объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-453е

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек

О МНОЖЕСТВАХ КОРРЕКТНЫХ УСКОРЕННЫХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛНОГО СПЕКТРА ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ ОБЩЕГО ВИДА

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1988

I. Введение

В работе [I] нами было предложено множество (ранее неизвестных) методов корректного вычисления полного спектра матриц общего трехдиагонального вида. Однако скорость сходимости этих методов (как и любых других известных в литературе, на которую имеются ссылки в [I]) существенно зависит от характера самого спектра. Обычно выполняют различные модификации итерационных методов с целью повышения их скорости сходимости.

В настоящей работе (учитывая исключительную важность этой процедуры при практическом решении спектральных задач на ЭВМ) мы выполняем соответствующие модификации для методов [I].

В [I] были получены следующие множества корректных алгоритмов для вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида[x)]:

$$\left[\overset{(1)}{C} = C\right] = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \tag{I.1}$$

$$(\overset{(1)}{C} - \lambda E)U = 0\ ; \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_{m-1}| > |\lambda_m| \geq 0 \tag{I.1$'$}$$

на основе метода d-смещений

$$\overset{(\widetilde{1})}{C} = \overset{(1)}{C} + dE. \tag{I.2}$$

I°. $\mathcal{M}(\Lambda, d)$ - множество методов на основе техники отношений верхних $\{\Lambda\}$ - главных угловых миноров.

I. (Λ-метод). Если $|\overset{(k+1)}{p_i}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \ldots,$ то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma_i}\, \overset{(k)}{\Lambda}{}_i^{-1}\ ; \quad \overset{(k)}{\Lambda}_1 = \overset{(k)}{\Lambda}_2 = 1\,, \quad \overset{(k)}{\Lambda}_{m+2} = 0\,, \quad i = 2, 3, \ldots, m. \\
\overset{(k+1)}{p_i} = \begin{cases} [\overset{(k)}{q}{}_i^2\, \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}(1 - \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1})]/r_i\,, & \text{если} \quad r_i \neq 0 \quad \overset{(k)}{p_i} \neq 0, \\ (\overset{(k)}{q_i} \cdot \overset{(k)}{p_i})/(\overset{(k)}{q}_{i-1}\, \overset{(k)}{\Lambda_i})\,, & \text{если} \quad r_i = 0 \quad \overset{(k)}{p_i} \neq 0 \\ 0\,, \quad \text{если} \quad r_i = 0 \quad \text{и} \quad \overset{(k)}{p_i} = 0\ ; & i = 2, 3, \ldots, m\,, \end{cases} \\
\overset{(k+1)}{q_i} = \begin{cases} \overset{(k)}{q_i}\, \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} + \overset{(k)}{q}_{i+1}(1 - \overset{(k)}{\Lambda}_{i+2})\,, & \text{если} \quad r_i \neq 0 \neq \overset{(k)}{p_i}, \\ \overset{(k)}{q_i} + \overset{(k)}{q}_{i+1}\, \overset{(k)}{\gamma}_{i+1}\,, & \text{если} \quad r_i = 0 \quad \text{и} \quad \overset{(k)}{p_i} \neq 0 \quad (\text{или} \quad \overset{(k)}{p_i} = 0); \\ \overset{(k)}{q}_{m+1} = 0\ ; & i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}
\end{array}\right\} \tag{I.3}$$

---

x) Напомним, что под корректностью мы понимаем [I] возможность осуществления до конца (без срывов) устойчивого вычислительного процесса, а под матрицами общего вида матрицы вида (I.1)+(I.1$'$), любые вещественные элементы и (или) главные угловые миноры которых могут быть как отличными от нуля, так и нулевыми.

$$\overset{(k)}{\lambda}_i = \overset{(k)}{q}_i \, \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda}_i = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i, & \text{если } d=0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda}_i - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i - d, & \text{если } d\neq 0; \quad i=1,2,\dots,m \end{cases} \tag{I.4}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \le \varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{q}_n,\ \overset{(k^*)}{\gamma}_n = 0,\ \overset{(k^*)}{\Lambda}_{n+1} = 1,\ \overset{(k^*)}{\lambda}_n = \overset{(k^*)}{q}_n \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k\ge k^* \tag{I.5}$$

2. (τ_Λ-метод). Если $|\overset{(k+1)}{P}_i| > \varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned} &\overset{(k)}{\tau}_i = \overset{(k)}{\gamma}_i / (1-\overset{(k)}{\tau}_{i-1}); \quad \overset{(k)}{\tau}_1 = 0 = \overset{(k)}{\tau}_{m+1}; \quad i=2,3,\dots,m. \\ &\overset{(k+1)}{P}_i = \begin{cases} [\overset{(k)}{q}_i (1-\overset{(k)}{\tau}_i)\cdot \overset{(k)}{\tau}_i]/z_i, & \text{если } z_i\neq 0 \quad \overset{(k)}{P}_i\neq 0, \\ (\overset{(k)}{q}_i \overset{(k)}{P}_i)/[\overset{(k)}{q}_{i-1}(1-\overset{(k)}{\tau}_{i-1})], & \text{если } z_i=0 \text{ и } \overset{(k)}{P}_i\neq 0, \\ 0, & \text{если } z_i = 0 \text{ и } \overset{(k)}{P}_i = 0; \quad i=2,3,\dots,m, \end{cases} \\ &\overset{(k+1)}{q}_i = \begin{cases} \overset{(k)}{q}_i (1-\overset{(k)}{\tau}_i) + \overset{(k)}{q}_{i+1} \overset{(k)}{\tau}_{i+1}; \quad \overset{(k)}{q}_{m+1} = 0, & \text{если } z_i\neq 0\neq \overset{(k)}{P}_i \\ \overset{(k)}{q}_i + \overset{(k)}{q}_{i+1} \overset{(k)}{\gamma}_{i+1}, & \text{если } z_i = 0 \text{ и } \overset{(k)}{P}_i\neq 0 \ (\text{или } \overset{(k)}{P}_i = 0); \\ \overset{(k)}{q}_{m+1} = 0; \quad i=1,2,\dots,m \end{cases} \end{aligned} \tag{I.6}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i, & \text{если } d=0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i - d, & \text{если } d\neq 0; \quad i=1,2,\dots,m. \end{cases} \tag{I.7}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \le \varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{q}_n,\ \overset{(k^*)}{\gamma}_n = 0,\ \overset{(k^*)}{\tau}_n = 0 \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k\ge k^*. \tag{I.8}$$

3. (T_Λ-метод). Если $|\overset{(k+1)}{T}_i| > \varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned} &\overset{(k+1)}{q}_i = (\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{T}_i) + \overset{(k)}{T}_{i+1}; \quad \overset{(k)}{T}_{m+1} = 0; \quad i=1,2,\dots,m \\ &\overset{(k+1)}{T}_i = \frac{(\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{T}_i)}{(\overset{(k+1)}{q}_{i-1} - \overset{(k+1)}{T}_{i-1})} \cdot \overset{(k)}{T}_i; \quad \overset{(k+1)}{T}_1 = 0; \quad i=2,3,\dots,m \\ &\lambda_i = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_i, & \text{если } d=0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_i - d, & \text{если } d\neq 0, \quad i=1,2,\dots,m \end{cases} \end{aligned} \tag{I.9}$$

Если $|\overset{(k^*)}{T}_{i^*}| \le \varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*+1)}{T}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{q}_n \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k\ge k^*, \text{ где} \tag{I.10}$$

$$\overset{(1)}{T}_i = (\overset{(1)}{P}_i z_i)/(\overset{(1)}{q}_{i-1} - \overset{(1)}{T}_{i-1}); \quad \overset{(1)}{T}_1 = 0 = \overset{(1)}{T}_{m+1}; \quad i=2,3,\dots,m. \tag{I.11}$$

4. ($(T-\lambda)_\Lambda$-метод). Если $|\overset{(k+1)}{P}_i| > \varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned} &\overset{(k)}{T}_i = (\overset{(k)}{P}_i z_i)/(\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{T}_{i-1}); \quad \overset{(k)}{T}_1 = \overset{(k)}{T}_{m+1} = 0; \quad i=2,3,\dots,m. \\ &\overset{(k)}{\lambda}_i = \overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{T}_i, \quad i=1,2,\dots,m \\ &\overset{(k+1)}{P}_i = (\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}) \cdot \overset{(k)}{P}_i; \quad i=2,3,\dots,m \\ &\overset{(k+1)}{q}_i = (\overset{(k)}{\lambda}_i + \overset{(k)}{q}_{i+1}) - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; \quad \overset{(k)}{q}_{m+1} = 0 = \overset{(k)}{\lambda}_{m+1}; \quad i=1,2,\dots,m \end{aligned} \tag{I.12}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda}_i, & \text{если } d=0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda}_i - d, & \text{если } d\neq 0; \quad i=1,2,\dots,m. \end{cases} \tag{I.13}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \le \varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{T}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\lambda}_n \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k\ge k^*. \tag{I.14}$$

5. (λ_Λ-метод). Если $|\overset{(k+1)}{P}_i| > \varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned} &\overset{(k)}{\lambda}_i = \overset{(k)}{q}_i - (\overset{(k)}{P}_i z_i)/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}; \quad \overset{(k)}{\lambda}_1 = \overset{(k)}{q}_1; \quad i=2,3,\dots,m. \\ &\overset{(k+1)}{P}_i = (\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}) \overset{(k)}{P}_i; \quad i=2,3,\dots,m, \\ &\overset{(k+1)}{q}_i = (\overset{(k)}{\lambda}_i + \overset{(k)}{q}_{i+1}) - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; \quad \overset{(k)}{q}_{m+1} = 0 = \overset{(k)}{\lambda}_{m+1}; \quad i=1,2,\dots,m \\ &\lambda_i = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda}_i, & \text{если } d=0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda}_i - d, & \text{если } d\neq 0; \quad i=1,2,\dots,m \end{cases} \end{aligned} \tag{I.15}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \le \varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\lambda}_n = \overset{(k^*)}{q}_n,\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\lambda}_n \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k\ge k^*. \tag{I.16}$$

П°. $\mathcal{M}(\sigma,d)$ -множество методов на основе техники отношений нижних $\{\sigma\}$ - главных угловых миноров.

1. (σ-метод). Если $|\overset{(k+1)}{P}_j| > \varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned} &\overset{(k)}{\sigma}_{j-1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma}_{j+1} \cdot \overset{(k)}{\sigma}_j^{-1}; \quad \overset{(k)}{\sigma}_m = \overset{(k)}{\sigma}_{m-1} = 1; \quad j=m-1,m-2,\dots,1, \\ &\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \overset{(k)}{q}_j \cdot \overset{(k)}{\sigma}_{j-1}; \quad j=m,m-1,\dots,1, \\ &\overset{(k+1)}{P}_j = (\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j) \cdot \overset{(k)}{P}_j; \quad \overset{(k)}{P}_1 = 0; \quad j=m,m-1,\dots,2. \\ &\overset{(k+1)}{q}_j = \overset{(k)}{q}_j \cdot \overset{(k)}{\sigma}_{j-1} + \overset{(k)}{q}_{j-1}(1-\overset{(k)}{\sigma}_{j-2}); \quad \overset{(k)}{q}_0 = 0 = \overset{(k)}{\sigma}_{-1}; \quad j=m,m-1,\dots,1 \end{aligned} \tag{I.17}$$

$$\tilde\lambda_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j, & \text{если } d=0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j - d, & \text{если } d\neq 0; \ j=m,m-1,\dots,1. \end{cases} \tag{I.18}$$

Если $|p_{j^*}^{(k^*)}|\le\varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, то

$$\left\{\gamma_n^{(k^*)}=0,\ \sigma_{n-1}^{(k^*)}=1,\ \tilde\lambda^{(k^*)}=q_n^{(k^*)},\ p_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)}=q_n^{(k^*)}\right\}_{n=1}^{j^*} \text{ для всех } k\ge k^*. \qquad (I.19)$$

2. (τ_σ-метод). Если $|p_j^{(k+1)}|>\varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned}
&S_{j-1}^{(k)}=\gamma_j^{(k)}/(1-S_j^{(k)});\quad S_m^{(k)}=0=S_0^{(k)};\quad j=m,m-1,\dots,2\\
&\tilde\lambda_j^{(k)}=q_j^{(k)}(1-S_j^{(k)});\quad j=m,m-1,\dots,1\\
&p_j^{(k+1)}=(\tilde\lambda_{j-1}^{(k)}/\tilde\lambda_j^{(k)})\cdot p_j^{(k)};\quad j=m,m-1,\dots,2,\\
&q_j^{(k+1)}=\tilde\lambda_j^{(k)}+q_{j-1}^{(k)}-\tilde\lambda_{j-1}^{(k)};\quad q_0^{(k)}=0=\tilde\lambda_0^{(k)};\quad j=m,m-1,\dots,1
\end{aligned}\qquad (I.20)$$

$$\tilde\lambda_j=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\tilde\lambda_j^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}q_j^{(k)}, & \text{если } d=0\\ \lim\limits_{k\to\infty}\tilde\lambda_j^{(k)}-d=\lim\limits_{k\to\infty}q_j^{(k)}-d, & \text{если } d\ne 0.\end{cases}\qquad (I.21)$$

Если $|p_{j^*}^{(k^*)}|\le\varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, то

$$\left\{\gamma_n^{(k^*)}=0,\ \tilde\lambda_n^{(k^*)}=q_n^{(k^*)},\ p_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)}=\tilde\lambda_n^{(k^*)}\right\}_{n=1}^{j^*} \text{для всех } k\ge k^*. \qquad (I.22)$$

3. (T_σ-метод). Если $|F_j^{(k+1)}|>\varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned}
&q_j^{(k+1)}=(q_j^{(k)}-F_j^{(k)})+F_{j-1}^{(k)};\quad F_0^{(k)}=F_m^{(k)}=0;\quad j=m,m-1,\dots,1\\
&F_{j-1}^{(k+1)}=\left[(q_j^{(k)}-F_j^{(k)})/(q_j^{(k+1)}-F_j^{(k+1)})\right]F_j^{(k)};\quad F_m^{(k+1)}=F_0^{(k+1)}=0;\quad j=m,m-1,\dots,2
\end{aligned}\qquad (I.23)$$

$$\tilde\lambda_j=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}q_j^{(k+1)}, & \text{если } d=0\\ \lim\limits_{k\to\infty}q_j^{(k+1)}-d, & \text{если } d\ne 0,\ j=m,m-1,\dots,1,\ \text{где}\end{cases}\qquad (I.24)$$

$$F_{j-1}^{(1)}=(p_j^{(1)}\tau_j)/(q_j^{(1)}-F_j^{(1)});\quad F_m^{(1)}=F_0^{(1)}=0;\quad j=m,m-1,\dots,2. \qquad (I.25)$$

Если $|F_{j^*}^{(k^*)}|\le\varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, то

$$\left\{F_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)}=q_n^{(k^*)}\right\}_{n=1}^{j^*}, \text{ для всех } k\ge k^*. \qquad (I.26)$$

4. ($(T-\lambda)_\sigma$-метод). Если $|p_j^{(k+1)}|>\varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned}
&F_{j-1}^{(k)}=(p_j^{(k)}\tau_j)/(q_j^{(k)}-F_j^{(k)});\quad F_m^{(k)}=F_0^{(k)}=0;\quad j=m,m-1,\dots,2\\
&\tilde\lambda_j^{(k)}=q_j^{(k)}-F_j^{(k)},\quad j=m,m-1,\dots,1\\
&p_j^{(k+1)}=(\tilde\lambda_{j-1}^{(k)}/\tilde\lambda_j^{(k)})\cdot p_j^{(k)};\quad j=m,m-1,\dots,2\\
&q_j^{(k+1)}=\tilde\lambda_j^{(k)}+q_{j-1}^{(k)}-\tilde\lambda_{j-1}^{(k)};\quad q_0^{(k)}=0=\tilde\lambda_0^{(k)};\quad j=m,m-1,\dots,1.
\end{aligned}\qquad (I.27)$$

$$\tilde\lambda_j=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\tilde\lambda_j^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}q_j^{(k+1)}, & \text{если } d=0\\ \lim\limits_{k\to\infty}\tilde\lambda_j^{(k)}-d=\lim\limits_{k\to\infty}q_j^{(k+1)}-d; & \text{если } d\ne 0,\ j=m,m-1,\dots,1.\end{cases}\qquad (I.28)$$

Если $|p_{j^*}^{(k^*)}|\le\varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, то

$$\left\{F_n^{(k^*)}=0,\ \tilde\lambda_n^{(k^*)}=q_n^{(k^*)},\ p_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)}=\tilde\lambda_n^{(k^*)}\right\}_{n=1}^{j^*} \text{ для всех } k\ge k^*. \qquad (I.29)$$

5. (λ_σ-метод). Если $|p_j^{(k+1)}|>\varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\begin{aligned}
&\tilde\lambda_{j-1}^{(k)}=q_{j-1}^{(k)}-(p_j^{(k)}\tau_j)/\tilde\lambda_j^{(k)};\quad \tilde\lambda_m^{(k)}=q_m^{(k)};\quad j=m,m-1,\dots,2\\
&p_j^{(k+1)}=(\tilde\lambda_{j-1}^{(k)}/\tilde\lambda_j^{(k)})\cdot p_j^{(k)};\quad p_1^{(k)}=0;\quad j=m,m-1,\dots,2,\\
&q_j^{(k+1)}=\tilde\lambda_j^{(k)}+q_{j-1}^{(k)}-\tilde\lambda_{j-1}^{(k)};\quad q_0^{(k)}=0=\tilde\lambda_0^{(k)};\quad j=m,m-1,\dots,1
\end{aligned}\qquad (I.30)$$

$$\lambda_j=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\tilde\lambda_j^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}q_j^{(k+1)}, & \text{если } d=0\\ \lim\limits_{k\to\infty}\tilde\lambda_j^{(k)}-d=\lim\limits_{k\to\infty}q_j^{(k+1)}-d, & \text{если } d\ne 0\quad j=m,m-1,\dots,1.\end{cases}\qquad (I.31)$$

Если $|p_{j^*}^{(k^*)}|\le\varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, то

$$\left\{\tilde\lambda_{n-1}^{(k^*)}=q_{n-1}^{(k^*)},\ p_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)}=\tilde\lambda_n^{(k^*)}\right\}_{n=1}^{j^*}, \text{ для всех } k\ge k^*. \qquad (I.32)$$

III°. $\mathcal{M}(B;\Lambda;\sigma;d)$ — множество методов на основе использования информации о диагональных элементах обратной матрицы $B=\overset{(1)}{C}{}^{-1}$.

1. ($\sigma B(\sigma)$-метод). Если $|p_i^{(k+1)}|>\varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$B_{ii}^{(k)}(\sigma)=\sigma_{i-1}^{(k)-1}+\hat C_i^{(k)}\cdot B_{i-1,i-1}^{(k)}(\sigma)\cdot\hat\beta_i^{(k)};\quad B_{11}^{(k)}(\sigma)=\sigma_0^{(k)-1};\quad i=2,3,\dots,m,\ \text{где}\qquad (I.33)$$

$$\begin{aligned}
&\hat C_i^{(k)}=-(\sigma_{i-1}^{(k)-1}\cdot\hat p_i^{(k)}),\quad \hat p_i^{(k)}=p_i^{(k)}\cdot q_{i-1}^{(k)-1}\\
&\hat\beta_i^{(k)}=-(\hat\tau_i^{(k)}\cdot\sigma_{i-1}^{(k)-1}),\quad \hat\tau_i^{(k)}=\tau_i\cdot q_i^{(k)-1};\quad i=2,3,\dots,m\\
&\sigma_{j-1}^{(k)}=1-\gamma_{j+1}^{(k)}\cdot\sigma_j^{(k)-1};\quad \sigma_m^{(k)}=\sigma_{m-1}^{(k)}=1,\quad j=m-1,m-2,\dots,1,
\end{aligned}\qquad (I.34)$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_i^{(k)}=q_i^{(k)}\left[1-\sigma_{i-1}^{(k)}+B_{ii}^{(k)-1}(\sigma)\right];\quad i=1,2,\dots,m\\
&p_i^{(k+1)}=(\lambda_i^{(k)}/\lambda_{i-1}^{(k)})\cdot p_i^{(k)};\quad i=2,3,\dots,m\\
&q_i^{(k+1)}=(\lambda_i^{(k)}+q_{i+1}^{(k)})-\lambda_{i+1}^{(k)};\quad \lambda_{m+1}^{(k)}=0=q_{m+1}^{(k)};\quad i=1,2,\dots,m
\end{aligned}\qquad (I.35)$$

$$\lambda_i=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}q_i^{(k)}, & \text{если } d=0\\ \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{(k)}-d=\lim\limits_{k\to\infty}q_i^{(k)}-d, & \text{если } d\ne 0,\ i=1,2,\dots,m.\end{cases}\qquad (I.36)$$

Если $|p_{i^*}^{(k^*)}|\le\varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{B_{nn}^{(k^*)}(\sigma)=\sigma_{n-1}^{(k^*)-1},\ \lambda_n^{(k^*)}=q_n^{(k^*)},\ p_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)}=\lambda_n^{(k^*)}\right\}_{n=i^*}^{m} \text{ для всех } k\ge k^*. \qquad (I.37)$$

2. ($\Lambda B(\Lambda)$-метод). Если $|p_i^{(k+1)}|>\varepsilon$ для любых $k=1,2,\dots$, то

$$\hat B_{jj}^{(k)}(\Lambda)=\Lambda_{j+1}^{(k)-1}+\hat C_{j+1}^{(k)}\cdot\hat B_{j+1,j+1}^{(k)}(\Lambda)\cdot\hat\beta_{j+1}^{(k)};\quad \hat B_{mm}^{(k)}=\Lambda_{m+1}^{(k)-1};\ j=m-1,m-2,\dots,1,\ \text{где}\qquad (I.38)$$

$$\left.\begin{array}{ll} C_{j+1}^{(k)} = \Lambda_{j+1}^{(k)-1}\cdot \tilde{\tau}_{j+1}^{(k)}, & \tilde{P}_j^{(k)} = P_j^{(k)}\, q_{j-1}^{(k)-1} \\ \beta_{j+1}^{(k)} = \tilde{P}_{j+1}^{(k)}\cdot \Lambda_{j+1}^{(k)-1}, & \tilde{\tau}_j = \tau_j \cdot q_j^{(k)-1} \\ \Lambda_{i+1}^{(k)} = 1 - \gamma_i^{(k)} \Lambda_i^{(k)-1}, & \Lambda_1^{(k)} = \Lambda_2^{(k)} = 1\ ; \quad i=2,3,\dots,m \end{array}\right\} \qquad (I.39)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{\lambda}_j^{(k)} = q_j^{(k)}\left[1 - \Lambda_{j+1}^{(k)} + \tilde{B}_{jj}^{(k)-1}(\Lambda)\right], & j=m,m-1,\dots,1 \\ P_j^{(k+1)} = (\tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)}/\tilde{\lambda}_j^{(k)})\cdot P_j^{(k)}\ ; & j=m,m-1,\dots,2\ . \\ q_j^{(k+1)} = \tilde{\lambda}_j^{(k)} + q_{j-1}^{(k)} - \tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)}\ ; \quad q_0^{(k)} = 0 = \tilde{\lambda}_0^{(k)}\ ; & j=m,m-1,\dots,1 \end{array}\right\} \qquad (I.40)$$

$$\tilde{\lambda}_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\lambda}_j^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} q_j^{(k+1)}, & \text{если } d=0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\lambda}_j^{(k)} - d = \lim\limits_{k\to\infty} q_j^{(k+1)} - d, & \text{если } d\neq 0,\ j=m,m-1,\dots,1\ . \end{cases} \qquad (I.41)$$

<u>Если $|P_{j*}^{(k*)}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, <u>то</u>

$$\left\{\hat{B}_{nn}^{(k^*)}(\Lambda) = \Lambda_{n+1}^{(k^*)-1},\ \tilde{\lambda}_n = q_n^{(k^*)},\ P_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)} = \tilde{\lambda}_n^{(k^*)}\right\}_{n=1}^{j^*} \text{ для всех } k\ge k^*. \qquad (I.42)$$

3. <u>($GB(\Lambda)$ -метод)</u>. <u>Если $|P_i^{(k+1)}|>\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\dots,$ <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\lambda}_i^{(k)} = q_i^{(k)}\left[1 - G_{i-1}^{(k)} + \hat{B}_{ii}^{(k)-1}(\Lambda)\right], \quad i=1,2,\dots,m, \\ P_i^{(k+1)} = (\tilde{\lambda}_i^{(k)}/\tilde{\lambda}_{i-1}^{(k)})\cdot P_i^{(k)}, \quad i=2,3,\dots,m, \\ q_i^{(k+1)} = \tilde{\lambda}_i^{(k)} + q_{i+1}^{(k)} - \tilde{\lambda}_{i+1}^{(k)}\ ; \quad q_{m+1}^{(k)} = 0 = \tilde{\lambda}_{m+1}^{(k)}\ ; \quad i=1,2,\dots,m \\ \lambda_i = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\lambda}_i^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} q_i^{(k+1)}, & \text{если } d=0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\lambda}_i^{(k)} - d = \lim\limits_{k\to\infty} q_i^{(k+1)} - d, & \text{если } d\neq 0,\ i=1,2,\dots,m \end{cases} \end{array}\right\}. \qquad (I.43)$$

<u>Если $|P_{i*}^{(k*)}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, <u>то</u>

$$\left\{B_{nn}^{(k^*)}(\Lambda) = G_{n-1}^{(k^*)-1},\ \lambda_n = q_n^{(k^*)},\ P_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)} = \lambda_n^{(k^*)}\right\}_{n=i^*}^{m} \text{ для всех } k\ge k^*, \qquad (I.44)$$

где $B_{ii}^{(k)}(\Lambda)$ есть (I.30)÷(I.3I).

4. <u>($\Lambda B(G)$ -метод)</u>. <u>Если $|P_i^{(k+1)}|\ge\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\dots,$ <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\lambda}_j^{(k)} = q_j^{(k)}\left[1 - \Lambda_{j+1}^{(k)} + \tilde{B}_{jj}^{(k)-1}(G)\right]\ ; \quad j=m,m-1,\dots,1 \\ P_j^{(k+1)} = (\tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)}/\tilde{\lambda}_j^{(k)})\cdot P_j^{(k)}\ ; \quad j=m,m-1,\dots,2, \\ q_j^{(k+1)} = \tilde{\lambda}_j^{(k)} + q_{j-1}^{(k)} - \tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)}\ ; \quad q_0^{(k)} = 0 = \tilde{\lambda}_0^{(k)}\ ; \quad j=m,m-1,\dots,1. \\ \tilde{\lambda}_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\lambda}_j^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} q_j^{(k+1)}, & \text{если } d=0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\lambda}_j^{(k)} - d = \lim\limits_{k\to\infty} q_j^{(k+1)} - d, & \text{если } d\neq 0,\ j=m,\dots,1 \end{cases} \end{array}\right\}. \qquad (I.45)$$

Если $|P_{j*}^{(k*)}| \le \varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, то

$$\left\{\tilde{B}_{nn}^{(k^*)}(G) = \Lambda_{n+1}^{(k^*)-1},\ \tilde{\lambda}_n^{(k^*)} = q_n^{(k^*)},\ P_n^{(k^*+1)}=0,\ q_n^{(k^*+1)} = \tilde{\lambda}_n^{(k^*)}\right\}_{n=1}^{j^*} \text{ для всех } k\ge k^*, \qquad (I.46)$$

где $B_{jj}^{(k)}(G)$ есть (I.25)÷(I.26).

<u>Отметим также</u>, что помимо приведенных выше из [I] множеств методов вычисления собственных значений матриц $C^{(1)}$ (I.I)÷(I.I)′ существуют еще два корректных метода, которые в [I] не рассматривались и которые условно можно назвать $m[(\Lambda,G,d),(\tilde{P},\tilde{\tau})]$ -множеством.

I. <u>($[(\Lambda,d),(\tilde{P},\tilde{\tau})]$ -метод)</u>. <u>Если $|\tilde{P}_i^{(k+1)}|>\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\dots,$ <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_i^{(k)} = \tilde{P}_i^{(k)}\cdot\tilde{\tau}_i^{(k)}\ ; \quad \gamma_1^{(k)} = 0, \quad i=2,3,\dots,m \\ \Lambda_{i+1}^{(k)} = 1 - \gamma_i^{(k)}\Lambda_i^{(k)-1}\ ; \quad \Lambda_1^{(k)} = \Lambda_2^{(k)} = 1, \quad i=2,3,\dots,m \\ \lambda_i^{(k)} = \dfrac{\tau_i}{\tilde{\tau}_i^{(k)}}\Lambda_{i+1}^{(k)}\ ; \quad i=2,3,\dots,m, \end{array}\right\} \qquad (I.47)$$

где $\lambda_1^{(1)} = q_1^{(1)}\ ; \quad \lambda_1^{(k)} = \lambda_1^{(k-1)}\left(1 + \dfrac{\lambda_2^{(k-1)}}{\lambda_1^{(k-1)}}\cdot\dfrac{\gamma_2^{(k-1)}}{\Lambda_3^{(k-1)}}\right)\ ; \quad k=2,3,\dots$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\tau}_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{\varphi_i^{(k)}}\tilde{\tau}_i^{(k)}\ ; \quad i=2,3,\dots,m \\ \tilde{P}_i^{(k+1)} = \dfrac{\lambda_i^{(k)}}{\lambda_{i-1}^{(k)}}\cdot\dfrac{1}{\varphi_{i-1}^{(k)}}\cdot\tilde{P}_i^{(k)}\ ; \quad i=2,3,\dots,m \end{array}\right], \qquad (I.48)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_i^{(k)} = \Lambda_{i+1}^{(k)} + \tau_{i+1}\left(\dfrac{\tilde{P}_{i+1}^{(k)}}{\lambda_i^{(k)}}\right)\ ; \quad \tilde{P}_{m+1} = \tau_{m+1} = 0\ ; \quad i=1,2,\dots,m \\ \tilde{P}_i^{(k)} = \dfrac{P_i^{(k)}}{\varphi_{i-1}^{(k)}}, \quad \tilde{\tau}_i^{(k)} = \dfrac{\tau_i}{\varphi_i^{(k)}}\left[= \dfrac{\tau_i}{\tilde{q}_i^{(k)}}\right]\ ; \quad i=2,3,\dots,m \end{array}\right\} \qquad (I.49)$$

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty}\lambda_i^{(k)} - d\ ; \quad i=1,2,\dots,m. \qquad (I.50)$$

<u>Если $|\tilde{P}_{i*}^{(k*)}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, <u>то</u>

$$\left\{\tilde{P}_n^{(k^*+1)}=0,\ \varphi_n^{(k^*)}=1,\ \tilde{\tau}_n^{(k^*+1)} = \tilde{\tau}_n^{(k^*)},\ \lambda_n = \tau_n/\tilde{\tau}_n^{(k^*)}\right\}_{n=i^*}^{m} \text{ для всех } k\ge k^* \qquad (I.51)$$

2. <u>($[(G,d),(\tilde{P},\tilde{\tau})]$ -метод)</u>. <u>Если $|\tilde{P}_i^{(k+1)}|>\varepsilon$</u> для всех $k=1,2,\dots,$ <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_j^{(k)} = \tilde{P}_j^{(k)}\cdot\tilde{\tau}_j^{(k)}, \quad \gamma_1^{(k)} = \gamma_{m+1}^{(k)} = 0\ ; \quad j=m,m-1,\dots,2. \\ G_{j-1}^{(k)} = 1 - \gamma_{j+1}^{(k)} G_j^{(k)-1}\ ; \quad G_m^{(k)} = G_{m-1}^{(k)} = 1\ ; \quad j=m-1,m-2,\dots,1 \\ \lambda_j^{(k)} = \left(\dfrac{\tau_{j+1}}{\tilde{\tau}_{j+1}^{(k)}}\right)\cdot G_{j-1}^{(k)}\ ; \quad j=m-1,m-2,\dots,1 \end{array}\right\} \qquad (I.52)$$

где $\lambda_m^{(1)} = q_m^{(1)}\ ; \quad \lambda_m^{(k+1)} = \lambda_m^{(k)}\left(1 + \dfrac{\lambda_{m-1}^{(k)}}{\lambda_m^{(k)}}\cdot\dfrac{\gamma_m^{(k)}}{G_{m-2}^{(k)}}\right), \quad k=1,2,\dots$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\tau}_j^{(k+1)} = \dfrac{1}{\varphi_{j-1}^{(k)}}\tilde{\tau}_j^{(k)}, \quad j=m,m-1,\dots,2 \\ \tilde{P}_j^{(k+1)} = \left(\dfrac{\lambda_{j-1}^{(k)}}{\lambda_j^{(k)}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\varphi_j^{(k)}}\cdot\tilde{P}_j^{(k)}\right), \quad j=m,m-1,\dots,2 \end{array}\right], \qquad (I.53)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_j^{(k)} = G_{j-1}^{(k)} + \dfrac{\tilde{P}_j^{(k)}}{\lambda_j^{(k)}}\cdot\tau_j\ ; \quad \varphi_1^{(k)} = G_0^{(k)}\ ; \quad j=m,m-1,\dots,2 \\ \tilde{P}_j^{(k)} = P_j^{(k)}/q_j^{(k)}\ ; \quad \tilde{\tau}_j^{(k)} = \tau_j/q_{j-1}^{(k)}\ ; \quad j=m,m-1,\dots,2 \end{array}\right\} \qquad (I.54)$$

$$\tilde{\lambda}_j = \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde{\lambda}_j} - d \ ; \quad j = m, m-1, \ldots, 1 . \tag{1.55}$$

Доказательство справедливости этих методов, вообще говоря, основано на результатах [I], поэтому мы его опускаем в целях экономии места. Однако отметим лишь тот факт, что эти методы включают в итерационный процесс и элементы $\{\overset{(k)}{\tau}\}$ в отличие от методов [I].

Замечание I. Во всех (указанных выше) алгоритмах

$$\overset{(k)}{\gamma_i} = (\overset{(k)}{P_i} \cdot z_i)/(\overset{(k)}{q}_{i-1} \cdot \overset{(k)}{q_i}) \ ; \quad \overset{(k)}{\gamma_1} = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0 \ ; \quad i = 2,3,\ldots,m \quad , \tag{1.56}$$

а λ_i и $\tilde{\lambda}_i$ связаны соотношением

$$\lambda_i = \tilde{\lambda}_{m-(i-1)} \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m . \tag{1.57}$$

Кроме того,

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 \text{ – в теоретических расчетах} \\ \text{константа, задаваемая разрядной сеткой ЭВМ, в практичес-} \end{cases}$$

ких вычислениях для представления минимального числа, и d – вещественное [I] число (например, минимальное), обеспечивающее строгую положительную (отрицательную) определенность матрицы $\overset{(1)}{C}$ (I.2).

2. Множества корректных ускоренных методов вычисления полного спектра трехдиагональных матриц общего вида

В указанных выше алгоритмах, как следует из $(\text{I.I2})_3)$, скорость сходимости зависит от структуры спектра и в общем случае не высокая. Вопрос об оптимальной стратегии ускорения сходимости, как справедливо отмечено в [2], в общем случае остается открытым. Обычно [2÷4,6,7] используют так называемую стратегию сдвигов, т.е.

$$(\overset{(k)}{A} - \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k)}{L} \cdot \overset{(k)}{R} \longrightarrow \overset{(k+1)}{A} = \overset{(k)}{R} \cdot \overset{(k)}{L} . \tag{2.1}$$

Тогда собственные значения матрицы $A = \overset{(1)}{A}$ находятся в виде [2÷4,6]

$$\lambda_i = \overset{(k+1)}{q_i}(\overset{(k)}{W}) + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{W} \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m, \tag{2.2}$$

где $\overset{(k+1)}{q_i}(W)$ – диагональные элементы итерационной матрицы $\overset{(k+1)}{A}$, $\overset{(k)}{W}$ – итерационный коэффициент сдвига для ускорения и обычно на практике выбирается как собственное значение матриц 2x2

$$\begin{pmatrix} \overset{(k)}{a}_{j-1\,j-1} & \overset{(k)}{a}_{j-1\,j} \\ \overset{(k)}{a}_{j\,j-1} & \overset{(k)}{a}_{jj} \end{pmatrix} , \tag{2.3}$$

ближайшее к $\overset{(k)}{a}_{jj}$ ([7],[4]).

При этом скорость сходимости определяется следующей [2÷4,7] формулой:

$$(\overset{(k)}{A}_{ij}) \longrightarrow K_{ij} \prod_{n=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i - \overset{(n)}{W}}{\lambda_j - \overset{(n)}{W}}\right) , \quad (i > j) , \tag{2.4}$$

где K_{ij} – постоянная величина.

Ниже мы остановимся подробно на вопросах модификации стратегии сдвигов (хотя существуют и другие стратегии) применительно к методам,

перечисленным в первом параграфе настоящей работы. Справедлива следующая

Теорема I. Пусть $\overset{(1)}{C}$ (I.I)÷(I.I)$'$ – трехдиагональная матрица общего вида (в соответствии с определением I из [I]). Тогда имеют место следующие $\mathfrak{M}[\Lambda,(W-d)]$, $\mathfrak{M}[\tau,(W-d)]$ и $\mathfrak{M}[(\tau,\Lambda),(W,d)]$ – множества ускоренных корректных алгоритмов для вычисления ее собственных значений x)

I°. $\mathfrak{M}[\Lambda,(W-d)]$ –множество ускоренных алгоритмов.

I. ($\Lambda W d$ –метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_i}| > \varepsilon$ для любых k=I,2,..., то

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma_i} = (\overset{(k)}{P_i} z_i)/[(\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{W})(\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W})] ; \quad \overset{(k)}{\gamma_1} = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0 \ ; \ i = 2,3,\ldots,m \\
\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma_i} \overset{(k)}{\Lambda}{}_i^{-1} \ ; \quad \overset{(k)}{\Lambda_1} = \overset{(k)}{\Lambda_2} = 1 , \ \overset{(k)}{\Lambda}_{m+2} = 0 \ ; \ i = 2,3,\ldots,m . \\
\overset{(k)}{\lambda_i} = (\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W}) \cdot \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m . \\
\overset{(k+1)}{P_i} = (\overset{(k)}{\lambda_i} / \overset{(k)}{\lambda}_{i-1}) \cdot \overset{(k)}{P_i} \ ; \quad i = 2,3,\ldots,m \\
\overset{(k+1)}{q_i} = [\overset{(k)}{\lambda_i} + (\overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{W})] - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1} \ ; \ (\overset{(k)}{q}_{m+1} - \overset{(k)}{W}) = 0 = \overset{(k)}{\lambda}_{m+1} ; \ i = 1,2,\ldots,m
\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty} [\overset{(k+1)}{q_i} + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{W}] - d \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m . \tag{2.6}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\{ \overset{(k^*+1)}{P_n} = 0, \overset{(k^*)}{\gamma_n} = 0, \overset{(k^*)}{\Lambda}_{n+1} = 1, \overset{(k^*)}{\lambda_n} = \overset{(k^*)}{q_n} - \overset{(k^*)}{W}, \overset{(k^*+1)}{q_n} = \overset{(k^*)}{\lambda_n} \}_{n=i^*}^{m} \text{ для всех } k \geq k^* . \tag{2.7}$$

2. ($\tau_\Lambda W d$ –метод). Если $|\overset{(k+1)}{P_i}| > \varepsilon$ для любых k=I,2,..., то

$$\left.\begin{array}{ll}
\overset{(k)}{\gamma_i} = (\overset{(k)}{P_i} z_i)/[(\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{W})(\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W})] ; \quad \overset{(k)}{\gamma_1} = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0 \ ; & i = 2,3,\ldots,m \\
\overset{(k)}{\tau_i} = \overset{(k)}{\gamma_i} / (1 - \overset{(k)}{\tau}_{i-1}) \ ; \quad \overset{(k)}{\tau_1} = 0 = \overset{(k)}{\tau}_{m+1} \ ; & i = 2,3,\ldots,m . \\
\overset{(k)}{\lambda_i} = (\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W}) \cdot (1 - \overset{(k)}{\tau_i}) \ ; & i = 1,2,\ldots,m \\
\overset{(k+1)}{P_i} = (\overset{(k)}{\lambda_i} / \overset{(k)}{\lambda}_{i-1}) \cdot \overset{(k)}{P_i} \ ; & i = 2,3,\ldots,m \\
\overset{(k+1)}{q_i} = \overset{(k)}{\lambda_i} + (\overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{W}) - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1} \ ; \ (\overset{(k)}{q}_{m+1} - \overset{(k)}{W}) = 0 \ ; & i = 1,2,3,\ldots,m
\end{array}\right\} \tag{2.8}$$

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty} (\overset{(k+1)}{q_i} + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{W}) - d \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m . \tag{2.9}$$

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \leq \varepsilon$ в любой итерации $k = k \geq 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\{ \overset{(k^*)}{\tau_n} = 0 , \overset{(k^*)}{\lambda_n} = (\overset{(k^*)}{q_n} - \overset{(k^*)}{W}), \overset{(k^*+1)}{P_n} = 0 , \overset{(k^*+1)}{q_n} = \overset{(k^*)}{\lambda_n} \}_{n=i^*}^{m} , \quad k \geq k^* . \tag{2.10}$$

x) Замечание 2. Во всех методах этой теоремы d выбирается в соответствии с замечанием I. Учитывая, что методы выбора $\overset{(n)}{W}$ могут быть разными, например [2÷4,6,7], мы сочли возможным наше определение $\overset{(n)}{W}$ вынести в отдельную теорему 2. Кроме того, во всех методах указанных в теореме множеств в целях упрощения обозначений мы положили $\overset{(k)}{\gamma_i}(\overset{(k)}{W}) = \overset{(k)}{\gamma_i}$; $\overset{(k)}{\Lambda_i}(\overset{(k)}{W}) = \overset{(k)}{\Lambda_i}$; и т.д., где это не приводит к недоразумениям.

3. <u>($T_\wedge Wd$ -метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{T}_i| > \varepsilon$</u> для любых $k = 1, 2, \ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} \overset{(k+1)}{q}_i &= (\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{W}) - \overset{(k)}{T}_i + \overset{(k)}{T}_{i+1}; \quad \overset{(k)}{T}_{m+1}=0;\ i=1,2,\ldots,m \\ \overset{(k+1)}{T}_i &= \frac{(\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{W}) - \overset{(k)}{T}_i}{(\overset{(k+1)}{q}_{i-1} - \overset{(k+1)}{W}) - \overset{(k+1)}{T}_{i-1}}\, \overset{(k)}{T}_i; \quad \overset{(k+1)}{T}_1 = 0;\ i=2,3,\ldots,m \\ \lambda_i &= \lim_{k\to\infty} \Big(\overset{(k+1)}{q}_i + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{W}\Big) - d; \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned}\right\}. \tag{2.11}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{T}_{i^*}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $k = k^* \ge 2$ и некотором $i = i^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{q}_n - \overset{(k^*)}{W},\quad \overset{(k^*+1)}{T}_n = 0\Big\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k \ge k^*, \text{ где} \tag{2.12}$$

$$\overset{(1)}{T}_i = (\overset{(1)}{P}_i \tau_i)/(\overset{(1)}{q}_{i-1} - \overset{(1)}{T}_{i-1});\quad \overset{(1)}{T}_1 = 0 = \overset{(1)}{T}_{m+1};\ i = 2,3,\ldots,m \quad \text{и} \quad \overset{(1)}{W} = 0. \tag{2.13}$$

4. <u>[$(T-\lambda\quad)_\wedge Wd$-метод]</u> <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i| > \varepsilon$</u> для любых $k = 1, 2, \ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} \overset{(k)}{T}_i &= \frac{\overset{(k)}{P}_i \cdot \tau_i}{(\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T}_{i-1})} \Big[= \frac{\overset{(k)}{P}_i}{\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}} \cdot \tau_i\Big]; \quad \overset{(k)}{T}_1 = \overset{(k)}{T}_{m+1} = 0;\quad i=2,3,\ldots,m \\ \overset{(k)}{\lambda}_i &= (\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T}_i); \quad i=1,2,\ldots,m \\ \overset{(k+1)}{P}_i &= (\overset{(k)}{\lambda}_i / \overset{(k)}{\lambda}_{i-1}) \cdot \overset{(k)}{P}_i; \quad i=2,3,\ldots,m \\ \overset{(k+1)}{q}_i &= [\overset{(k)}{\lambda}_i + (\overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{W})] - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; \quad (\overset{(k)}{q}_{m+1} - \overset{(k)}{W}) = 0 = \overset{(k)}{\lambda}_{m+1}; \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \Big[\overset{(k+1)}{q}_i + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{W}\Big] - d; \quad i=1,2,\ldots,m. \tag{2.15}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $k = k^* \ge 2$ и некотором $i = i^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(k^*)}{T}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*)}{\lambda}_n = (\overset{(k^*)}{q}_n - \overset{(k^*)}{W}),\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\lambda}_n\Big\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k \ge k^*. \tag{2.16}$$

5. <u>($\lambda_\wedge Wd$ -метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i| > \varepsilon$</u> для любых $k = 1, 2, \ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} \overset{(k)}{\lambda}_i &= (\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{W}) - (\overset{(k)}{P}_i \cdot \tau_i) \cdot \overset{(k)}{\lambda}{}_{i-1}^{-1}; \quad \overset{(k)}{\lambda}_1 = (\overset{(k)}{q}_1 - \overset{(k)}{W}); \quad i=2,3,\ldots,m \\ \overset{(k+1)}{P}_i &= (\overset{(k)}{\lambda}_i / \overset{(k)}{\lambda}_{i-1}) \cdot \overset{(k)}{P}_i; \quad i=2,3,\ldots,m \\ \overset{(k+1)}{q}_i &= [\overset{(k)}{\lambda}_i + (\overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{W})] - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; \quad (\overset{(k)}{q}_{m+1} - \overset{(k)}{W}) = 0 = \overset{(k)}{\lambda}_{m+1}; \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \Big(\overset{(k+1)}{q}_i + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{W}\Big) - d; \quad i=1,2,\ldots,m. \tag{2.18}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $k = k^* \ge 2$ и некотором $i = i^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(k^*)}{\lambda}_n = \overset{(k^*)}{q}_n - \overset{(k^*)}{W},\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\lambda}_n\Big\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k \ge k^*. \tag{2.19}$$

П^0. <u>$\mathcal{M}[\sigma, (W-d)]$-множество</u> ускоренных алгоритмов.

1. <u>(σWd -метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_j| > \varepsilon$</u> для любых $k = 1, 2, \ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} \overset{(k)}{\gamma}_j &= (\overset{(k)}{P}_j \tau_j)/[(\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{W}})(\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{\tilde{W}})]; \quad \overset{(k)}{\gamma}_1 = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0;\ j=m,m-1,\ldots,2 \\ \overset{(k)}{\sigma}_{j-1} &= 1 - \overset{(k)}{\gamma}_{j+1} \cdot \overset{(k)}{\sigma}{}_j^{-1}; \quad \overset{(k)}{\sigma}_m = \overset{(k)}{\sigma}_{m-1} = 1; \quad j = m-1, m-2, \ldots, 1, \\ \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j &= (\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{\tilde{W}}) \cdot \overset{(k)}{\sigma}_{j-1}; \quad j = m, m-1, \ldots, 1. \\ \overset{(k+1)}{P}_j &= (\overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_{j-1} / \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j) \cdot \overset{(k)}{P}_j; \quad j = m, m-1, \ldots, 2. \\ \overset{(k+1)}{q}_j &= \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j + (\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{W}}) - \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_{j-1}; \quad (\overset{(k)}{q}_0 - \overset{(k)}{\tilde{W}}) = 0 = \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_0; \quad j=m,m-1,\ldots,1 \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

$$\tilde{\lambda}_j = \lim_{k\to\infty} \Big(\overset{(k+1)}{q}_j + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{\tilde{W}}\Big) - d; \quad j = m, m-1, \ldots, 1. \tag{2.21}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $k = k^* \ge 2$ и некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(k^*)}{\sigma}_{n-1} = 1,\ \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n = \overset{(k^*)}{q}_n - \overset{(k^*)}{\tilde{W}},\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n\Big\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех } k \ge k^*. \tag{2.22}$$

2. <u>($\tau_\sigma Wd$ -метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_j| > \varepsilon$</u> для любых $k = 1, 2, \ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} \overset{(k)}{\gamma}_j &= (\overset{(k)}{P}_j \tau_j)/[(\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{W}) \cdot (\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{W})]; \quad \overset{(k)}{\gamma}_1 = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0;\ j=m,m-1,\ldots,2 \\ \overset{(k)}{S}_{j-1} &= \overset{(k)}{\gamma}_j / (1 - \overset{(k)}{S}_j); \quad \overset{(k)}{S}_m = 0 = \overset{(k)}{S}_0; \quad j = m, m-1, \ldots, 2 \\ \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j &= (\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{\tilde{W}})(1 - \overset{(k)}{S}_j); \quad j = m, m-1, \ldots, 1 \\ \overset{(k+1)}{P}_j &= (\overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_{j-1} / \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j) \cdot \overset{(k)}{P}_j; \quad j = m, m-1, \ldots, 2, \\ \overset{(k+1)}{q}_j &= \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j + (\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{W}}) - \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_{j-1}; \quad (\overset{(k)}{q}_0 - \overset{(k)}{\tilde{W}}) = 0 = \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_0; \quad j=m,m-1,\ldots,1 \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

$$\tilde{\lambda}_j = \lim_{k\to\infty} \Big(\overset{(k+1)}{q}_j + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{\tilde{W}}\Big) - d; \quad j = m, m-1, \ldots, 1. \tag{2.24}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $k = k^* \ge 2$ и некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(k^*)}{S}_{n-1} = 0;\ \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_{n-1} = (\overset{(k^*)}{q}_{n-1} - \overset{(k^*)}{\tilde{W}}),\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0;\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n\Big\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех } k \ge k^*. \tag{2.25}$$

3. <u>($T_\sigma Wd$ -метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{F}_j| > \varepsilon$</u> для любых $k = 1, 2, \ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} \overset{(k+1)}{q}_j &= (\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{\tilde{W}} - \overset{(k)}{F}_j) + \overset{(k)}{F}_{j-1}; \quad \overset{(k)}{F}_0 = \overset{(k)}{F}_m = 0; \quad j = m, m-1, \ldots, 1 \\ \overset{(k+1)}{F}_{j-1} &= \frac{(\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{W}} - \overset{(k)}{F}_{j-1})}{(\overset{(k+1)}{q}_j - \overset{(k+1)}{\tilde{W}} - \overset{(k+1)}{T}_j)} \cdot \overset{(k)}{F}_{j-1}; \quad \overset{(k+1)}{F}_m = \overset{(k+1)}{F}_0 = 0; \quad j=m,m-1,\ldots,2. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

$$\tilde{\lambda}_j = \lim_{k\to\infty} \Big(\overset{(k+1)}{q}_j + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{\tilde{W}}\Big) - d; \quad j = m, m-1, \ldots, 1, \quad \text{где} \tag{2.27}$$

$$\overset{(1)}{F}_{j-1} = (\overset{(1)}{P}_j \tau_j)/(\overset{(1)}{q}_j - \overset{(1)}{F}_j); \quad \overset{(1)}{F}_m = \overset{(1)}{F}_0 = 0; \quad j = m, m-1, \ldots, 2 \quad \overset{(1)}{\tilde{W}} = 0. \tag{2.28}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{F}_{j^*}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $k = k^* \ge 2$ и некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(k^*+1)}{F}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{q}_n - \overset{(k^*)}{\tilde{W}}\Big\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех } k \ge k^*. \tag{2.29}$$

4. <u>$(T-\lambda)_G$ Wd-метод</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_j|>\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{F}_{j-1} = (\overset{(k)}{P}_j r_j)/[(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{W})-\overset{(k)}{F}_j];\ \overset{(k)}{F}_m=\overset{(k)}{F}_0=0;\ j=m,m-1,\ldots,2.\\
\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = [(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W})-\overset{(k)}{F}_j];\quad j=m,m-1,\ldots,1.\\
\overset{(k+1)}{P}_j = (\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\cdot\overset{(k)}{P}_j;\quad j=m,m-1,\ldots,2.\\
\overset{(k+1)}{q}_j = \overset{(k)}{\tilde\lambda}+(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})-\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1};\ (\overset{(k)}{q}_0-\overset{(k)}{\tilde W})=0=\overset{(k)}{\tilde\lambda}_0;\ j=m,m-1,\ldots,1
\end{array}\right\}\quad(2.30)$$

$$\tilde\lambda_j=\lim_{k\to\infty}(\overset{(k+1)}{q}_j+\sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{\tilde W})-d;\quad j=m,m-1,\ldots,1.\qquad(2.31)$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*)}{F}_{n-1}=0,\ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_{n-1}=(\overset{(k^*)}{q}_{n-1}-\overset{(k^*)}{\tilde W}),\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n\}_{n=1}^{j^*}\ \text{для всех}\ k\ge k^*.\qquad(2.32)$$

5. <u>$(\lambda_G\, Wd$-метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_j|>\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}=(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})-(\overset{(k)}{P}_j r_j)/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j;\ \overset{(k)}{\tilde\lambda}_m=(\overset{(k)}{q}_m-\overset{(k)}{\tilde W});\ j=m,m-1,\ldots,2\\
\overset{(k+1)}{P}_j=(\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\cdot\overset{(k)}{P}_j;\ \overset{(k)}{P}_1=0;\ j=m,m-1,\ldots,2.\\
\overset{(k+1)}{q}_j=\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j+(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})-\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1};\ (\overset{(k)}{q}_0-\overset{(k)}{\tilde W})=0=\overset{(k)}{\tilde\lambda}_0;\ j=m,m-1,\ldots,1
\end{array}\right.\quad(2.33)$$

$$\lambda_j=\lim_{k\to\infty}(\overset{(k+1)}{q}_j+\sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{\tilde W})-d;\quad j=m,m-1,\ldots,1.\qquad(2.34)$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_{n-1}=(\overset{(k^*)}{q}_{n-1}-\overset{(k^*)}{\tilde W}),\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n\}_{n=1}^{j^*}\ \text{для всех}\ k\ge k^*.\qquad(2.35)$$

III°. <u>$\mathcal{M}[(G,\Lambda),(W-d)]$ -множество</u> ускоренных алгоритмов.

I. <u>$\{[GB(G)],\ Wd$-метод</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i|>\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma}_i=(\overset{(k)}{P}_i r_i)/[(\overset{(k)}{q}_i-\overset{(k)}{W})(\overset{(k)}{q}_{i-1}-\overset{(k)}{W})];\ \overset{(k)}{\gamma}_1=\overset{(k)}{\gamma}_{m+1}=0;\ i=2,3,\ldots,m\\
\overset{(k)}{\tilde B}_{ii}(G)=[1+(1-\overset{(k)}{G}_{i-2})\cdot\overset{(k)}{\tilde B}_{i-1\,i-1}(G)]\overset{(k)}{G}{}^{-1}_{i-1};\ \overset{(k)}{\tilde B}_{11}=\overset{(k)}{G}{}^{-1}_0;\ i=2,3,\ldots,m\\
\overset{(k)}{G}_{j-1}=1-\overset{(k)}{\gamma}_{j+1}\cdot\overset{(k)}{G}{}^{-1}_j;\ \overset{(k)}{G}_m=\overset{(k)}{G}_{m-1}=1;\quad j=m-1,m-2,\ldots,1\\
\overset{(k)}{\lambda}_i=(\overset{(k)}{q}_i-\overset{(k)}{W})[1-\overset{(k)}{G}_{i-1}+\overset{(k)}{\tilde B}{}^{-1}_{ii}(G)];\quad i=1,2,\ldots,m\\
\overset{(k+1)}{P}_i=(\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{P}_i;\quad i=2,3,\ldots,m\\
\overset{(k+1)}{q}_i=\overset{(k)}{\lambda}_i+(\overset{(k)}{q}_{i+1}-\overset{(k)}{W})-\overset{(k)}{\lambda}_{i+1};\ (\overset{(k)}{q}_{m+1}-\overset{(k)}{W})=0=\overset{(k)}{\lambda}_{m+1};\ i=1,2,\ldots,m
\end{array}\right\}\quad(2.36)$$

$$\lambda_i=\lim_{k\to\infty}(\overset{(k+1)}{q}_i+\sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{W})-d;\quad i=1,2,\ldots,m.\qquad(2.37)$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*)}{\tilde B}_{nn}(G)=\overset{(k^*)}{G}{}^{-1}_{n-1},\ \overset{(k^*)}{\lambda}_n=(\overset{(k^*)}{q}_n-\overset{(k^*)}{W}),\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{\lambda}_n\}_{n=i^*}^{m}\ \text{для всех}\ k\ge k^*.\qquad(2.38)$$

2. <u>$\{[\Lambda B(\Lambda)],\ Wd$-метод</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i|>\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\gamma}_j=(\overset{(k)}{P}_j r_j)/[(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W})];\quad \overset{(k)}{\gamma}_1=\overset{(k)}{\gamma}_{m+1}=0;\ j=m,m-1,\ldots,2\\
\overset{(k)}{\hat B}_{jj}(\Lambda)=[1+(1-\overset{(k)}{\Lambda}_{j+2})\cdot\overset{(k)}{\hat B}_{j+1\,j+1}(\Lambda)]\cdot\overset{(k)}{\Lambda}{}^{-1}_{j+1};\ \overset{(k)}{\hat B}_{mm}=\overset{(k)}{\Lambda}{}^{-1}_{m+1};\ j=m-1,m-2,\ldots,1\\
\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}=1-\overset{(k)}{\gamma}_i\overset{(k)}{\Lambda}{}^{-1}_i;\quad \overset{(k)}{\Lambda}_1=\overset{(k)}{\Lambda}_2=1;\quad i=2,3,\ldots,m\\
\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j=(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W})[1-\overset{(k)}{\Lambda}_{j+1}+\overset{(k)}{\hat B}{}^{-1}_{jj}(\Lambda)];\quad j=m,m-1,\ldots,1\\
\overset{(k+1)}{P}_j=(\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\cdot\overset{(k)}{P}_j;\quad j=m,m-1,\ldots,2\\
\overset{(k+1)}{q}_j=\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j+(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})-\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1};\quad(\overset{(k)}{q}_0-\overset{(k)}{\tilde W})=0=\overset{(k)}{\tilde\lambda}_0;\ j=m,m-1,\ldots,1
\end{array}\right\}\quad(2.39)$$

$$\tilde\lambda_j=\lim_{k\to\infty}(\overset{(k+1)}{q}_j+\sum_{n=1}^{k}\overset{(k)}{\tilde W})-d;\quad i=1,2,\ldots,m.\qquad(2.40)$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $j=j^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*)}{\hat B}_{nn}(\Lambda)=\overset{(k^*)}{\Lambda}{}^{-1}_{n+1},\ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n=(\overset{(k^*)}{q}_n-\overset{(k^*)}{\tilde W}),\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0;\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n\}_{n=1}^{j^*}\ \text{для всех}\ k\ge k^*.\qquad(2.41)$$

3. <u>$\{[GB(\Lambda)],\ Wd$-метод$\}$</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i|>\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\lambda}_i=(\overset{(k)}{q}_i-\overset{(k)}{W})[1-\overset{(k)}{G}_{i-1}+\overset{(k)}{\hat B}{}^{-1}_{ii}(\Lambda)],\ i=1,2,\ldots,m\\
\overset{(k+1)}{P}_i=(\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{P}_i;\quad i=2,3,\ldots,m\\
\overset{(k+1)}{q}_i=\overset{(k)}{\lambda}_i+(\overset{(k)}{q}_{i+1}-\overset{(k)}{W})-\overset{(k)}{\lambda}_{i+1};\ (\overset{(k)}{q}_{m+1}-\overset{(k)}{W})=0=\overset{(k)}{\lambda}_{m+1};\ i=1,2,\ldots,m
\end{array}\right\}\quad(2.42)$$

$$\lambda_i=\lim_{k\to\infty}(\overset{(k+1)}{q}_i+\sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{W})-d;\quad i=1,2,\ldots,m,\qquad(2.43)$$

где $\overset{(k)}{\hat B}_{ii}(\Lambda)$ есть $(2.39)_{2)}$, а $\overset{(k)}{G}_j$ есть $(2.36)_{3)}$.

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $k=k^*\ge 2$ и некотором $i=i^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*)}{\lambda}_n=(\overset{(k^*)}{q}_n-\overset{(k^*)}{W}),\ \overset{(k^*+1)}{P}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{\lambda}_n\}_{n=i^*}^{m}\ \text{для всех}\ k\ge k^*.\qquad(2.44)$$

4. <u>$\{[\Lambda B(G)],\ Wd$-метод$\}$</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i|>\varepsilon$</u> для любых $k=1,2,\ldots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j=(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{\tilde W})[1-\overset{(k)}{\Lambda}_{j+1}+\overset{(k)}{\tilde B}{}^{-1}_{jj}(G)];\quad j=m,m-1,\ldots,1\\
\overset{(k+1)}{P}_j=(\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\cdot\overset{(k)}{P}_j;\quad j=m,m-1,\ldots,2\\
\overset{(k+1)}{q}_j=\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j+(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{\tilde W})-\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1};\ (\overset{(k)}{q}_0-\overset{(k)}{\tilde W})=0=\overset{(k)}{\tilde\lambda}_0;\ j=m,m-1,\ldots,1
\end{array}\right\}\quad(2.45)$$

$$\tilde\lambda_j=\lim_{k\to\infty}(\overset{(k+1)}{q}_j+\sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{\tilde W})-d;\quad j=m,m-1,\ldots,1,\qquad(2.46)$$

где $\overset{(k)}{\tilde B}_{jj}(G)$ есть $(2.36)_{2)}$ и $\overset{(k)}{\Lambda}_j$ есть $(2.39)_{3)}$.

Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}| \le \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geq 2$ и некотором $j = j^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n = (\overset{(k^*)}{q}_n - \overset{(k^*)}{\tilde{W}}),\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n \right\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для любых } k \geq k^*. \tag{2.47}$$

Доказательство теоремы I формально совпадает с доказательством указанных выше методов, т.е. (I.3)÷(I.46), если учесть соотношения (2.I)÷(2.2), поэтому (с целью экономии места) не будем его повторять.

Замечание 3. Полученные выше ускоренные алгоритмы $\mathcal{M}[\Lambda,(W-d)]$, $([GB(G)],Wd)$, $([GB(\Lambda)],Wd)$ – множеств методов обладают, естественно, скоростью сходимости не хуже, чем

$$\overset{(k+1)}{P}_i(W) = \prod_{n=1}^{k} \left[\frac{\overset{(n)}{\lambda}_i(W)}{\overset{(n)}{\lambda}_{i-1}(W)} \right] \cdot \overset{(1)}{P}_i(W); \quad i = 2,3,\dots,m, \tag{2.48}$$

а алгоритмы $\mathcal{M}[G,(W-d)]$, $([\Lambda B(\Lambda)],Wd)$, $([\Lambda B(G)],Wd)$ – множеств методов обладают соответственно скоростью сходимости не хуже, чем

$$\overset{(k+1)}{P}_j(\tilde{W}) = \prod_{n=1}^{k} \left[\frac{\overset{(n)}{\tilde{\lambda}}_{j-1}(\tilde{W})}{\overset{(n)}{\tilde{\lambda}}_j(\tilde{W})} \right] \cdot \overset{(1)}{P}_j(\tilde{W}); \quad j = m, m-1, \dots, 2, \tag{2.49}$$

где $\overset{(n)}{\lambda}_i(W)$, $\overset{(n)}{\tilde{\lambda}}_j(\tilde{W})$ – есть теперь функции от коэффициентов ускорения W и $\tilde{W}$.

Лемма I. Для любых k=I,2,...; i=2,3,...,m имеют место следующие соотношения

$$\overset{(k+1)}{P}_i = \begin{cases} (\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T}_i) \cdot \overset{(k)}{T}_i \cdot \tau_i^{-1}, & \text{если } \tau_i \neq 0 \\ \left[\dfrac{\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T}_i}{\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T}_{i-1}} \right] \overset{(k)}{P}_i, & \text{если } \tau_i = 0, \end{cases} \tag{2.50}$$

а для любых k=I,2,...; $j = m, m-1, \dots, 3, 2$

$$\overset{(k+1)}{P}_j = \begin{cases} (\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{W}} - \overset{(k)}{F}_{j-1}) \cdot \overset{(k)}{F}_{j-1} \cdot \tau_j^{-1}, & \text{если } \tau_j \neq 0 \\ \left[\dfrac{(\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{W}} - \overset{(k)}{F}_{j-1})}{(\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{\tilde{W}} - \overset{(k)}{F}_j)} \right] \cdot \overset{(k)}{P}_j, & \text{если } \tau_j = 0, \end{cases} \tag{2.5I}$$

которые всегда определены.

Доказательство. Если учесть определения последовательностей $\{\overset{(k)}{\gamma}_i\}$ $\{\overset{(k)}{T}_i\}$ и $\{\overset{(k)}{F}_i\}$ (т.е. (3.26) в [5]; $(I.27)_{I)}$ и (I.56) в настоящей работе), то из $(I.6)_{2)}$ и $(I.12)_{3)}$, $^{x)}$ получаем

$$\overset{(k+1)}{P}_i = \begin{cases} (\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{T}_i) \cdot \overset{(k)}{T}_i \cdot \tau_i^{-1}, & \text{если } \tau_i \neq 0 \\ \dfrac{\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{T}_i}{\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{T}_{i-1}} \overset{(k)}{P}_i, & \text{если } \tau_i = 0;\ i = 2,3,\dots,m \end{cases} \tag{2.52}$$

$$\overset{(k+1)}{P}_j = \begin{cases} (\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{F}_{j-1}) \overset{(k)}{F}_{j-1} \cdot \tau_i^{-1}, & \text{если } \tau_j \neq 0 \\ \dfrac{\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{F}_{j-1}}{\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{F}_j} \cdot \overset{(k)}{P}_j, & \text{если } \tau_j = 0;\ j = m, m-1, \dots, 2. \end{cases} \tag{2.53}$$

x) Замечание 4. Как будет показано ниже (в теореме 2), коэффициенты $\overset{(n)}{W}_i$ -ускорения являются функциями (в нашей модификации!) от $\overset{(n)}{\gamma}_i$. Поэтому, учитывая (явную!) независимость методов T_Λ и T_G от $\overset{(n)}{\gamma}_i$ (или, что то же самое, от $\overset{(k)}{P}_i$, τ_i), нам необходимо установить связь между $\overset{(k)}{P}_i$ и $\overset{(k)}{T}_i$, а также $\overset{(k)}{P}_j$ и $\overset{(k)}{F}_j$.

Поэтому, учитывая (2.52) и (2.53), из $(2.8)_{3),2)}$ и $(2.33)_{3),2)}$ сразу можно получить (2.50) и (2.5I) соответственно. При этом в (2.50) и (2.5I) деление на нуль исключается, так как $\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}(W)[=(\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{W} - \overset{(k)}{T}_{i-1})] \neq 0$; $(\overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j(\tilde{W})[=(\overset{(k)}{q}_j - \tilde{W} - \overset{(k)}{F}_j)] \neq 0)$. Лемма доказана.

3. О модификации метода [2÷4,6,7] выбора рекуррентных коэффициентов в рамках стратегии смещений и анализе ускорения сходимости алгоритмов вычисления полного спектра трехдиагональных матриц общего вида

Как уже отмечали во введении ко второму параграфу этой статьи, вопрос о выборе оптимальной стратегии ускорения сходимости итерационных методов численного нахождения полного спектра матриц еще далек от завершения. Там же мы сослались на используемую в настоящее время (например, [2÷4,6]) стратегию (и выбор итерационных коэффициентов) $\overset{(k)}{W}_i$-смещений на основе анализа собственных значений последних у $\overset{(k)}{C}$ (2x2)-матриц. Ниже мы приводим другой (по-видимому, более простой и быстрый) способ выбора $\overset{(k)}{W}$. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть собственные значения матрицы $\overset{(d)}{C}$(I.2), аддитивно-подобной [I] матрице $\overset{(1)}{C}$(I.I), удовлетворяют условиям

$$|\lambda_1(d)| > |\lambda_2(d)| > \dots > |\lambda_{m-1}(d)| > |\lambda_m(d)| > 0. \tag{3.1}$$

Тогда, если для любого $j = 2,3,\dots,m$ и любого k=I,2,... выбирать итерационные коэффициенты $\overset{(k)}{W}_j$-смещения в виде$^{*)}$

$$\overset{(k)}{W}_j = \overset{(k)}{q}_j(\overset{(k+1)}{W}_j)[1 - \overset{(k)}{\gamma}_j(\overset{(k-1)}{W})] [= (\overset{(k)}{q}_j(\overset{(k-1)}{W}_j) - \overset{(k)}{P}_j(\overset{(k-1)}{W}_j) \cdot \tau_j / \overset{(k)}{q}_{j-1}(\overset{(k-1)}{W}))] \tag{3.2}$$

для методов $\mathcal{M}[\Lambda,(W-d)]$ -множества и $\{([GB(G)],Wd),$ $([GB(\Lambda)],Wd)\}$ -методов, а для методов $(\mathcal{M}[G,(W-d)])$-множества и $\{([\Lambda B(\Lambda)],Wd)$ и $([\Lambda B(G)],Wd)\}$ – методов соответственно – ($\overset{(k)}{\tilde{W}}_j$ -смещения) в виде$^{*)}$

$$\overset{(k)}{\tilde{W}}_j = \overset{(k)}{q}_{j-1}(\overset{(k-1)}{\tilde{W}}_j)(1 - \overset{(k)}{\gamma}_j(\overset{(k-1)}{\tilde{W}}_j))[= (\overset{(k)}{q}_{j-1}(\overset{(k-1)}{\tilde{W}}_j) - \overset{(k)}{P}_j(\overset{(k-1)}{W}_j) \cdot \tau_j / \overset{(k)}{q}_j(\overset{(k-1)}{W}_j))], \tag{3.3}$$

то имеют место асимптотические равенства (т.е. ускорение сходимости)

$$\left\{ \frac{\overset{(k)}{P}_j(\overset{(k-1)}{W}_j)}{\overset{(k)}{P}_j} \right\}_{j=2}^{m} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \left\{ \frac{\overset{(k)}{P}_j(\overset{(k-1)}{\tilde{W}})}{\overset{(n)}{P}_j} \right\}_{j=2}^{m} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{3.4}$$

для множества приведенных выше методов.

Доказательство выполним для одного из перечисленных методов (например, для $[(T-\lambda)_\Lambda\, Wd]$ -метода) при произвольном j. Пусть $\overset{(k)}{W}_j = \overset{(k)}{q}_j(1 - \overset{(k)}{\gamma}_j)$, тогда из $(2.14)_{2)}$ и $(2.14)_{3)}$, учитывая $(2.14)_{I)}$, получаем

$$\overset{(k+1)}{P}_j(\overset{(k)}{W}_j) \overset{(2.14)_3)}{=\!=} \prod_{n=1}^{k} \left[\frac{\overset{(n)}{\lambda}_j(\overset{(n-1)}{W}_j)}{\overset{(n)}{\lambda}_{j-1}(\overset{(n-1)}{W}_j)} \right] \cdot \overset{(1)}{P}_j \overset{(2.14)_2)}{=\!=} \prod_{n=1}^{k} \left[\frac{\overset{(n)}{q}_j(\overset{(n-1)}{W}_j) - \overset{(n)}{W}_j - \overset{(n)}{T}_j(\overset{(n-1)}{W}_j)}{\overset{(n)}{\lambda}_{j-1}(\overset{(n-1)}{W}_j)} \right] \cdot \overset{(1)}{P}_j \overset{(3.2)}{=\!=}$$

*) Однако такой выбор сдвигов (≡ смещений) $\overset{(k)}{W}_j$ и $\overset{(k)}{\tilde{W}}_j$ в $GB(\Lambda),Wd$ и $\Lambda B(G),Wd$ – методах приводит к плохой точности оценок λ.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\gamma}_i(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}) = (\overset{(k)}{P}_i(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j})\cdot \tau_i)/(\overset{(k)}{q}_{i-1}(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j})\cdot \overset{(k)}{q}_i(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}));\ \overset{(k)}{\gamma}_1 = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0;\ i = 2,3,\dots,m\\
&\overset{(k)}{\sigma}_{i-1}(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}) = 1 - \overset{(k)}{\gamma}_{i+1}(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j})\cdot \overset{(k)}{\sigma}{}_i^{-1}(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j});\ \overset{(k)}{\sigma}_m(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}) = \overset{(k)}{\sigma}_{m-1}(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}) = 1;\ i = m-1, m-2,\dots,1\\
&\overset{(k)}{F}_{i-1}(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}) = (\overset{(k)}{P}_i(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j})\cdot \tau_i)/[\overset{(k)}{q}_i(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}) - \overset{(k)}{F}_i(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j})];\ \overset{(k)}{F}_m = \overset{(k)}{F}_0 = 0;\ i = m, m-1,\dots,2\\
&\overset{(k)}{\widetilde{\lambda}}_{i-1}(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}) = \overset{(k)}{q}_{i-1}(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j}) - (\overset{(k)}{P}_i(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j})\tau_i)/\overset{(k)}{\widetilde{\lambda}}_i(\overset{(k-1)}{\widetilde{W}_j});\ \overset{(k)}{\widetilde{\lambda}}_m = \overset{(k)}{q}_m;\ i = m, m-1,\dots,2
\end{aligned}
\right\} \quad (3.22)
$$

Теорема доказана.

Замечание 8. Заканчивая настоящую работу, обратим еще раз внимание на итерационные процедуры включения в алгоритм теоремы I (ускоряющих их сходимость) коэффициентов $\overset{(n)}{W}$ и $\overset{(n)}{\widetilde{W}}$. В соответствии с принципом фиксации (леммы 6 [5] и, что то же, исчерпания [2]) во всех двенадцати ускоренных (по сходимости) методах теоремы I $\overset{(n)}{W}$ (соответственно $\overset{(n)}{\widetilde{W}}$) включаются последовательно. При этом на первом шаге $\overset{(n)}{W} = \overset{(n)}{W}_m$ для всех $2 \le i \le m$ и соответственно $\overset{(n)}{\widetilde{W}} = W$ для всех $2 \le j \le m$. А также

$$\overset{(N_m)}{W} = \sum_{n=1}^{N_m} \overset{(n)}{W}_m \quad \text{и} \quad \overset{(N_2)}{\widetilde{W}} = \sum_{n=2}^{N_2} \overset{(n)}{\widetilde{W}}_2, \qquad (3.23)$$

где N_m и N_2 – соответственно числа итераций, необходимые для выполнения неравенств $|P_m(\overset{(N_m)}{W}_m)| \le \varepsilon$ и $|P_2(\overset{(N_2)}{\widetilde{W}}_2)| \le \varepsilon$ или, что то же самое, получения λ_m и $\widetilde{\lambda}_1$ с достижимой точностью. На втором шаге уже λ_m и $\widetilde{\lambda}_1$ фиксируются и процессы продолжаются соответственно с $\overset{(n)}{W}_{m-1}$ и $\overset{(n)}{\widetilde{W}}_3$ для $2 \le i \le m-1$ и $3 \le j \le m$. При этом

$$\overset{(N_{m-1})}{W} = \sum_{n=N_m+1}^{N_{m-1}} \overset{(n)}{W}_{m-1} + \overset{(N_m)}{W}, \quad \overset{(N_3)}{\widetilde{W}} = \sum_{n=N_2+1}^{N_3} \overset{(n)}{\widetilde{W}}_3 + \overset{(N_2)}{\widetilde{W}}, \qquad (3.24)$$

где N_{m-1} и N_3 есть числа итераций, при которых выполняются соответственно неравенства $|P_{m-1}(\overset{(N_{m-1})}{W})| \le \varepsilon$ и $|P_3(\overset{(N_3)}{\widetilde{W}})| \le \varepsilon$. Указанный процесс фиксации продолжается до $|P_2(\overset{(N_2)}{W})| \le \varepsilon$ и $|P_m(\overset{(N_m)}{\widetilde{W}})| < \varepsilon$. При этом $\overset{(n)}{W}_i$ выбираются в виде (3.2) и $\overset{(n)}{\widetilde{W}}_j$ в виде (3.3). Кроме того (как показывают численные эксперименты на ЭВМ), на первых шагах для матриц, порядки которых $m \geq 200$, включать в итерационные процедуры, ускоряющие смещения $\overset{(n)}{W}$ и $\overset{(n)}{\widetilde{W}}$, лучше после того, когда 20÷30 итераций будут выполнены без них.

Заключение

В заключение настоящей работы отметим следующие полученные выше результаты:

I. Пополнено методами $\mathcal{M}[(\Lambda,\sigma,d),(\widetilde{P},\widetilde{\tau})]$ множество полученных в [I] корректных методов вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида.

2. Построено множество корректных ускоренных методов вычисления полного спектра матриц указанного вида.

3. Предложен (отличный от ранее использованного, например, в [2÷4,6]) метод выбора итерационных коэффициентов $\overset{(k)}{W}_j$ в рамках стратегии смещений и выполнен анализ вопросов ускорения сходимости.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящим исследованиям и предоставленную возможность работы над ними.

Литература

I. Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-45I, Дубна, I988.
2. В.В.Воеводин, Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, I977.
3. В.И.Крылов, В.В.Бобков, П.И.Монастырский. Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. Минск: Наука и техника, I985.
4. FORTRAN による数値計算ハンドブック. I978.
5. Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-452. Дубна, I988.
6. В.П.Ильин, Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, I985.
7. Уилкинсон Райнш, Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ, Линейная алгебра. М.: Машиностроение, I976.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июня I988 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. (2 тома)	7 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р. 00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р. 80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике Алушта, 1986.	4 р. 50 к.
—	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. (2 тома)	13 р. 50 к.
Д1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. (2 тома)	7 р. 35 к.
Д9-87-105	Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1986. (2 тома)	13 р. 45 к.
Д7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна, 1986.	7 р. 10 к.
Д2-87-123	Труды Совещания "Ренормгруппа - 86". Дубна, 1986.	4 р. 45 к.
Д4-87-692	Труды Международного совещания по теории малочастичных и кварк-адронных систем. Дубна, 1987.	4 р. 30 к.
Д2-87-798	Труды VIII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1987.	3 р. 55 к.
Д14-87-799	Труды II Международного симпозиума по проблемам взаимодействия мюонов и пионов с веществом. Дубна, 1987	4 р. 20 к.
Д17-88-95	Труды IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1987.	5 р. 20 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек Р11-88-453

О множествах корректных ускоренных методов вычисления полного спектра трехдиагональных матриц общего вида

Построено множество корректных ускоренных методов вычисления полного спектра матриц общего трехдиагонального вида. Предложен новый способ выбора коэффициентов ускорения.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Im Yen Sec P11-88-453

On Different Types of Correctable Speed-Up Methods for Calculation of Complete General Tridiagonal Matrix Spectrum

Many correctable speed-up methods for calculation of complete general tridiagonal matrix spectrum are developed. A new way of speed-up coefficient choice is proposed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988