшается вдвое);

- когда $\beta \rightarrow \sigma+1$, $\beta > \sigma+1$, C^2 -и C^4 -приближения (34)-(36) для нескольких первых СФ принимают отрицательные значения в начале интервала $[0, l]$. В некоторых из этих случаев использование функций $\sqrt{|\xi|}$ в качестве начальных приближений обеспечивает сходимость итерационного процесса к соответствующим СФ, в других - нет. Но тогда хорошо работают приближения (37), которые всегда обеспечивают сходимость к этим СФ. Для СФ с большими номерами C^2 -и C^4 -приближения работают лучше, чем приближения (37).

Проведенное исследование позволило уточнить структуру СФ LS -режима. В работах [6], [11] утверждается, что качественный вид СФ не зависит от геометрии пространства и что во всех трех случаях ($N = 1, 2, 3$) величины максимумов увеличиваются с удалением от центра симметрии, так что самый большой максимум наиболее удален. Наши расчеты показывают следующее. При $N = 1$ величины максимумов всех СФ увеличиваются с удалением от центра симметрии, но при $\beta \rightarrow \sigma+1$ ($\beta > \sigma+1$) они выравниваются и стремятся к одной и той же величине, равной максимуму СФ S -режима (при том же значении σ). При $N = 2$ и $N = 3$ приведенное утверждение начинает нарушаться по мере приближения β к $\sigma+1$. Первый (центральный на оси $-\infty < \xi < \infty$) максимум СФ с нечетными номерами (σ_{2i+1} , $i = 1, 2, \dots$) становится больше нецентральных и при $\beta \rightarrow \sigma+1$ стремится к максимуму СФ S -режима для соответствующих значений σ и N . Дальнейшее уточнение структуры СФ LS -режима будет приведено в следующей работе.

4. Заключение

В работе предложен новый подход к вычислению СФ горения нелинейной диссипативной среды. Данный подход позволяет единообразно решать задачу во всех режимах горения в радиально-симметричном случае ($N = 1, 2, 3$) и автоматизировать процесс вычислений. Предложенные итерационные и вычислительные схемы легко обобщаются на случай многомерной задачи, в том числе и при наличии анизотропии.

Проведенное численное исследование в широком диапазоне изменения параметров и определения начальных приближений указывает на высокую точность предложенного метода и на надежность полученных результатов. Это обстоятельство позволяет уточнить структуру СФ LS -режима, исследовать интересные предельные случаи, когда $\beta \rightarrow \sigma+1$, $\beta > \sigma+1$ (стремление LS - к S -режиму) и $\sigma \rightarrow 0$ в S -режиме. Эти исследования будут также изложены в следующей работе.

Авторы глубоко благодарны В.А.Галактионову, Б.С.Куркиной, А.Б.Потапову, С.А.Посажкову за плодотворные дискуссии при выполнении этой работы, а также С.И.Сердюковой, сделавшей ряд ценных замечаний при прочтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИГиМатем. АН СССР, М., № 106, 1977.
2. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
3. Галактионов В.А. и др. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. Совр.пробл.матем. Новейшие достижения. Т.28. ВИНТИ АН СССР, М., 1986, 95-206.
4. Самарский А.А. и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур. ДАН СССР, 1977, 237, № 6, 1330-1333.
5. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде. ЖВМиМФ, 1983, т.23, № 2, с.38-900.
6. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами. Препринт ИГиМатем АН СССР, М., 1979, № 16.
7. Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. - В кн.: Современные проблемы матем.физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1983, с.217-243.
8. Курдюмов С.П. и др. Диссипативные структуры в нелинейной неоднородной горячей среде. ДАН СССР, 1980, т.251, № 3, с.587-591.
9. Адъятов М.М., Клопов Ю.А., Михайлов А.П. Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной. ДУ, 1983, т.19, № 7, с.1107-1114.
10. Адъятов М.М. Автомодельные обостряющиеся тепловые структуры в среде с распределенными параметрами. ДУ, 1986, т.22, № 11, с.1934-1944.
11. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б. Исследование многомерной архитектуры СФ нелинейной среды. Препринт ИГиМатем. АН СССР, М., 1982, № 75.
12. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Архитектура многомерных тепловых структур. - Докл.АН СССР, 1984, т.274, № 5, с.1072.
13. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. ЖВМиМФ, 1986, т.26, № 8, с.1189-1205.

14. Потапов А.Б. Построение двумерных собственных функций нелинейной среды. Препринт ИИМатем. АН СССР, М., 1986, № 8.
15. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. ДАН СССР, т.227, № 2, 321-324 (1976).
16. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Изв.ВУЗов, сер.Матем., 1958, № 5(6), с.18-31.
17. Хидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. ЭЧАЯ, 1973, 4, в.1, с.123-158.
18. R.E.Bank, D.J.Rose. Analysis of a multilevel iterative method for nonlinear finite element equations. Math.Comp., 39(1982), 453-465.
19. Касчиев М.С., Касчиева В.А., Махалдиани Н.В., Пузынин И.В. Численное решение нелинейной задачи двух центров в рамках уравнений Янга-Миллса. В сб.: Вариационно-разностные методы в математической физике. ОВМ АН СССР, М., 1984, 130-143.
20. Касчиева В.А., Касчиев М.С., Меньшиков Л.И., Пузынин И.В. Молекула из двух квантовых вихрей в двумерном бозе-газе. Численное исследование задачи. Результаты. Р5-87-232, Дубна, 1987.
21. L.Cermak, M.Zlamal. Transformation of dependent variables and the finite element solution of nonlinear evolution equations. Int.J. Numer.Meth.Eng., 15(1980), 31-40.
22. I.Christie, D.F.Griffiths, A.R.Mitchell, J.M.Sanz-Serna. Product approximation for nonlinear problems in the finite element method. IMA J. Numer. Anal., 1(1981), 153-266.
23. V.Thomée. Galerkin finite elements methods for parabolic problems. Lecture notes in math., 1054, Springer-Verlag, 1984.
24. Пузынин И.В. Пузынина Т.П. В сб.: Алгоритмы и программы решения некоторых задач физики. КТКИ-74-34, Budapest, с.93-III, 1974.
25. Стрэнг Г., Дж.Фикс. Теория метода конечных элементов. М., Мир, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1988 года.

Димова С.Н., Касчиев М.С., Курдюмов С.П. P11-88-473
Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды.
Численный метод и эксперименты

Разработан метод численного решения автомоделной краевой задачи, которая возникает при исследовании неограниченных решений задачи Коши для нелинейного уравнения теплопроводности с источником. Он основан на использовании непрерывного аналога метода Ньютона и метода конечных элементов. Этот подход позволяет единообразно решать задачу при различных значениях параметров нелинейной теплопроводной среды в радиально-симметричном случае и автоматизировать процесс вычислений. Численно исследована сходимость и точность предложенного метода.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Dimova S.N., Kaschiev M.S., Kurdyumov S.P. P11-88-473
Numerical Analysis of One-Dimensional Eigenfunctions of Nonlinear Medium Combustion. Numerical Method and Experiments

Numerical method for solving a self-similar nonlinear boundary-value problem is developed. This problem arises in analysis of the unbound solutions of Cauchy problem for nonlinear heat transfer equation. The proposed method is based on using the continuous analog of Newton's method and the finite element method. It allows one to solve the problem uniformly for different values of parameters of the nonlinear heat conducting medium in the radially symmetrical case, and to automatize the computational process. The convergence and accuracy of the developed method are analysed numerically.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988