объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-88-452 e

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек

СТРАТЕГИЯ СМЕЩЕНИЙ И МНОЖЕСТВА КОРРЕКТНЫХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ ОБЩЕГО ВИДА

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1988

I. Введение

В [I] нами была рассмотрена общая стратегия модификации широко распространенных методов численного нахождения собственных значений для трехдиагональных матриц, все главные верхние угловые миноры которых отличны от нуля, а также построено множество (из пяти не известных ранее) корректных методов практического решения на ЭВМ указанной задачи. Там же была приведена обширная библиография (конечно, не претендующая на полноту) по известным нам результатам в указанной области вычислительной математики.

Учитывая исключительную важность указанной проблемы как в теоретических, так и в практических исследованиях при решении задач математической (теоретической) физики, в настоящей работе мы получим дальнейшие обобщения результатов [I] на более широкий класс матриц указанного типа.

Итак, в [I] были получены следующие эффективные корректные алгоритмы (теоремы I,2) для нахождения собственных значений трехдиагональных матриц:

$$\left(C \equiv \overset{(1)}{C} \right) = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \tag{I.I}$$

все верхние главные угловые миноры которых отличны от нуля и все собственные значения различны, т.е.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_m| > 0 . \tag{I.2}$$

I⁰. Для матриц (I.I), (I.2), у которых $\{r_i \neq 0,\ q_1 \neq 0,\ q_i \neq 0\}_{i=2}^{m}$:

I. <u>(Λ-метод). Если $|\overset{(k+1)}{p_i}| > \varepsilon$</u> для любых к=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\gamma_i} = (\overset{(k)}{p_i}\, r_i)/(\overset{(k)}{q}_{i-1}\cdot \overset{(k)}{q_i}) \ ; \quad \overset{(k)}{\gamma_1} = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0 \ ; \quad i = 2,3,\ldots,m, \\ &\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma_i}\, \overset{(k)}{\Lambda}{}_i^{-1} \ ; \quad \overset{(k)}{\Lambda_1} = \overset{(k)}{\Lambda_2} = 1, \quad \overset{(k)}{\Lambda}_{m+2} = 0 \ ; \quad i = 2,3,\ldots,m, \\ &\overset{(k)}{\lambda_i} = \overset{(k)}{q_i}\, \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} \ , \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ &\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda_i} \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m . \end{aligned}\right] \tag{I.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k+1)}{p_i} = \overset{(k)}{q}{}_i^{2} \cdot \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} \cdot (1 - \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}) \cdot r_i^{-1} \ ; \quad i = 2,3,\ldots,m, \\ &\overset{(k+1)}{q_i} = \overset{(k)}{q_i}\, \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} + \overset{(k)}{q}_{i+1} \cdot (1 - \overset{(k)}{\Lambda}_{i+2}) \ ; \quad \overset{(k)}{q}_{m+1} = 0 \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}\right\} . \tag{I.4}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{p}_{i^*}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации к=к* ⩾ 2 и некотором $i = i^*$, <u>то</u>

$$\left\{ \overset{(k^*+1)}{p_n} = 0 ;\ \overset{(k^*+1)}{q_n} = \overset{(k^*)}{q_n} \ ;\ \overset{(k^*)}{\gamma_n} = 0 ;\ \overset{(k^*)}{\Lambda}_{n+1} = 1 \ ;\ \overset{(k^*)}{\lambda_n} = \overset{(k^*)}{q_n} \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех } k \geqslant k^* . \tag{I.5}$$

2. <u>(τ-метод). Если $|\overset{(k+1)}{p_i}| > \varepsilon$</u> для любых к=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{ll}\overset{(k)}{\gamma}_i = (\overset{(k)}{p}_i\cdot r_i)\cdot(\overset{(k)}{q}{}^{-1}_{i-1}\cdot\overset{(k)}{q}{}^{-1}_i); & \overset{(k)}{\gamma}_1=\overset{(k)}{\gamma}_{m+1}=0;\quad i=2,3,\dots,m,\\ \overset{(k)}{\tau}_i=\overset{(k)}{\gamma}_i\cdot(1-\overset{(k)}{\tau}_{i-1})^{-1}; & \overset{(k)}{\tau}_1=\overset{(k)}{\tau}_{m+1}=0;\quad i=2,3,\dots,m\end{array}\right\} \tag{I.6}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\overset{(k+1)}{p}_i=\overset{(k)}{q}{}^2_i\cdot(1-\overset{(k)}{\tau}_i)\cdot\overset{(k)}{\tau}_i\cdot r_i^{-1}; & i=2,3,\dots,m,\\ \overset{(k+1)}{q}_i=\overset{(k)}{q}_i(1-\overset{(k)}{\tau}_i)+\overset{(k)}{q}_{i+1}\cdot\overset{(k)}{\tau}_{i+1}; & \overset{(k)}{q}_{m+1}=0;\quad i=1,2,\dots,m\\ \lambda_i=\lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{q}_i; & i=1,2,\dots,m\end{array}\right\}. \tag{I.7}$$

Если $|\overset{(k^*)}{p}_{i^*}|\le\varepsilon$ в любой итерации к=к$^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*+1)}{p}_n=0;\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{q}_n;\ \overset{(k^*)}{\gamma}_n=0;\ \overset{(k^*)}{\tau}_n=0;\ \overset{(k^*)}{\lambda}_n=\overset{(k^*)}{q}_n\right\}_{n=i^*}^m \quad \text{для всех } k\geqslant k^*. \tag{I.8}$$

П^0. Для матриц $\overset{(1)}{C}$(I.I), (I.2), у которых только $q_1\ne 0$.

3. (Т-метод). Если $|\overset{(k+1)}{T}_i|>\varepsilon$ для любых к=I,2,..., то

$$\left.\begin{array}{ll}\overset{(k+1)}{T}_i=(\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k+1)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{T}_i; & i=2,3,\dots,m,\\ \overset{(k+1)}{\lambda}_i=\overset{(k)}{\lambda}_i+\overset{(k)}{T}_{i+1}-\overset{(k+1)}{T}_i; & \overset{(k+1)}{T}_1=0=\overset{(k)}{T}_{m+1};\quad i=1,2,\dots,m\\ \lambda_i=\lim_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{\lambda}_i; & i=1,2,\dots,m\end{array}\right\}. \tag{I.9}$$

Если $|\overset{(k^*)}{T}_{i^*}|\le\varepsilon$ в любой итерации к=к$^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*+1)}{T}_n=0,\ \overset{(k^*+1)}{\lambda}_n=\overset{(k^*)}{\lambda}_n\right\}_{n=i^*}^m \quad \text{для всех } k\geqslant k^*, \tag{I.10}$$

где

$$\left.\begin{array}{ll}\overset{(1)}{T}_i=(\overset{(1)}{p}_i r_i)\cdot(\overset{(1)}{q}_{i-1}-\overset{(1)}{T}_{i-1})^{-1}; & \overset{(1)}{T}_1=\overset{(1)}{T}_{m+1}=0;\quad i=2,3,\dots,m\\ \overset{(1)}{\lambda}_i=\overset{(1)}{q}_i-\overset{(1)}{T}_i; & i=1,2,\dots,m\end{array}\right\}. \tag{I.11}$$

4. ((T-λ) -метод). Если $|\overset{(k+1)}{T}_i|>\varepsilon$ для любых к=I,2,..., то

$$\left.\begin{array}{ll}\overset{(k)}{T}_i=(\overset{(k)}{p}_i r_i)\cdot\overset{(k)}{\lambda}{}^{-1}_{i-1}; & \overset{(k)}{T}_{m+1}=0;\quad i=2,3,\dots,m\\ \overset{(k)}{\lambda}_i=\overset{(k)}{q}_i-\overset{(k)}{T}_i; & \overset{(k)}{T}_1=0,\quad i=1,2,\dots,m\end{array}\right\} \tag{I.12}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\overset{(k+1)}{p}_i=(\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{p}_i; & i=2,3,\dots,m,\\ \overset{(k+1)}{q}_i=(\overset{(k)}{\lambda}_i+\overset{(k)}{q}_{i+1})-\overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; & \overset{(k)}{q}_{m+1}=0=\overset{(k)}{\lambda}_{m+1};\quad i=1,2,\dots,m\\ \lambda_i=\lim_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_i=\lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{\lambda}_i; & i=1,2,\dots,m\end{array}\right\}. \tag{I.13}$$

Если $|\overset{(k^*)}{T}_{i^*}|\le\varepsilon$ в любой итерации к=К$^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*)}{T}_n=0;\ \overset{(k^*+1)}{p}_n=0;\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{\lambda}_n\right\}_{n=i^*}^m \quad \text{для всех } k\geqslant k^*. \tag{I.14}$$

5. (λ-метод). Если $|\overset{(k+1)}{p}_i|>\varepsilon$ для любых К=I,2,..., то

$$\left.\begin{array}{ll}\overset{(k)}{\lambda}_i=\overset{(k)}{q}_i-(\overset{(k)}{p}_i\cdot r_i)/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}; & \overset{(k)}{\lambda}_1=\overset{(k)}{q}_1;\quad i=2,3,\dots,m,\\ \overset{(k+1)}{p}_i=(\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{p}_i; & i=2,3,\dots,m,\\ \overset{(k+1)}{q}_i=(\overset{(k)}{\lambda}_i+\overset{(k)}{q}_{i+1})-\overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; & \overset{(k)}{q}_{m+1}=0=\overset{(k)}{\lambda}_{m+1};\quad i=1,2,\dots,m,\\ \lambda_i=\lim_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_i=\lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{\lambda}_i; & i=1,2,\dots,m.\end{array}\right. \tag{I.15}$$

Если $|\overset{(k^*)}{p}_{i^*}|\le\varepsilon$ в любой итерации К=К$^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*)}{\lambda}_n=\overset{(k^*)}{q}_n;\ \overset{(k^*+1)}{p}_n=0;\ \overset{(k^*+1)}{q}_n=\overset{(k^*)}{\lambda}_n\right\}_{n=i^*}^m \quad \text{для всех } k\geqslant k^*. \tag{I.16}$$

При этом скорость сходимости перечисленных выше Λ-, τ-, T-, $(T-\lambda)$-, λ--методов не хуже [I], чем

$$|\overset{(k+1)}{p}_i|=\prod_{n=1}^{k}\left|\frac{\overset{(n)}{\lambda}_i}{\overset{(n)}{\lambda}_{i-1}}\right|\cdot\overset{(1)}{p}_i;\qquad i=2,3,\dots,m;\quad k=1,2\dots \tag{I.17}$$

Здесь $\varepsilon=\begin{cases}0 - \text{в теоретических расчетах}\\ \text{константа, задаваемая разрядной сеткой ЭВМ, в практических}\end{cases}$ вычислениях для представления минимального числа. Для последовательностей $\{\overset{(k)}{\Lambda}_i\}$, $\{\overset{(k)}{\tau}_i\}$ и $\{\overset{(k)}{T}_i\}$ при этом имеют место следующие предельные соотношения:

$$\left\{\lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}=1,\ \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{\tau}_i=0,\ \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{T}_i=0\right\}_{i=2}^m. \tag{I.18}$$

Тогда условия

$$\left.\begin{array}{l}\overset{(k)}{\Lambda}_i=0\to[\overset{(k)}{\Lambda}_{i-1}=\overset{(k)}{\gamma}_{i-1},\ \overset{(k)}{\Lambda}_{i+2}=1,\ \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}=\infty;\ \text{но}\ \overset{(k)}{\Lambda}_i\cdot\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}\equiv-\overset{(k)}{\gamma}_i]\\ \overset{(k)}{\tau}_{i-1}=1\to[\overset{(k)}{\tau}_i=-\infty,\ \overset{(k)}{\tau}_{i+1}=0,\ \overset{(k)}{\tau}_{i+2}=\overset{(k)}{\gamma}_{i+2};\ \text{но}\ \overset{(k)}{\tau}_i\cdot\overset{(k)}{\tau}_{i+1}\equiv-\overset{(k)}{\gamma}_{i+1}]\\ \overset{(k)}{T}_{i-1}=\overset{(k)}{q}_{i-1}\to[\overset{(k)}{T}_i=-\infty,\ \overset{(k)}{T}_{i+1}=0,\ \overset{(k)}{T}_{i+2}=\overset{(k)}{p}_{i+2}r_{i+2}/\overset{(k)}{q}_{i+1};\ \text{но}\ \overset{(k)}{T}_i\overset{(k)}{T}_{i+1}=-\overset{(k)}{p}_{i+1}\cdot r_{i+1}]\end{array}\right\} \tag{I.19}$$

являются достаточными, а условия

$$\overset{(k)}{\lambda}_n=0\qquad(1\le n\le i-1) \tag{I.20}$$

необходимыми и достаточными соответственно для обращения в нуль $(i-1)$-верхнего главного углового минора в итерационной матрице $\overset{(k)}{C}$(К=I,2,..). Перечисленные выше алгоритмы получены на основе результатов [2]

$$\left.\begin{array}{l}\overset{(k)}{\Delta}{}^i_1=\prod_{n=1}^{i}(\overset{(k)}{q}_n\overset{(k)}{\Lambda}_{n+1})\to\det(\overset{(k)}{C})=\prod_{n=1}^{m}\overset{(k)}{q}_n\cdot\overset{(k)}{\Lambda}_{n+1},\\ \overset{(k)}{\Lambda}_j=0\to[\overset{(k)}{\Lambda}_{j-1}=\overset{(k)}{\gamma}_{j-1},\ \overset{(k)}{\Lambda}_{j+2}=1,\ \overset{(k)}{\Lambda}_{j+1}=\infty,\quad \overset{(k)}{\Lambda}_j\cdot\overset{(k)}{\Lambda}_{j+1}\equiv-\overset{(k)}{\gamma}_j]\end{array}\right\},\ \text{где} \tag{I.21}$$

$$\prod_{n=1}^{j+1}\overset{(k)}{\Lambda}_n=\begin{cases}0,\ \text{если}\ \overset{(k)}{\Lambda}_{j+1}=0,\\ \overset{(k)}{\Lambda}_1\dots(\overset{(k)}{\Lambda}_n\cdot\overset{(k)}{\Lambda}_{n+1})\dots\overset{(k)}{\Lambda}_j\cdot\overset{(k)}{\Lambda}_{j+1}\ne0,\ \text{если}\ \overset{(k)}{\Lambda}_n=0\ \text{для любого}\ 3\le n\le j,\end{cases} \tag{I.22}$$

где $\{\overset{(k)}{\Lambda}_i\}$ есть (I.2)$_{2)}$ и (I.I9)$_{I)}$, а $\overset{(k)}{\Delta}{}^i_1$ -(i-верхний) главный угловой минор в итерационной матрице $\overset{(k)}{C}$(I.I).

В [2] показано также, что (i-нижние) главные угловые миноры трехдиагональной матрицы $\overset{(k)}{C}$ с $\{\overset{(k)}{q}_i$ -ненулевыми$\}$ элементами вычисляются в виде

$$\overset{(k)}{\Delta}{}^m_i=\prod_{n=i}^{m}\overset{(k)}{q}_n\prod_{n=i-1}^{m}\overset{(k)}{\sigma}_n\to\det(\overset{(k)}{C})=\prod_{n=1}^{m}\overset{(k)}{q}_n\prod_{n=0}^{m}\overset{(k)}{\sigma}_n,\quad \text{где} \tag{I.23}$$

$$\prod_{n=i-1}^{m}\overset{(k)}{\sigma}_n=\begin{cases}0,\ \text{если}\ \overset{(k)}{\sigma}_{i-1}=0,\\ \overset{(k)}{\sigma}_{i-1}\dots(\overset{(k)}{\sigma}_{n-1}\cdot\overset{(k)}{\sigma}_n)\dots\overset{(k)}{\sigma}_m\ne0,\ \text{если}\ \overset{(k)}{\sigma}_n=0\ \text{для любого}\ i\le n\le m-2\end{cases} \tag{I.24}$$

$$\overset{(k)}{\sigma}_n=0\to[\overset{(k)}{\sigma}_{n+1}=\overset{(k)}{\gamma}_{n+2},\ \overset{(k)}{\sigma}_{n-2}=1,\ \overset{(k)}{\sigma}_{n-1}=\infty,\ \text{но}\ (\overset{(k)}{\sigma}_{n-1}\cdot\overset{(k)}{\sigma}_n)\equiv-\overset{(k)}{\gamma}_{n+1}]. \tag{I.25}$$

В [3] показано x), что для последовательностей $\{\Lambda_i\}$ и $\{\sigma_i\}$ имеют место следующие аддитивно-мультипликативные "аннигиляционные"

x) Приводимые ниже соотношения справедливы, как показано в [3], в общем операторном случае, следовательно, они будут иметь место и в скалярном случае. При этом мы, не теряя общности, опускаем К-номер итерации.

равенства (в случае $det(\overset{(1)}{C}) \neq 0$ и $\{\Delta_1^i \neq 0 \neq \Delta_i^m\}_{i=1}^m$)

$$\hat{B}_{ii}^{-1}(\Lambda) = [\tilde{B}_{ii}^{-1}(\Lambda, G) = (\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - 1)] = \tilde{B}_{ii}^{-1}(G), \tag{I.26}$$

$$\begin{cases} \hat{B}_{ii}(\Lambda) = \Lambda_{i+1}^{-1} + C_{i+1}\hat{B}_{i+1\,i+1}(\Lambda)\cdot\beta_{i+1}; \quad \hat{B}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1}; \quad i = m-1, \dots, 1 & (I.27) \\ \left.\begin{array}{l} C_{i+1} = \Lambda_{i+1}^{-1}\tilde{z}_{i+1}; \quad \beta_{i+1} = \tilde{P}_{i+1}\Lambda_{i+1}^{-1} \\ \tilde{P}_i = P_i q_{i-1}^{-1}; \quad \tilde{z}_i = z_i \cdot q_i^{-1}, \\ \Lambda_{i+1} = 1 - \gamma_i \Lambda_i^{-1}; \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1, \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{array}\right\} & (I.28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_{ii}(G) = G_{i-1}^{-1} + \tilde{C}_i \tilde{B}_{i-1\,i-1}(G)\cdot\tilde{\beta}_i; \quad \tilde{B}_{11}(G) = G_0^{-1}; \quad i = 2, 3, \dots, m & (I.29) \\ \left.\begin{array}{l} \tilde{C}_i = -(G_{i-1}^{-1}\cdot\tilde{P}_i); \quad \tilde{\beta}_i = -(\tilde{z}_i G_{i-1}^{-1}) \\ \tilde{P}_i = P_i q_{i-1}^{-1}; \quad \tilde{z}_i = z_i q_i^{-1} \\ G_{j-1} = 1 - \gamma_{j+1} G_j^{-1}; \quad G_m = G_{m-1} = 1; \quad j = m-1, \dots, 1 \end{array}\right\}. & (I.30) \end{cases}$$

Имеют место также (для любых $I \leq i \leq m$) <u>два равенства</u>

$$\prod_{n=i}^{m} \frac{\Lambda_{n+1}}{G_n} = [\tilde{B}_{ii}^{-1}(\Lambda, G) = (G_{i-1} + \Lambda_{i+1} - 1)] = \prod_{n=1}^{i} \frac{G_{n-1}}{\Lambda_n}, \tag{I.3I}$$

которые следуют <u>из четырех</u> различных мультипликативных представлений $\tilde{B}_{ii}$ (из (2.4) [4] для операторного случая). Как показано в [I], приведенные выше алгоритмы корректны[x)] для матриц $\overset{(1)}{C}$(I.I), все главные угловые миноры которых отличны от нуля.

<u>Замечание I</u>. Как следует из (I.2I), а также (I.I4) из [I] (т.е. равенств $\overset{(k)}{z}_{ii} = \overset{(\infty)}{\Delta}{}_1^i / \overset{(\infty)}{\Delta}{}_1^{i-1}$) условия $\{\overset{(k)}{\Delta}_{i+1} \neq 0\}_{i=2}^m$ являются необходимыми и достаточными для существования (в случае $\{\overset{(1)}{q}_i \neq 0\}_{i=1}^m$) факторизованного представления $\overset{(k)}{C} = \overset{(k)}{L}\cdot\overset{(k)}{R}$ <u>итерационных матриц</u> $\overset{(k)}{C}$ <u>Бауэра</u> (LR-алгоритма). В частности, при K=I указанные условия (т.е. $\{\overset{(1)}{\lambda}_{i+1} \neq 0\}_{i=2}^m$) являются необходимыми и достаточными для $\{\overset{(1)}{\Delta}{}_1^i \neq 0\}_{i=1}^m$ – всех верхних главных угловых миноров исходной матрицы $\overset{(1)}{C}$, если $\{\overset{(1)}{q}_i \neq 0\}_{i=1}^m$. <u>Если же</u> некоторые из <u>$\overset{(1)}{\lambda}_i = 0$</u>, то имеют место эквивалентные равенства (I.I9) и (I.20), которые, вообще говоря, не зависят от факторизаций Бауэра. При этом в соответствии с представлением 5 (теоремы 7 [3] для скалярного случая) формальное представление $\overset{(k)}{C} = \overset{(\infty)}{L}\overset{(\infty)}{R}$ (K=I,2,...) существует с точностью до пяти неопределенных элементов (Λ_{i+1}; $(P_i/q_{i-1})\cdot\Lambda_i^{-1}$; $(z_i/q_i)\cdot\Lambda_i^{-1}$; $(P_{i+1}/q_i)\cdot\Lambda_{i+1}^{-1}$; $(z_{i+1}/q_{i+1})\cdot\Lambda_{i+1}^{-1}$).

В следующем параграфе мы снимем ограничения (требования отличия от нуля элементов исходной матрицы $\overset{(1)}{C}$, т.е. $\{\overset{(1)}{z}_n \neq 0, \overset{(1)}{P}_n \neq 0, \overset{(1)}{q}_1 \neq 0, \overset{(1)}{q}_n \neq 0\}_{n=2}^m$, а также отличия от нуля всех $\{\overset{(1)}{\Delta}{}_1^i \neq 0\}_{i=1}^m$, включая $\Delta_1^m \neq 0 \neq det(\overset{(1)}{C})$) главных верхних угловых миноров $\overset{(1)}{C}$ для матриц общего вида, удовлетворяющих следующему определению.

<u>Определение I</u>. Здесь и всюду далее под трехдиагональными матрицами общего вида будем понимать матрицы вида C(I.I),(I.2), у которых

x) Под корректностью (как и в [I]) здесь и всюду далее понимается возможность осуществления устойчивого вычислительного процесса до конца (без срывов).

<u>кроме того</u>:

I. Возможно обращение в нуль только λ_m, т.е. $\lambda_m = 0$, что приводит к $det(\overset{(1)}{C}) = 0$.

2. Могут быть нулевыми <u>лишь некоторые</u> элементы $\overset{(1)}{C}$ –матрицы $\overset{(1)}{q}_i$ и $\overset{(1)}{z}_n$ (при любых i и n), т.е. $\overset{(1)}{q}_i = 0$ и(или) $\overset{(1)}{z}_n = 0$. На элементы $\overset{(1)}{P}_n$ никаких ограничений не накладывается.

3. Могут быть нулевыми <u>лишь изолированные</u> главные угловые верхние Δ_1^i (нижние Δ_i^m) миноры матрицы $\overset{(1)}{C}$, т.е. не может быть одновременно ($\Delta_1^{i-1} = 0 = \Delta_1^i$) либо ($\Delta_i^m = 0 = \Delta_{i+1}^m$).

<u>Замечание I</u>. У матриц $\overset{(1)}{C}$ общего вида (в соответствии с определением I) существуют и кратные λ, а $\overset{(1)}{C}$ могут быть и вырожденными, если $\lambda_m = 0$. Пока что нас будет интересовать случай (I.2).

2. <u>Стратегия смещений и корректные методы решения спектральной задачи для трехдиагональных матриц общего вида на основе отношений главных верхних угловых миноров</u>

В качестве общей стратегии обобщения результатов [I], приведенных выше, с одновременным отказом от ограничений типа отличие от нуля элементов $\{\overset{(1)}{q}_1 \neq 0, \overset{(1)}{q}_n \neq 0, \overset{(1)}{z}_n \neq 0, \overset{(1)}{P}_n \neq 0\}_{n=2}^m$ и верхних главных угловых миноров $\{\overset{(1)}{\Delta}{}_1^i \neq 0\}_{i=1}^m$ исходной матрицы $\overset{(1)}{C}$(I.I), мы воспользуемся известным приёмом сдвигов [6] и следующим результатом, который приводится здесь с целью полноты изложения.

<u>Замечание 2 (Лемма I)</u>. Пусть $\overset{(1)}{C}$(I.I) матрица, у которой либо некоторые $q_i = 0$, либо $\Delta_1^i = 0$ $(\Delta_i^m = 0)$ для любого i=I,2,...,m. Тогда существует аддитивно-подобное преобразование

$$\overset{(1)}{\tilde{C}} = \overset{(1)}{C} + dE, \quad \text{где} \tag{2.I}$$

E – единичная матрица, а d – некоторое число, такое, что $\{(\overset{(1)}{\tilde{q}}_i = q_i + d) \neq 0; (\tilde{\Delta}_i^m \neq 0)$ и $(\tilde{\Delta}_1^i \neq 0)\}_{i=1}^m$. При этом собственные значения $(\lambda, \tilde{\lambda})$ и собственные векторы $(u, \tilde{u})$ операторов $\overset{(1)}{C}$ и $\overset{(1)}{\tilde{C}}$, т.е.

$$\overset{(1)}{C}u = \lambda u \quad \text{и} \quad \overset{(1)}{\tilde{C}}\tilde{u} = \tilde{\lambda}\tilde{u}, \tag{2.2}$$

связаны соотношениями:

$$\lambda = \tilde{\lambda} - d \quad \text{и} \tag{2.3}$$

I. Если все компоненты $\{u_i(\lambda_j)\}_{i=1}^m$ каждого из собственных векторов $u(\lambda_j)$, (j=I,2,...,m) нормированы на величину – $const\, j$ (в общем случае $Const\, j \neq Const\, n$ при $j \neq n$) и соответственно все компоненты $\{\tilde{u}_i(\tilde{\lambda}_j)\}_{i=1}^m$ каждого из собственных векторов $\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j)$ нормированы на величину – $Const\, j$ (в общем случае $Const\, j \neq Const\, n'$ при $j \neq n'$), то

$$\tilde{u}_i(\tilde{\lambda}_j) = [b(\lambda_j) = \|\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j)\| / \|u(\lambda_j)\|]\cdot u_i(\lambda_j) \tag{2.4}$$

$$\tilde{u}_i(\tilde{\lambda}_j) = [b = \|\tilde{u}(\tilde{\lambda})\| / \|u(\lambda)\|]\cdot u_i(\lambda_j), \quad \text{если} \begin{cases} \|u(\lambda_j)\| = \|u(\lambda_n)\|, n \neq j; \\ \|\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j)\| = \|\tilde{u}(\tilde{\lambda}_n)\|, n \neq j; \end{cases} \tag{2.5}$$

для любых $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,m$.

II. Если же собственные векторы $u(\lambda_j)$ и $\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j)$ представлены в общем виде (= с произвольными нормирующими множителями), т.е.

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}(\lambda_j) &= diag\,[d_i(\lambda_j)] \quad u(\lambda_j) \\ \hat{u}(\tilde{\lambda}_j) &= diag\,[\tilde{d}_i(\tilde{\lambda}_j)] \quad \tilde{u}(\tilde{\lambda}_j) \end{aligned}\right\}, \tag{2.6}$$

где невырожденные диагональные матрицы $diag\,[d_i(\lambda_j)]$ и $diag\,[\tilde{d}_i(\tilde{\lambda}_j)]$ в общем случае не равны между собой и априори заданы , а векторы $u(\lambda_j)$ и $\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j)$ в свою очередь (в общем случае) удовлетворяют условиям нормировки, сформулированным в пункте I, то

$$\tilde{u}_i(\tilde{\lambda}_j) = a_i(\lambda_j)\, u_i(\lambda_j) \qquad \text{для всех } i=1,2,\dots,m, \text{ где} \tag{2.7}$$

$$a_i(\lambda_j) = [d_i(\lambda_j)/\tilde{d}_i(\tilde{\lambda}_j)]\cdot b(\lambda_j), \qquad \text{а} \tag{2.8}$$

$b(\lambda_j)$ определено в (2.4), (2.5).

<u>Доказательство</u>. Пусть сначала $d\neq 0$ в (2.I) известно. Тогда, определив $\tilde{\lambda}$ из $(2.2)_{2)}$, обычно находят λ (2.3) и u $(2.2)_{I)}$, а задачу (2.4), (2.7)+(2.8) обычно не рассматривают. Для доказательства (2.4) и (2.7)+(2.8) введем Δu , которые удовлетворяют равенствам

$$\Delta u = \tilde{u} - u\ ; \qquad \overset{(1)}{C}\,\Delta u = \lambda \Delta u \tag{2.9}$$

и получаются после вычитания из $(2.2)_{2)}$ равенства $(2.2)_{I)}$, если воспользоваться (2.3). Равенство $(2.9)_{2)}$, т.е. $\overset{(1)}{C}\,\Delta u = \lambda\,\Delta u$, указывает (при выполнении равенства $(2.2)_{I)}$ на неоднозначность проблемы собственных функций при заданных собственных значениях λ . На самом деле (как известно, например, [5]), собственные функции исходной задачи $\overset{(1)}{C}u = \lambda u$ (2.2) при заданных собственных значениях λ определяются неоднозначно (а с точностью до нормировочных множителей) в силу неоднозначности мультипликативных преобразований подобия

$$\overset{(1)}{C}u = \lambda u \to [T(T^{-1}\overset{(1)}{C}T)(T^{-1}u = \tilde{u}) = \lambda u] \to \{diag\,(\lambda_i)\tilde{u} = \lambda\tilde{u}\} \to$$
$$\to \{[D\,diag\,(\lambda_i)\cdot D^{-1}]\,\tilde{u} = \lambda\tilde{u}\} \to [diag\,(\lambda)\cdot\tilde{\tilde{u}} = diag\,(\lambda)\cdot\tilde{\tilde{u}}]\,,$$

где $\tilde{\tilde{u}} = D^{-1}\tilde{u} = D^{-1}T^{-1}u$, а $D = diag\,(d_i)$ и $(d_i\neq 0)$ – любые отличные от нуля числа. Следовательно, матрицы T-преобразования подобия (диагонализации $\overset{(1)}{C}$) определены с точностью до умножения справа на произвольную (невырожденную) диагональную матрицу D , так как $D^{-1}T^{-1} = (TD)^{-1}$ и собственные векторы $\tilde{\tilde{u}}$ удовлетворяют при заданном λ исходной задаче $(2.2)_{I)}$, т.е.

$$\overset{(1)}{C}\,\tilde{\tilde{u}} = \tilde{\tilde{\lambda}}\,\tilde{\tilde{u}}\,. \tag{2.10}$$

При этом задачи $(2.2)_{I)}$ и (2.I0) в силу $\lambda = \tilde{\tilde{\lambda}}$ и $[\tilde{\tilde{u}} = (TD)^{-1}u]$ обычно принято называть мультипликативно-подобными или просто подобными.

<u>Замечание 3 (Определение 2)</u>. Будем далее (в отличие от мультипликативного подобия, которое продемонстрировали выше и при котором сохраняются собственные значения $\lambda = \tilde{\tilde{\lambda}}$, но $\tilde{\tilde{u}} = (TD)^{-1}u$)), преобразование (2.I), при котором собственные значения связаны аддитивным об-

разом (2.3), а собственные векторы мультипликативно в виде (2.4) и (2.7)+(2.8), называть аддитивно – подобными[x)].

Далее, для доказательства (2.4) и (2.7)+(2.8) отметим, что при одних и тех же λ и $\overset{(1)}{C}$ имеют место равенства (2.9) и $(2.2)_{I)}$ при условиях $(2.9)_{I)}$, т.е.

$$\overset{(1)}{C}u = \lambda u\ , \qquad \overset{(1)}{C}\,\Delta u = \lambda\Delta u\ , \quad \text{где} \quad \Delta u = \tilde{u} - u\,. \tag{2.11}$$

Тогда (в силу отмеченного выше мультипликативного подобия в общем случае для любых операторов А и В) имеют место равенства

$$\left\{\begin{aligned} A\Psi &= \lambda_A\Psi \\ BX &= \lambda_B X \end{aligned}\right\} \xrightarrow{[B = (TD)A(TD)^{-1}]} [(\lambda_B = \lambda = \lambda_A),\ X(\lambda_i) = (TD)^{-1}\Psi(\lambda_i)] \tag{2.12}$$

для всех $i = 1,2,\dots,m$.

Рассматривая теперь вместо $\{\ \}$ – левой части (2.I2) задачу (2.II), т.е. заменяя всюду в (2.I2) А и В на оператор $\overset{(1)}{C}$ и $[\lambda_B = \lambda = \lambda_A,\ \Psi = u$ и $X = \Delta u]$, получаем

$$\overset{(1)}{C} = (TD)^{-1}\ \overset{(1)}{C}\,(TD); \qquad \Delta u = (TD)^{-1}u\,. \tag{2.13}$$

Откуда (в силу $(2.13)_{I)}$) имеем

$$(TD)^{-1} = diag\,(D_i(\lambda_j)) = diag\,(D(\lambda_j))\,,$$
$$\Delta u(\tilde{\lambda}_j, \lambda_j) = \Delta u(\lambda_j) = diag\,[D(\lambda_j)]\cdot u(\lambda_j) = D(\lambda_j)\cdot u(\lambda_j)\,.$$

Далее, учитывая $\Delta u = \tilde{u} - u$, получаем

$$\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j) = [1 + D(\lambda_j)]\cdot u(\lambda_j) = b(\lambda_j)\,u(\lambda_j) \qquad \text{для всех } j = 1,2,\dots,m. \tag{2.14}$$

Итак, при аддитивно-подобных преобразованиях все собственные значения обретают одинаковое d-смещение (2.3), а каждый собственный вектор $b(\lambda_j)$ – сжатие (растяжение) в общем случае. Однако вопрос равномерности растяжения (сжатия) в самом общем случае требует дополнительного анализа. На самом деле, пусть предварительно ничего не известно об аддитивной связи (2.I) между матрицами $\overset{(1)}{C}$ и $\overset{(2)}{C}$. Тогда (как следует из приведенных выше рассуждений) общий вид(отличных от тождественного нуля) собственных векторов, отвечающих собственным значениям λ_j и $\tilde{\lambda}_j$ для $(2.2)_{I)}$ и $(2.2)_{2)}$ (в соответствии с общей концепцией мультипликативного подобия), можно было бы записать в виде (2.6). При этом для нормирующих множителей в (2.6) в общем случае имеем $\{d_i(\lambda_j) \neq d_n(\lambda_j)$ и $\tilde{d}_i(\tilde{\lambda}_j) \neq \tilde{d}_n(\tilde{\lambda}_j)$; $d_i(\lambda_j)\neq 0$; $\tilde{d}_n(\tilde{\lambda}_j)\neq 0$ при $i\neq n\ \}_{i,n,j=1}^{m}$. Тогда для каждого из собственных векторов общего вида (2.6) $\hat{u}(\lambda_j)$ и $\hat{\tilde{u}}(\tilde{\lambda}_j)$, взятых со своими нормировочными множителями, будут также справедливы равенства

$$\overset{(1)}{C}\ \hat{u}(\lambda_j) = \lambda_j\,\hat{u}(\lambda_j)\,, \qquad \overset{(2)}{C}\ \hat{\tilde{u}}(\tilde{\lambda}_j) = \tilde{\lambda}_j\,\hat{\tilde{u}}(\tilde{\lambda}_j)\,. \tag{2.15}$$

<u>Учтем теперь, что матрицы</u> $\overset{(1)}{C}$ и $\overset{(2)}{C}$, а также их собственные значения

x) Данное выше определение, как видим, отличается от известного (например, [5]) определения (принципа) сдвигов в силу (2.4) и (2.7)+(2.8).

связаны (как и прежде) равенствами (2.I) и (2.3). Тогда аналогично тому, как поступили выше для функций $\tilde{u}(\tilde{\lambda})$ и $u(\lambda)$, можем для функций $\hat{u}(\lambda_j)$ и $\hat{\hat{u}}(\tilde{\lambda}_j)$ записать (с учетом (2.I5), (2.I), (2.3) и (2.I3)) равенства

$$\overset{(1)}{C}\,\Delta u(\tilde{\lambda}_j,\lambda_j)=\lambda_j\,\Delta u(\tilde{\lambda}_j,\lambda_j),\quad \overset{(1)}{C}\,\hat{u}(\lambda_j)=\lambda_j\,\hat{u}(\lambda_j), \tag{2.I6}$$

$$\Delta u(\tilde{\lambda}_j,\lambda_j)=diag\,(D(\lambda_j))\cdot\hat{u}(\lambda_j)\,,\quad \text{где} \tag{2.I7}$$

обозначим

$$\Delta u(\tilde{\lambda}_j,\lambda_j)=\hat{\hat{u}}(\tilde{\lambda}_j)-\tilde{u}(\lambda_j)\,. \tag{2.I8}$$

Из (2.I7) и (2.I8) (с учетом (2.6)) получаем

$$\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j)=diag\,[a_i(\lambda_j)]\,u(\lambda_j)\,,\quad \text{где} \tag{2.I9}$$

$$a_i(\lambda_j)=\frac{d_i(\lambda_j)}{\tilde{d}_i(\tilde{\lambda}_j)}\cdot b(\lambda_j),\quad \tilde{\lambda}_j=\lambda_j+d,\quad b(\lambda_j)=D(\lambda_j)+1\,. \tag{2.20}$$

Итак, показали справедливость утверждения леммы при условии, что произвольное вещественное d в (2.I) существует. Вопрос о существовании d (и, следовательно, практическом выборе его при вычислениях на ЭВМ) по сути не представляет трудностей. Например, можно выбрать в качестве d минимальное из вещественных чисел, обеспечивающих выполнение достаточного признака строго положительной (отрицательной) определенности матрицы $\overset{(1)}{C}$, т.е.

$$\left.\begin{array}{ll} |\overset{(1)}{q}_1+d|\geq|\overset{(1)}{z}_2|\,;\ \ |\overset{(1)}{q}_m+d|\geq\overset{(1)}{p}_m\ ; & \text{для}\ \ i=1,\,m \\ |\overset{(1)}{q}_i+d|\geq|\overset{(1)}{z}_{i+1}|+|\overset{(1)}{p}_i| & \text{для всех}\ \ i=2,3,\ldots,m-1 \end{array}\right\}, \tag{2.2I}$$

где в неравенствах (2.2I) хотя бы одно является строгим (>) неравенством. Лемма доказана.

<u>Следствие I</u>. Поскольку равенства (2.4)+(2.5), а также (2.7)+(2.8) верны при любых i из интервала $1\leq i\leq m$ для любых собственных значений λ_j и $\tilde{\lambda}_j$, то в случае, когда первые компоненты $u_1(\lambda_j)$ и $\tilde{u}_1(\tilde{\lambda}_j)$ собственных функций $u(\lambda_j)$ и $\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j)$ матриц $\overset{(1)}{C}$ и $\overset{(1)}{C}$ выбираются одинаковыми (например, равными I), $b(\lambda_j)=1$. И, следовательно, будут выполняться при этих условиях равенства $\|\tilde{u}(\tilde{\lambda}_j)\|=\|u(\lambda_j)\|$ в (2.4)+(2.5), а также $\tilde{u}_i(\tilde{\lambda}_j)=[d_i(\lambda_j)/\tilde{d}_i(\lambda_j)]\cdot u_i(\lambda_j)$ в (2.7).

<u>Замечание 4</u>. Итак, если у исходной матрицы $\overset{(1)}{C}$(I.I) имеются один (или несколько) нулевых диагональных элементов $\overset{(1)}{q}_n=0$ либо один или несколько нулевых верхних (нижних) главных угловых миноров $\Lambda_n=0$ или $\overset{(1)}{\varepsilon}_n=0$, то, выбрав смещение d (в соответствии с (2.2I)), полученные в [I] (и приведенные выше) алгоритмы применим для решения спектральной задачи матрицы $\overset{(1)}{C}$. При этом, как показано в [I], указанные вычислительные процессы будут корректными.

<u>Замечание 5</u>. Пусть у исходной матрицы $\overset{(1)}{C}$(I.I), помимо равенства нулю отдельных диагональных элементов $\overset{(1)}{q}_n=0$ и отдельных верхних главных угловых миноров $\Lambda_n=0$, обращаются в нуль и некоторые из внедиагональных элементов, например $\overset{(1)}{p}_n=0$ (или $\overset{(1)}{z}_n=0$). Тогда матрицу $\overset{(1)}{C}$

разбивают на две матрицы (в силу ее разложимости) и для каждой из ее частей отдельно решают спектральную задачу с учетом связи между ними (например, [5]).

Ниже мы приведем результат, который в рамках единого метода учитывает все возможные (отмеченные выше) особенности матрицы $\overset{(1)}{C}$(I.I). При этом мы сохраняем определения и обозначения, принятые в [I].

<u>Теорема I</u>. Пусть $\overset{(1)}{C}$(I.I)+(I.2) – трехдиагональная матрица общего вида (в соответствии с определением I). Тогда имеют место следующие $m(\Lambda,d)$– множества корректных алгоритмов для вычисления ее собственных значений:

I°. <u>(Λ–метод). Если $|p_i^{(k+1)}|>\varepsilon$</u> для любых К=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_i^{(k)}=(p_i^{(k)}z_i)/(q_{i-1}^{(k)}q_i^{(k)})\,;\quad \gamma_1^{(k)}=\gamma_{m+1}^{(k)}=0\,;\quad i=2,3,\ldots,m, \\ \Lambda_{i+1}^{(k)}=1-\gamma_i^{(k)}\Lambda_i^{(k)-1}\,;\quad \Lambda_1^{(k)}=\Lambda_2=1,\quad \Lambda_{m+2}^{(k)}=0\,;\quad i=2,3,\ldots,m, \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_i^{(k+1)}=\begin{cases}[q_i^{(k)2}\Lambda_{i+1}^{(k)}(1-\Lambda_{i+1}^{(k)})]/z_i\,, & \text{если}\ z_i\neq0\ \text{и}\ p_i^{(k)}\neq0, \\ (q_i^{(k)}\cdot p_i^{(k)})/(q_{i-1}^{(k)}\cdot\Lambda_i^{(k)})\,, & \text{если}\ z_i=0\ \text{и}\ p_i^{(k)}\neq0, \\ 0,\ \text{если}\ z_i=0\ \text{и}\ p_i^{(k)}=0\,; & i=2,3,\ldots,m \end{cases} \\ q_i^{(k+1)}=\begin{cases}q_i^{(k)}\Lambda_{i+1}^{(k)}+q_{i+1}^{(k)}(1-\Lambda_{i+2}^{(k)})\,, & \text{если}\ z_i\neq0\neq p_i^{(k)} \\ q_i^{(k)}+q_{i+1}^{(k)}\gamma_{i+1}^{(k)}\,,\ \text{если}\ z_i=0\ \text{и}\ p_i^{(k)}\neq0 & (\text{или})\,p_i^{(k)}=0);\ q_{m+1}^{(k)}=0 \\ i=1,2,3,\ldots,m \end{cases} \end{array}\right\} \tag{2.23}$$

$$\left.\begin{cases} \lambda_i^{(k)}=q_i^{(k)}\Lambda_{i+1}^{(k)} \\ \lambda_i=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}q_i^{(k)}\,, & \text{если}\ \ d=0 \\ \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{(k)}-d=\lim\limits_{k\to\infty}q_i^{(k)}-d\,, & \text{если}\ \ d\neq0\,,\ \ i=1,2,3,\ldots,m. \end{cases}\end{cases}\right\} \tag{2.24}$$

Если $|p_{i^*}^{(k^*)}|\leq\varepsilon$ в любой итерации К=К$^{x}\geq2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\left\{p_n^{(k^*+1)}=0\,;\ q_n^{(k^*+1)}=q_n^{(k^*)}\,;\ \gamma_n^{(k^*)}=0\,;\ \Lambda_{n+1}^{(k^*)}=1;\ \lambda_n^{(k^*)}=q_n^{(k^*)}\right\}_{n=i^*}^{m}\ \ \text{для всех}\ \ k\geq k^*. \tag{2.25}$$

2°. <u>(τ_Λ–метод). Если $|p_i^{(k+1)}|>\varepsilon$</u> для любых К=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_i^{(k)}=(p_i^{(k)}\cdot z_i)/(q_{i-1}^{(k)}\cdot q_i^{(k)})\,;\quad \gamma_1^{(k)}=\gamma_{m+1}^{(k)}=0\,;\quad i=2,3,\ldots,m, \\ \tau_i^{(k)}=\gamma_i^{(k)}/(1-\tau_{i-1}^{(k)})\,;\quad \tau_1^{(k)}=0=\tau_{m+1}^{(k)}\,;\quad i=2,3,\ldots,m, \end{array}\right\} \tag{2.26}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_i^{(k+1)}=\begin{cases}[q_i^{(k)2}(1-\tau_i^{(k)})\tau_i^{(k)}]/z_i\,, & \text{если}\ z_i\neq0\ \text{и}\ p_i^{(k)}\neq0, \\ (q_i^{(k)}\cdot p_i^{(k)})/[q_{i-1}^{(k)}(1-\tau_{i-1}^{(k)})]\,, & \text{если}\ z_i=0\ \text{и}\ p_i^{(k)}\neq0, \\ 0,\ \text{если}\ z_i=0\ \text{и}\ p_i^{(k)}=0\,; & i=2,3,\ldots,m. \end{cases} \\ q_i^{(k+1)}=\begin{cases}q_i^{(k)}(1-\tau_i^{(k)})+q_{i+1}^{(k)}\tau_{i+1}^{(k)};\ q_{m+1}^{(k)}=0\,,\ \text{если}\ \ z_i\neq0\neq p_i^{(k)} \\ q_i^{(k)}+\gamma_{i+1}^{(k)}\cdot q_{i+1}^{(k)}\,,\ \text{если}\ z_i=0\ \text{и}\ p_i^{(k)}\neq0\ \ (\text{или}\ p_i^{(k)}=0\,);\ i=1,2,\ldots,m \end{cases} \end{array}\right\} \tag{2.27}$$

$$\lambda_i=\begin{cases}\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{q}_i\,, & \text{если}\quad d=0\\ \lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{q}_i-d\,, & \text{если}\quad d\neq 0;\quad i=1,2,\dots,m.\end{cases}\tag{2.28}$$

<u>Если $|\overset{(K^*)}{P}_{i^*}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $K=K^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(K^*+1)}{P}_n=0;\ \overset{(K^*+1)}{q}_n=\overset{(K^*)}{q}_n;\ \overset{(K^*)}{\gamma}_n=0;\ \overset{(K^*)}{\tau}_n=0\Big\}_{n=i^*}^{m}\quad\text{для всех } K\geqslant K^*.\tag{2.29}$$

3°. <u>(T_Λ -метод)</u>. <u>Если $|\overset{(K+1)}{T}_i|>\varepsilon$</u> для любых $K=1,2,\dots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned}&\overset{(K+1)}{q}_i=(\overset{(K)}{q}_i-\overset{(K)}{T}_i)+\overset{(K)}{T}_{i+1};\quad \overset{(K)}{T}_{m+1}=0;\ i=1,2,\dots,m,\\ &\overset{(K+1)}{T}_i=\Bigg[\frac{\lambda_i}{\overset{(K+1)}{\lambda}_{i-1}}=\frac{(\overset{(K)}{q}_i-\overset{(K)}{T}_i)}{(\overset{(K+1)}{q}_{i-1}-\overset{(K+1)}{T}_{i-1})}\Bigg]\cdot\overset{(K)}{T}_i;\quad \overset{(K+1)}{T}_1=0;\ i=2,3,\dots,m,\\ &\lambda_i=\begin{cases}\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K+1)}{q}_i\,, \text{ если}\quad d=0,\\ \lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K+1)}{q}_i-d\,,\text{ если } d\neq 0,\ i=1,2,\dots,m\end{cases}\end{aligned}\right\}.\tag{2.30}$$

<u>Если $|\overset{(K^*)}{T}_{i^*}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $K=K^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(K^*+1)}{T}_n=0,\ \overset{(K^*+1)}{q}_n=\overset{(K^*)}{q}_n\Big\}_{n=i^*}^{m}\qquad\text{для всех } K\geqslant K^*,\ \text{где}\tag{2.31}$$

$$\overset{(1)}{T}_i=(\overset{(1)}{P}_i\cdot\tau_i)/(\overset{(1)}{q}_{i-1}-\overset{(1)}{T}_{i-1});\quad \overset{(1)}{T}_1=0=\overset{(1)}{T}_{m+1};\quad i=2,3,\dots,m.\tag{2.32}$$

4. <u>($(T-\lambda)_\Lambda$ -метод)</u>. <u>Если $|\overset{(K+1)}{P}_i|>\varepsilon$</u> для любых $K=1,2,\dots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned}&\overset{(K)}{T}_i=\big[(\overset{(K)}{P}_i\,\tau_i)/(\overset{(K)}{q}_{i-1}-\overset{(K)}{T}_{i-1})\big]=(\overset{(K)}{P}_i\cdot\tau_i)/\overset{(K)}{\lambda}_{i-1};\ \overset{(K)}{T}_1=\overset{(K)}{T}_{m+1}=0;\ i=2,3,\dots,m\\ &\overset{(K)}{\lambda}_i=\overset{(K)}{q}_i-\overset{(K)}{T}_i;\quad i=1,2,\dots,m,\end{aligned}\right\}\tag{2.33}$$

$$\left.\begin{aligned}&\overset{(K+1)}{P}_i=(\overset{(K)}{\lambda}_i/\overset{(K)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(K)}{P}_i;\quad i=2,3,\dots,m.\\ &\overset{(K+1)}{q}_i=(\overset{(K)}{\lambda}_i+\overset{(K)}{q}_{i+1})-\overset{(K)}{\lambda}_{i+1};\quad \overset{(K)}{q}_{m+1}=0=\overset{(K)}{\lambda}_{m+1};\ i=1,2,\dots,m,\\ &\lambda_i=\begin{cases}\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{q}_i=\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{\lambda}_i\,, & \text{если}\quad d=0\\ \lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{q}_i-d=\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{\lambda}_i-d\,, & \text{если}\quad d\neq 0;\ i=1,2,\dots,m\end{cases}\end{aligned}\right\}.\tag{2.34}$$

Если $|\overset{(K^*)}{P}_{i^*}|\le\varepsilon$ в любой итерации $K=K^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\Big\{\overset{(K^*)}{T}_n=0;\ \overset{(K^*+1)}{P}_n=0;\ \overset{(K^*+1)}{q}_n=\overset{(K^*)}{\lambda}_n\Big\}_{n=i^*}^{m}\qquad\text{для всех}\quad K\geqslant K^*.\tag{2.35}$$

5. <u>(λ_Λ -метод). Если $|\overset{(K+1)}{P}_i|>\varepsilon$</u> для любых $K=1,2,\dots$, <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned}&\overset{(K)}{\lambda}_i=\overset{(K)}{q}_i-(\overset{(K)}{P}_i\tau_i)/\overset{(K)}{\lambda}_{i-1};\quad \overset{(K)}{\lambda}_1=\overset{(K)}{q}_1;\quad i=2,3,\dots,m\\ &\overset{(K+1)}{P}_i=(\overset{(K)}{\lambda}_i/\overset{(K)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(K)}{P}_i;\quad i=2,3,\dots,m\\ &\overset{(K+1)}{q}_i=(\overset{(K)}{\lambda}_i+\overset{(K)}{q}_{i+1})-\overset{(K)}{\lambda}_{i+1};\quad \overset{(K)}{q}_{m+1}=0=\overset{(K)}{\lambda}_m;\quad i=1,2,\dots,m\\ &\lambda_i=\begin{cases}\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{q}_i=\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{\lambda}_i\,, & \text{если}\quad d=0\\ \lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{q}_i-d=\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{\lambda}_i-d\,, & \text{если}\quad d\neq 0;\ i=1,2,\dots,m\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{2.36}$$

<u>Если $|\overset{(K^*)}{P}_{i^*}|\le\varepsilon$</u> в любой итерации $K=K^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, <u>то</u>

$$\Big\{\overset{(K^*)}{\lambda}_n=\overset{(K^*)}{q}_n;\ \overset{(K^*+1)}{P}_n=0;\ \overset{(K^*+1)}{q}_n=\overset{(K^*)}{\lambda}_n\Big\}_{n=i^*}^{m}\qquad\text{для всех } K\geqslant K^*.\tag{2.37}$$

<u>Здесь во всех методах</u> $\{\overset{(1)}{\tilde q}_i=\overset{(1)}{q}_i+d,\ \overset{(1)}{P}_n=P_n,\ \overset{(1)}{\tau}_n=\tau_n\}_{i=1,n=2}^{m}$ – элементы[x)] матрицы $\overset{(1)}{\tilde C}=\overset{(1)}{C}+dE$, $\{\overset{(1)}{q}_i,\overset{(1)}{P}_n,\overset{(1)}{\tau}_n\}_{n=2,i=1}^{m}$ – элементы исходной матрицы $\overset{(1)}{C}$(I.I), а d –некоторое действительное число, такое, что $\{(\overset{(1)}{\tilde q}_i=\overset{(1)}{q}_i+d)\neq 0,\ \overset{(1)}{\tilde\Delta}{}_1^i\neq 0\}_{i=1}^{m}$, которое выбирается из условия строгой положительной (отрицательной) определенности матрицы $\overset{(1)}{\tilde C}$ (например, в соответствии с (2.2I)).

<u>Доказательство</u> теоремы I начнем с формулирования следующих результатов.

<u>Лемма 2.</u> Пусть $\overset{(1)}{C}$(I.I) – трехдиагональная матрица, у которой $\{\overset{(K)}{q}_i\neq 0\}_{i=1}^{m}$, тогда, если $\tau_n=0$ для любого n из интервала $2\le n\le m$, то

$$\overset{(K)}{\gamma}_n=0\,,\quad\text{но}\quad \frac{\overset{(K)}{\gamma}_n}{\tau_n}=\begin{cases}0\,, & \text{если}\quad \overset{(K)}{P}_n=0\\ \overset{(K)}{P}_n/(\overset{(K)}{q}_{n-1}\overset{(K)}{q}_n)\,, & \text{если}\quad \overset{(K)}{P}_n\neq 0\end{cases}\tag{2.38}$$

$$\text{и}\quad \overset{(K)}{\Lambda}_{n+1}=1\,,\quad \overset{(K)}{\tau}_n=0\qquad\text{и}\qquad \overset{(K)}{T}_n=0\,,\ \text{где}\tag{2.39}$$

$\{\overset{(K)}{\Lambda}_i\}$, $\{\overset{(K)}{\tau}_i\}$ и $\{\overset{(K)}{T}_i\}$ есть соответственно $(2.4)_{2)}$, $(2.8)_{2)}$ и $(2.I4)_{I)}$, $\{\overset{(K)}{\gamma}_i\}$ есть $(2.4)_{I)}$, а $\{\overset{(K)}{q}_1,\overset{(K)}{q}_i,\overset{(K)}{P}_i,\tau_i\}_{i=2}^{m}$ – элементы матрицы C(I.I).

<u>Доказательство</u>. Из $(2.22)_{I)}$ получаем (2.38), а из $(2.22)_{2)}$, $(2.26)_{2)}$ и $(2.33)_{I)}$ получаем (2.39). Лемма доказана.

Продолжая доказательство теоремы I (с учетом лемм I и 2), отметим, что оно совпадает с доказательством, ранее выполненным в [I] для указанных выше методов $\Lambda,\tau,T,(T-\lambda)$ и λ –(I.3)+(I.I6) только для матрицы $\overset{(1)}{\tilde C}$. Теорема I доказана.

<u>Замечание 7</u>. Указанные в теореме I алгоритмы обладают скоростью сходимости, которая не хуже, чем

$$|\overset{(K+1)}{P}_i|=\prod_{n=1}^{K}\left|\frac{\overset{(n)}{\lambda}_i}{\overset{(n)}{\lambda}_{i-1}}\right|\cdot|\overset{(1)}{P}_i|\,,\quad i=2,3,\dots,m;\quad K=1,2,\dots,\tag{2.40}$$

где $\lim\limits_{K\to\infty}\overset{(K)}{\lambda}_i=\lambda_i+d$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{m}$ – собственные значения исходной матрицы C(I.I). Это утверждение является непосредственным следствием замечания в [I], а также леммы I настоящей работы.

3. <u>Корректные методы вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида на основе отношений нижних главных угловых миноров</u>

В работе [I] и выше в настоящей работе нами построено множество <u>$\mathcal{M}(\Lambda,d_\Lambda)$ корректных</u> методов вычисления собственных значений матрицы

x) <u>Замечание 6</u>. Во всех методах, приведенных в этой теореме и ниже, мы (в целях сокращения обозначений) пользуемся $\overset{(1)}{\tilde q}_i=\overset{(1)}{q}_i$, если это не приводит к недоразумениям.

C(I.I) на основе техники отношений верхних главных угловых миноров – Λ и принципа d_Λ –смещений. Должно существовать в силу теоремы 7 [3] ему сопряженное множество $\mathcal{M}(\mathcal{G}, d_{\mathcal{G}})$ на основе техники отношений нижних угловых главных миноров – $\mathcal{G}$- и $d_{\mathcal{G}}$ –смещений. При этом, очевидно, $d_\Lambda = d = d_{\mathcal{G}}$, а также (в силу указанной теоремы 7 [3]) следует ввести вместо условий

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_{m-1}| > |\lambda_m| \geq 0, \tag{3.I}$$

характеризующих собственные значения матриц $\overset{(1)}{C}$(I.I) общего вида (в соответствии с определением I), условия

$$0 \leq |\tilde\lambda_1| < |\tilde\lambda_2| < \cdots < |\tilde\lambda_{m-1}| < |\tilde\lambda_m|. \tag{3.2}$$

При этом итерационный процесс $(\overset{(k)}{C} = \overset{(k)}{L} \cdot \overset{(k)}{R}) \to (\overset{(k+1)}{C} = \overset{(k)}{R} \cdot \overset{(k)}{L})$ Бауэра (LR – алгоритм, где $\overset{(k)}{L}$ –нижняя двухдиагональная, а $\overset{(k)}{R}$ –верхняя двухдиагональная матрицы [I]), использованный в качестве старта для генерации $\mathcal{M}(\Lambda, d)$–множества, следует поменять (в соответствии с теоремой 7 [3] или [5]) на процесс

$$(\overset{(k)}{C} = \overset{(k)}{R}\ \overset{(k)}{L}) \longrightarrow (\overset{(k+1)}{C} = \overset{(k)}{L} \cdot \overset{(k)}{R}) \tag{3.3}$$

для генерации $\mathcal{M}(\mathcal{G}, d)$ – множества, где элементы матриц $\overset{(k)}{R}$ и $\overset{(k)}{L}$ определены в виде (I.I2) в [I].

<u>Теорема 2</u>. Если $\overset{(1)}{C}$(I.I),(3.2) – трехдиагональная матрица общего вида (в соответствии с определением I), то имеет место следующее $\mathcal{M}(\mathcal{G}, d)$ – множество корректных алгоритмов для вычисления ее собственных значений $\{\lambda_j\}$, где между λ_j и $\tilde\lambda_j$ имеют место равенства

$$\lambda_j = \tilde\lambda_{m-(j-1)}\ ; \quad j = m, m-1, \ldots, 1. \tag{3.4}$$

I°. <u>($\mathcal{G}$ –метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{p}_j| > \varepsilon$</u> для любых K=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\gamma}_j = (\overset{(k)}{p}_j \cdot r_j)/(\overset{(k)}{q}_{j-1} \cdot \overset{(k)}{q}_j); \quad \overset{(k)}{\gamma}_1 = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0\ ;\ j = m, m-1, \ldots, 2\\
&\overset{(k)}{\mathcal{G}}_{j-1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma}_{j+1} \cdot \overset{(k)}{\mathcal{G}}{}_j^{-1}; \quad \overset{(k)}{\mathcal{G}}_m = \overset{(k)}{\mathcal{G}}_{m+1} = 1; \quad j = m-1, m-2, \ldots, 1\\
&\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \overset{(k)}{q}_j \cdot \overset{(k)}{\mathcal{G}}_{j-1}\ ; \qquad j = m, m-1, \ldots, 1\\
&\overset{(k+1)}{p}_j = (\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1} / \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j) \cdot \overset{(k)}{p}_j;\ \overset{(\infty)}{p}_1 = 0; j = m, m-1, \ldots, 2,\\
&\overset{(k+1)}{q}_j = \overset{(k)}{q}_j \cdot \overset{(k)}{\mathcal{G}}_{j-1} + \overset{(k)}{q}_{j-1}(1 - \overset{(k)}{\mathcal{G}}_{j-2});\ \ \overset{(k)}{q}_0 = 0 = \overset{(k)}{\mathcal{G}}_{-1};\ j = m, m-1, \ldots, 1
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

$$\tilde\lambda_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j, & \text{если } d = 0,\\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j - d, & \text{если } d \neq 0; j = m, m-1, \ldots, 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{p}_{j^*}| \leq \varepsilon$</u> в любой итерации К=К* $\geq$ 2 и некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*)}{\gamma}_n = 0;\ \overset{(k^*)}{\mathcal{G}}_{n-1} = 1;\ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n = \overset{(k^*)}{q}_n,\ \overset{(k^*+1)}{p}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{q}_n\}_{n=1}^{j^*} \text{ для всех } K \geq K^*. \tag{3.7}$$

2°. <u>($\tau_{\mathcal{G}}$ –метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{p}_j| > \varepsilon$</u> К=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\gamma}_j = (\overset{(k)}{p}_j \cdot r_j)/(\overset{(k)}{q}_{j-1} \cdot \overset{(k)}{q}_j); \quad \overset{(k)}{\gamma}_1 = \overset{(k)}{\gamma}_{m+1} = 0\ ;\ j = m, m-1, \ldots, 2.\\
&\overset{(k)}{S}_{j-1} = \overset{(k)}{\gamma}_j / (1 - \overset{(k)}{S}_j); \quad \overset{(k)}{S}_m = 0 = \overset{(k)}{S}_0; \qquad j = m, m-1, \ldots, 2.\\
&\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \overset{(k)}{q}_j \cdot (1 - \overset{(k)}{S}_j)\ ; \quad j = m, m-1, \ldots, 1
\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k+1)}{p}_j = (\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1} / \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j) \cdot \overset{(k)}{p}_j\ ;\ j = m, m-1, \ldots, 2\\
&\overset{(k+1)}{q}_j = \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j + \overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1};\ \overset{(k)}{q}_0 = 0 = \overset{(k)}{\tilde\lambda}_0; \quad j = m, m-1, \ldots, 1
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$$\tilde\lambda_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j, & \text{если } d = 0,\\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j - d, & \text{если } d \neq 0;\ j = m, m-1, \ldots, 1. \end{cases} \tag{3.I0}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{p}_{j^*}| < \varepsilon$</u> в любой итерации К=К* $\geq$ 2 и некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*)}{\gamma}_n = 0;\ \ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n = \overset{(k^*)}{q}_n;\ \overset{(k^*+1)}{p}_n = 0;\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n\}_{n=1}^{j^*} \text{ для всех } k \geq k^*. \tag{3.II}$$

3°. <u>($T_{\mathcal{G}}$ –метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{F}_j| > \varepsilon$</u> для любых К=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k+1)}{q}_j = (\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{F}_j) + \overset{(k)}{F}_{j-1};\ \ \overset{(k)}{F}_0 = \overset{(k)}{F}_m = 0;\ \ j = m, m-1, \ldots, 1\\
&\overset{(k+1)}{F}_{j-1} = [(\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{F}_{j-1})/(\overset{(k+1)}{q}_j - \overset{(k+1)}{F}_j) = (\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1} / \overset{(k+1)}{\tilde\lambda}_j)] \cdot \overset{(k)}{F}_{j-1};\ \ \overset{(k+1)}{F}_m = \overset{(k+1)}{F}_0 = 0;\ j = m, \ldots, 2
\end{aligned}\right\} \tag{3.I2}$$

$$\tilde\lambda_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_j, & \text{если } d = 0\\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_j - d, & \text{если } d \neq 0;\ j = m, \ldots, 1, \text{где} \end{cases} \tag{3.I3}$$

$$\overset{(1)}{F}_{j-1} = (\overset{(1)}{p}_j r_j)/(\overset{(1)}{q}_j - \overset{(1)}{F}_j);\ \ \overset{(1)}{F}_m = \overset{(1)}{F}_0 = 0;\ \ j = m, m-1, \ldots, 1. \tag{3.I4}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{F}_{j^*}| \leq \varepsilon$</u> в любой итерации К=К* $\geq$ 2 и некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*+1)}{F}_n = 0:\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{q}_n\}_{n=1}^{j^*} \qquad \text{для всех } k \geq k^*. \tag{3.I5}$$

4°. <u>($(T-\lambda)_{\mathcal{G}}$ –метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{p}_j| > \varepsilon$</u> для любых К=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{F}_{j-1} = (\overset{(k)}{p}_j \cdot r_j)/(\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{F}_j);\ \ \overset{(k)}{F}_m = \overset{(k)}{F}_0 = 0; \quad j = m, m-1, \ldots, 2.\\
&\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{F}_j\ ; \quad j = m, m-1, \ldots, 1\\
&\overset{(k+1)}{p}_j = (\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1} / \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j) \cdot \overset{(k)}{p}_j\ ; \quad j = m, m-1, \ldots, 2,\\
&\overset{(k+1)}{q}_j = \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j + \overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}\ ; \quad \overset{(k)}{q}_0 = 0 = \overset{(k)}{\tilde\lambda}_0\ ;\ j = m, m-1, \ldots, 1
\end{aligned}\right\} \tag{3.I6}$$

$$\tilde\lambda_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_j, & \text{если } d = 0\\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_j - d, & \text{если } d \neq 0;\ j = m, m-1, \ldots, 1. \end{cases} \tag{3.I7}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{p}_{j^*}| \leq \varepsilon$</u> в любой итерации К=К* $\geq$ 2 и некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\{\overset{(k^*)}{F}_n = 0;\ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n = \overset{(k^*)}{q}_n;\ \overset{(k^*+1)}{p}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n\}_{n=1}^{j^*} \qquad \text{для всех } k \geq k^*. \tag{3.I8}$$

5. <u>($\lambda_{\mathcal{G}}$ –метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{p}_j| > \varepsilon$</u> для любых К=I,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1} = \overset{(k)}{q}_{j-1} - (\overset{(k)}{p}_j \cdot r_j)/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j\ ;\ \ \overset{(k)}{\tilde\lambda}_m = \overset{(k)}{q}_m\ ;\ j = m, m-1, \ldots, 2,\\
&\overset{(k+1)}{p}_j = (\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1} / \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j)\ \overset{(k)}{p}_j\ ; \quad \overset{(k)}{p}_1 = 0; \quad j = m, m-1, \ldots, 2\\
&\overset{(k+1)}{q}_j = \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j + \overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}\ ;\ \ \overset{(k)}{q}_0 = 0 = \overset{(k)}{\tilde\lambda}_0\ ; \quad j = m, m-1, \ldots, 1,
\end{aligned}\right\} \tag{3.I9}$$

$$\lambda_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_j, & \text{если } d = 0\\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde\lambda}_j - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_j - d, & \text{если } d \neq 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Если $|\overset{(k^*)}{\beta}_{j^*}| \le \varepsilon$ в любой итерации $K=K^* \ge 2$ и некотором $j=j^*$, то

$$\{ \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_{n-1} = \overset{(k^*)}{q}_{n-1};\ \overset{(k^*+1)}{\beta}_n = 0;\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\tilde\lambda}_n \}_{n=1}^{j^*} \qquad \text{для всех } k \ge k^*. \tag{3.21}$$

Здесь для всех $\sigma_{\bar\sigma}$-, τ_σ-, $T_{\bar\sigma}$-, $(T-\lambda)_{\bar\sigma}$ и λ_σ -методов $\{\overset{(1)}{q}_i = \overset{(0)}{q}_i + d,\ \overset{(1)}{\beta}_n = \beta_n,\ \tau_n\}_{i=1,n=2}^m$ – элементы матрицы $\overset{(1)}{C} = \overset{(0)}{C} + dE$, а $\{\overset{(0)}{q}_1, \overset{(0)}{q}_n, \overset{(0)}{\beta}_n, \overset{(0)}{\tau}_n\}_{n=2}^m$ – элементы исходной матрицы $\overset{(0)}{C}$(I.I) и d – некоторое вещественное число, о котором уже речь шла выше. При этом в методах этой теоремы вместо $\overset{(0)}{q}_i$ снова пользуемся $\overset{(1)}{q}_i$ в соответствии с замечанием 6.

Доказательство теоремы 2 по существу повторяет доказательство результатов [I], а также теоремы I настоящей работы, если при этом учесть (3.I)+(3.4). Поэтому, не останавливаясь подробно на всех моментах этого доказательства, отметим лишь некоторые из результатов, которые являются дополнительными свойствами последовательности $\{\overset{(k)}{\sigma}_{j-1}\}_{j=1}^m$ и принципа фиксации (=исчерпания [5]).

Лемма 3. Для последовательностей $\{\overset{(k)}{\sigma}_{i-1}\}_{i=1}^m$ и $\{\overset{(k)}{\gamma}_i, \overset{(k)}{S}_i, \overset{(k)}{F}_i\}_{i=2}^m$, определяемых в виде $(3.3)_{2)}$ и $(3.3)_{I)}$ как функций элементов матрицы $\overset{(k)}{C}$, имеют место следующие предельные соотношения:

$$\{\lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{\sigma}_{i-1} = 1\}_{i=1}^m, \quad \{\lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{\gamma}_i = 0,\ \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{S}_i = 0,\ \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{F}_i = 0\}_{i=2}^m. \tag{3.22}$$

Лемма 4. Пусть $\{\overset{(k)}{\tilde\lambda}_i\}$ и $\{\overset{(k)}{\sigma}_j\}$ – определены в виде $(3.19)_{I)}$ $(=(3.5)_{3)})$ и $(3.5)_{2)}$ соответственно через элементы итерационной матрицы $\overset{(k)}{C}$. Тогда равенства

$$\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{n} = 0 \qquad (j \le n \le m) \tag{3.23}$$

являются необходимыми и достаточными, а

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\sigma}_j = 0 \to [\overset{(k)}{\sigma}_{j+1} = \overset{(k)}{\gamma}_{j+2},\ \overset{(k)}{\sigma}_{j-2} = 1,\ \overset{(k)}{\sigma}_{j-1} = \infty, \quad \text{но} \quad \overset{(k)}{\sigma}_{j-1}\cdot\overset{(k)}{\sigma}_j \equiv -\overset{(k)}{\gamma}_{j+1}] \\ &\overset{(k)}{S}_j = -\infty \to [\overset{(k)}{S}_{j-1} = 0,\ \overset{(k)}{S}_{j+1} = 1,\ \overset{(k)}{S}_{j-2} = \overset{(k)}{\gamma}_j, \quad \text{но} \quad \overset{(k)}{S}_{j-1}\cdot\overset{(k)}{S}_j \equiv -\overset{(k)}{\gamma}_j] \\ &\overset{(k)}{F}_j = -\infty \to [\overset{(k)}{F}_{j-1} = 0,\ \overset{(k)}{F}_{j+1} = \overset{(k)}{q}_{j+1},\ \overset{(k)}{F}_{j-2} = (\overset{(k)}{\beta}_{j-1}\tau_{j-1})/\overset{(k)}{q}_{j-1}, \text{но} \quad \overset{(k)}{F}_{j-1}\cdot\overset{(k)}{F}_j = -\overset{(k)}{\beta}_j\tau_j] \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

достаточными (при любом j из интервала $0 \le j \le m-1$) условиями для обращения в нуль $(m-j)$ – углового нижнего главного минора матрицы $\overset{(k)}{C}$ при любом K=I,2,....

Лемма 5. Если для любого j из интервала $1 \le j \le m-1$ имеют место предельное соотношение

$$\left|\frac{\overset{(k)}{\beta}_j}{\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j}\tau_j\right| \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad K\to\infty, \tag{3.25}$$

то справедливы также предельные соотношения

$$\left\{\left|\frac{\overset{(k)}{\beta}_n}{\overset{(k)}{\tilde\lambda}_n}\tau_n\right| \to 0\right\}_{n=1}^{j-1} \underset{\overset{(k)}{\tilde\lambda}_n - \text{любое}}{\overset{(\overset{(k)}{\tilde\lambda}_n \ne 0)}{\rightleftarrows}} \left\{|\overset{(k)}{\beta}_n| \xrightarrow[K\to\infty]{} 0\right\}_{n=1}^{j}. \tag{3.26}$$

В заключение доказательства также отметим, что все алгоритмы теоремы 2 корректны (в смысле данного в [I] и выше в первом параграфе определения). Теорема 2 установлена.

Замечание 8. Все алгоритмы $\mathcal{M}(\sigma, d)$ – множества, указанные в теореме 2, обладают скоростью сходимости не хуже, чем

$$\overset{(k+1)}{\beta}_j = \prod_{n=1}^{k} \frac{\overset{(n)}{\tilde\lambda}_{j-1}}{\overset{(n)}{\tilde\lambda}_j}\cdot\overset{(1)}{\beta}_j, \qquad j = m, m-1, \dots, 2. \tag{3.27}$$

где $\lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j = \lambda_j + d$ и $[\lambda_j = \tilde\lambda_{m-(j-1)}]$ – собственные значения исходной матрицы $\overset{(0)}{C}$(I.I), но $|\overset{(k)}{\tilde\lambda}_{j-1}/\overset{(k)}{\tilde\lambda}_j| \le 1$ из-за (3.2).

Ниже мы остановимся на методах вычисления собственных значений C(I.I) с использованием $\{\Lambda_i\}$- и $\{\sigma_j\}$ – последовательностей одновременно.

4. Корректные методы вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида с использованием информации о диагональных элементах обратной матрицы $\overset{(\omega)}{B} = \overset{(\omega)}{C}{}^{-1}$

Несмотря на то, что (приводимые ниже) методы вычисления собственных значений матриц $\overset{(\omega)}{C}$ и не обладают такой же компактностью (как приведенные выше), тем не менее мы их приведем для полноты картины. С другой стороны, ряд промежуточных результатов, которые при этом получаются, имеют самостоятельное значение для полной алгебры систем уравнений с матрицами вида $\overset{(\omega)}{C}$(I.I).

Лемма 6. Равенства

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\sigma}_0 = 0 \\ &\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} + \overset{(k)}{\sigma}_{i-1} = 1, \qquad \text{для всех } 2 \le i \le m-1 \text{ и } K = 1,2,\dots \\ &\overset{(k)}{\Lambda}_{m+1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.I}$$

являются необходимыми и достаточными условиями вырожденности матриц $\overset{(k)}{C}$, у которых элементы $\{\overset{(k)}{q}_i\}_{i=1}^m$ и все главные угловые миноры отличны от нуля.

Доказательство. Используя (I.2I) и (I.23), получаем

$$(\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} + \overset{(k)}{\sigma}_{i-1} - 1) = \frac{\overset{(k)}{q}{}_i^{-1}}{\overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1}\cdot\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m}\left[\overset{(k)}{\Delta}{}_1^i\cdot\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m + \overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1}\cdot\overset{(k)}{\Delta}{}_i^m - \overset{(k)}{q}_i\,\overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1}\cdot\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m\right]. \tag{4.2}$$

Если учесть также соотношения (2.I0) из [2]

$$\overset{(k)}{\Delta}{}_i^m = \overset{(k)}{q}_i\,\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m - \overset{(k)}{\beta}_{i+1}\tau_{i+1}\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+2}^m; \quad \overset{(k)}{\Delta}{}_{m+2}^m = 0,\ \overset{(k)}{\Delta}{}_{m+1}^m = 1, \tag{4.3}$$

то из (4.2) получаем

$$\overset{(k)}{\Delta}{}_1^i\cdot\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m + \overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1}\overset{(k)}{\Delta}{}_i^m - \overset{(k)}{q}_i\,\overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1}\cdot\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m = \overset{(k)}{\Delta}{}_1^i\,\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m - \overset{(k)}{\beta}_{i+1}\tau_{i+1}\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+2}^m\cdot\overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1}. \tag{4.4}$$

Из (2.II) [2] имеем также, что

$$\overset{(k)}{\Delta}{}_1^i\,\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m - \overset{(k)}{\beta}_{i+1}\tau_{i+1}\overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1}\,\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+2}^m = \det(\overset{(k)}{C}). \tag{4.5}$$

Поэтому из (4.2)+(4.5) получаем

$$(\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} + \overset{(k)}{\sigma}_{i-1} - 1) = \det(\overset{(k)}{C})\cdot\frac{\overset{(k)}{q}{}_i^{-1}}{\overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1}\cdot\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^m}, \qquad \text{где } \overset{(k)}{\Delta}{}_1^0 = 1 = \overset{(k)}{\Delta}{}_{m+1}^m. \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что равенства (4.I) являются необходимыми и достаточными условиями вырожденности матриц $\overset{(k)}{C}$, если $\{\overset{(k)}{q}_i \neq 0\}_{i=1}^{m}$ и $\{\overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1} \neq 0,\ \overset{(k)}{\Lambda}{}_{i+1}^{m} \neq 0\}_{i=2}^{m}$. Лемма доказана.

<u>Замечание 9</u>. Как следует из [3] (для скалярного случая), имеет место равенство

$$q_i^{-1}\,\tilde{B}_{ii} = q_i^{-1}(\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - 1)^{-1} = B_{ii} \quad \text{для любого} \quad 1 \le i \le m, \qquad (4.7)$$

если все главные угловые миноры $\{\Delta_1^i\}_{i=1}^{m-1} \neq 0 \neq \{\Delta_i^m\}_{i=2}^{m}$ вплоть до $(m-1)$ – порядка отличны от нуля, где B_{ii} – диагональные элементы обратной матрицы $B = \overset{(1)}{C}{}^{-I}$. Другими словами, все элементы последовательностей $\{\Lambda_i \neq 0\}_{i=1}^{m}$ и $\{G_i \neq 0\}_{i=1}^{m}$ определены, а следовательно, будут определенными и Λ_{m+1} и G_0. С другой стороны, если $\det(\overset{(1)}{C}) = 0$, то (в соответствии с леммой 6) круглая скобка в (4.7) будет удовлетворять условиям (4.I) и, следовательно, все диагональные элементы B_{ii} матрицы $B = C^{-I}$ становятся неопределенными (в силу (4.7)), если $\{q_i \neq 0\}_{i=1}^{m}$. Отметим также, что если $\det(\overset{(k)}{C}) = 0$ и обращается в нуль хотя бы один из миноров $\overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1} = 0$ или $\overset{(k)}{\Delta}{}_{i+1}^{m} = 0$, то $(\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} + \overset{(k)}{G}_{i-1} - 1)$ может быть и отличным от нуля, а следовательно, $\overset{(k)}{B}_{ii}$ – определенным.

<u>Теорема 3</u>. Рекуррентные вычислительные процессы $(I.28)_{3)}$ и $(I.30)_{3)}$ для отношений верхних (нижних) главных угловых миноров $\{\overset{(k)}{\Lambda}_i\}$ $(\{\overset{(k)}{G}_i\})$ невырожденных (<u>либо вырожденных</u>) итерационных матриц $\overset{(k)}{C}$(I.I), диагональные элементы $\{\overset{(k)}{q}_i \neq 0\}_{i=1}^{m}$ которых отличны от нуля при любом K=I,2,..., являются следствием общих рекуррентных процессов вида

$$\overset{(k)}{x}_i = \frac{\overset{(k)}{\delta}_i}{1 - \overset{(k)}{x}_{i-1}}\ ; \quad \overset{(k)}{x}_1 = 0 = (\overset{(k)}{G}_0 - \overset{(k)}{\delta}_1), \quad \overset{(k)}{x}_m = (1 - \overset{(k)}{\Lambda}_{m+1}) = (\overset{(k)}{G}_{m-1} - \overset{(k)}{\delta}_m). \qquad (4.8)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad \overset{(k)}{x}_i = \{[\overset{(k)}{G}_{i-1} = (1 - \overset{(k)}{\gamma}_{i+1}\overset{(k)}{G}{}_i^{-1})] - \overset{(k)}{\delta}_i\}, \qquad \text{где} \quad \overset{(k)}{G}_{m-1} = 1,\\
&2)\quad (1 - \overset{(k)}{\gamma}_i\overset{(k)}{\Lambda}{}_i^{-1}) = \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = \overset{(k)}{\gamma}_{i+1}\cdot(\overset{(k)}{G}_i - \overset{(k)}{\delta}_{i+1})^{-1} = \overset{(k)}{\gamma}_{i+1}/\overset{(k)}{x}_{i+1};\ \overset{(k)}{\Lambda}_2 = 1,\\
&3)\quad [(\overset{(k)}{q}_i\cdot\overset{(k)}{B}_{ii})^{-1} = \overset{(k)}{B}{}_{ii}^{-1}] = \overset{(k)}{\delta}_i = (\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} + \overset{(k)}{G}_{i-1} - 1)
\end{aligned}\right\}, \qquad (4.9)$$

для любых $i = 1,2,\ldots,m-1$; $K = 1,2,\ldots$. Кроме того, имеют место равенства (≡ условия)

$$\overset{(k)}{x}_i = 1 \to [\overset{(k)}{x}_{i+1} = -\infty,\ \overset{(k)}{x}_{i+2} = 0,\ \overset{(k)}{x}_{i+2} = \overset{(k)}{\gamma}_{i+3}, \text{ но } \overset{(k)}{x}_{i+1}\cdot\overset{(k)}{x}_{i+2} = -\overset{(k)}{\gamma}_{i+2}], \qquad (4.10)$$

где в соответствии с замечанием 9 $\overset{(k)}{B}_{ii}$ – есть диагональные элементы матриц, обратных к $\overset{(k)}{C}$, т.е. $\overset{(k)}{B} = \overset{(k)}{C}{}^{-I}$.

<u>Доказательство</u>. Левая часть равенства $(4.9)_{3)}$ справедлива в соответствии с замечанием 9. Правая часть этого равенства есть определение (обозначение). Левая часть в равенстве $(4.9)_{2)}$ и [ ] – скобка в правой части $(4.9)_{I)}$ совпадают с определением последовательностей $\{\Lambda_i\}$ и $\{G_i\}$, введенных ранее. Теперь из определения $(4.9)_{3)}$ имеем

$$\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} + \overset{(k)}{G}_{i-1} - 1 = \overset{(k)}{\delta}_i \to (1 - \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}) = (\overset{(k)}{G}_{i-1} - \overset{(k)}{\delta}_i) \to$$

$$\xrightarrow{(I.28)_{3)}} \left[\frac{\overset{(k)}{\gamma}_{i+1}}{\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}} = \overset{(k)}{G}_i - \overset{(k)}{\delta}_{i+1}\right] \longrightarrow \left[\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = \frac{\overset{(k)}{\gamma}_{i+1}}{\overset{(k)}{G}_i - \overset{(k)}{\delta}_{i+1}}\right],$$

т.е. правая часть равенства $(4.9)_{2)}$. Равенство $(4.9)_{I)}$, понимаемое в виде $(\overset{(k)}{x}_i = \overset{(k)}{G}_{i-1} - \overset{(k)}{\delta}_i)$, — есть тогда просто обозначение. Далее, подставляя $\overset{(k)}{x}_i$ $(4.9)_{I)}$ в (4.8) и имея в виду равенства $(4.9)_{2)}$ и $(4.9)_{3)}$, убеждаемся, что (4.8) справедливы при граничных условиях $\overset{(k)}{x}_1 = 0$ и $\overset{(k)}{x}_m = 1 - \overset{(k)}{\delta}_m$ для любых $i = 1,2,\ldots,m$ и $k = 1,2,\ldots$. При этом выбранные таким образом граничные условия $\overset{(k)}{x}_1$ и $\overset{(k)}{x}_m$ обеспечивают согласование процесса $\{\overset{(k)}{x}\}$ (4.8) с каждым из процессов $\{G\}$ и $\{\Lambda\}$ как для вырожденных матриц $\overset{(k)}{C}$ (т.е. $\det(\overset{(k)}{C}) = 0$), так и для невырожденных матриц $\overset{(k)}{C}$ (т.е. $\det(\overset{(k)}{C}) \neq 0$). Другими словами говоря, процессы $\{x\}$ (4.8) справедливы при любых $\{\overset{(k)}{\delta}_i\}$ $(4.9)_{3)}$, как нулевых, так и отличных от нуля. Завершая доказательство теоремы, отметим, что процесс $\{x\}$ (4.8) формально совпадает с процессом $\{\overset{(k)}{\tau}\}$ $(I,6)_{2)}$. <u>Теорема доказана.</u>

Следует отметить также, что несмотря на формальное сходство (с точки зрения вида уравнений) процессов $\{x\}$ (4.8) и $\{\tau\}$ $(I.6)_{2)}$, они играют принципиально различную роль в изучении полной алгебры систем уравнений с матрицами вида $\overset{(1)}{C}$(I.I). В частности, при изучении спектра матриц $\overset{(1)}{C}$(I.I) на эту разницу указывает следующая

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\overset{(1)}{C}$ – трехдиагональная матрица общего (в соответствии с определением I) вида (I.I), (3.I) или (I.I), (3.2). Тогда <u>имеется следующее</u> $\mathfrak{M}[(G,\Lambda), d]$ – множество корректных (при условии выбора d, чтобы исходная матрица C(I.I) была бы с диагональным преобладанием) алгоритмов для вычисления ее собственных значений с использованием информации о диагональных элементах ее обратной матрицы $B = \overset{(1)}{C}{}^{-I}$.

I°. <u>$(GB(G)$ –метод)</u>. <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i| > \varepsilon$</u> для любых K=I,2,..., <u>то</u>

$$\overset{(k)}{B}_{ii}(G) = \overset{(k)}{G}{}_{i-1}^{-1} + \overset{(k)}{\hat{C}}_i\cdot\overset{(k)}{\tilde{B}}_{i-1\,i-1}(G)\cdot\overset{(k)}{\hat{\beta}}_i\ ; \quad \overset{(k)}{\tilde{B}}_{11}(G) = \overset{(k)}{G}{}_0^{-1};\ i = 2,3,\ldots,m, \text{ где} \qquad (4.II)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\hat{C}}_i = -(\overset{(k)}{G}{}_{i-1}^{-1}\cdot\overset{(k)}{\tilde{P}}_i), \quad \overset{(k)}{\tilde{P}}_i = \overset{(k)}{P}_i\cdot\overset{(k)}{q}{}_{i-1}^{-1};\quad \overset{(k)}{\gamma}_i = \overset{(k)}{P}_i\cdot\overset{(k)}{\tau}_i;\ \overset{(k)}{\gamma}_1 = 0;\ i = 2,3,\ldots,m\\
&\overset{(k)}{\hat{\beta}}_i = -(\overset{(k)}{\tilde{\tau}}_i\cdot\overset{(k)}{G}{}_{i-1}^{-1}), \quad \overset{(k)}{\tilde{\tau}}_i = \overset{(k)}{\tau}_i\,\overset{(k)}{q}{}_i^{-1};\quad \overset{(k)}{G}_{j-1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma}_{j+1}\overset{(k)}{G}{}_j^{-1};\ \overset{(k)}{G}_m = \overset{(k)}{G}_{m-1} = 1;\ j = m-1,\ldots,1
\end{aligned}\right\} \qquad (4.I2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\lambda}_i = \overset{(k)}{q}_i\,[1 - \overset{(k)}{G}_{i-1} + \overset{(k)}{B}{}_{ii}^{-1}(G)]; \quad i = 1,2,\ldots,m\\
&\overset{(k+1)}{P}_i = (\overset{(k)}{\lambda}_i/\overset{(k)}{\lambda}_{i-1})\cdot\overset{(k)}{P}_i; \quad i = 2,3,\ldots,m.\\
&\overset{(k+1)}{q}_i = \overset{(k)}{\lambda}_i + \overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; \quad \overset{(k)}{\lambda}_{m+1} = 0;\ \overset{(k)}{q}_{m+1} = 0;\ i = 1,2,\ldots,m
\end{aligned}\right\} \qquad (4.I3)$$

$$\lambda_i = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k)}{\lambda}_i = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k)}{q}_i, & \text{если } d = 0\\ \lim \overset{(k)}{\lambda}_i - d = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{(k)}{q}_i - d, & \text{если } d \neq 0;\ i = 1,2,\ldots,m. \end{cases} \qquad (4.I4)$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \le \varepsilon$</u> в любой итерации $K = K^* \geq 2$ и некотором $i = i^*$, <u>то</u>

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\tilde{B}}_{nn}(G) = \overset{(k^*)}{G}{}^{-1}_{n-1};\ \overset{(k^*)}{\lambda}_n = \overset{(k^*)}{q}_n;\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0;\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\lambda}_n \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех} \quad k \geq k^*. \tag{4.15}$$

2°. <u>($\Lambda B(\Lambda)$ -метод).</u> <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_j| > \varepsilon$</u> для любых K=1,2,..., <u>то</u>

$$\overset{(k)}{\hat{B}}_{jj}(\Lambda) = \overset{(k)}{\Lambda}{}^{-1}_{j+1} + \overset{(k)}{C}_{j+1} \cdot \overset{(k)}{\hat{B}}_{j+1\,j+1}(\Lambda) \cdot \overset{(k)}{\beta}_{j+1}; \quad \overset{(k)}{\hat{B}}_{mm} = \overset{(k)}{\Lambda}{}^{-1}_{m+1};\ j = m-1, m-2, \ldots, 1, \text{ где} \tag{4.16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{C}_{j+1} = \overset{(k)}{\Lambda}{}^{-1}_{j+1}\, \overset{(k)}{\tilde{\tau}}_{j+1}, \quad \overset{(k)}{\tilde{P}}_j = \overset{(k)}{P}_j\, \overset{(k)}{q}{}^{-1}_{j-1}, \\ &\overset{(k)}{\beta}_{j+1} = \overset{(k)}{\tilde{P}}_{j+1} \cdot \overset{(k)}{\Lambda}{}^{-1}_{j+1}, \quad \overset{(k)}{\tilde{\tau}}_j = \tau_j\, \overset{(k)}{q}{}^{-1}_j; \quad j = m-1, \ldots, 1 \\ &\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma}_i\, \overset{(k)}{\Lambda}{}^{-1}_i; \quad \overset{(k)}{\Lambda}_1 = \overset{(k)}{\Lambda}_2 = 1; \quad i = 2, 3, \ldots, m \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j = \overset{(k)}{q}_j \cdot [1 - \overset{(k)}{\Lambda}_{j+1} + \overset{(k)}{\hat{B}}{}^{-1}_{jj}(\Lambda)]; \quad j = m, m-1, \ldots, 1 \\ &\overset{(k+1)}{P}_j = (\overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_{j-1} / \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j) \cdot \overset{(k)}{P}_j; \quad j = m, m-1, \ldots, 2 \\ &\overset{(k+1)}{q}_j = \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j + \overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_{j-1}; \quad \overset{(k)}{q}_0 = 0 = \overset{(k)}{\lambda}_0; \quad j = m, m-1, \ldots, 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

$$\tilde{\lambda}_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j, & \text{если} \quad d = 0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j - d, & \text{если} \quad d \neq 0,\ j = m, m-1, \ldots, 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}| \leq \varepsilon$</u> в любой итерации K=K* ≥ 2 и некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\hat{B}}_{nn}(\Lambda) = \overset{(k^*)}{\Lambda}{}^{-1}_{n+1},\ \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n = \overset{(k^*)}{q}_n,\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n \right\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех} \quad k \geq k^*. \tag{4.20}$$

3°. <u>($G B(\Lambda)$ -метод).</u> <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i| > \varepsilon$</u> для любых K=1,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\lambda}_i = \overset{(k)}{q}_i\, [1 - \overset{(k)}{G}_i + \overset{(k)}{\hat{B}}{}^{-1}_{ii}(\Lambda)], \quad i = 1, 2, \ldots, m. \\ &\overset{(k+1)}{P}_i = (\overset{(k)}{\lambda}_i / \overset{(k)}{\lambda}_{i-1}) \cdot \overset{(k)}{P}_i; \quad i = 2, 3, \ldots, m. \\ &\overset{(k+1)}{q}_i = \overset{(k)}{\lambda}_i + \overset{(k)}{q}_{i+1} - \overset{(k)}{\lambda}_{i+1}; \quad \overset{(k)}{q}_{m+1} = 0 = \overset{(k)}{\lambda}_{m+1}; \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ &\lambda_i = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda}_i = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i, & \text{если} \quad d = 0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\lambda}_i - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_i - d, & \text{если} \quad d \neq 0;\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \end{aligned}\right. \tag{4.21}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{i^*}| \leq \varepsilon$</u> в любой итерации K=K* ≥ 2 и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\hat{B}}_{nn}(\Lambda) = \overset{(k^*)}{G}{}^{-1}_{n-1};\ \overset{(k^*)}{\lambda}_n = \overset{(k^*)}{q}_n;\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\lambda}_n \right\}_{n=i^*}^{m} \quad \text{для всех} \quad k \geq k^*. \tag{4.22}$$

4°. <u>($\Lambda B(G)$ -метод).</u> <u>Если $|\overset{(k+1)}{P}_i| > \varepsilon$</u> для любых K=1,2,..., <u>то</u>

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j = \overset{(k)}{q}_j\, [1 - \overset{(k)}{\Lambda}_{j+1} + \tilde{B}^{-1}_{jj}(G)]; \quad j = m, m-1, \ldots, 1 \\ &\overset{(k+1)}{P}_j = (\overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_{j-1} / \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j) \cdot \overset{(k)}{P}_j; \quad j = m, m-1, \ldots, 2 \\ &\overset{(k+1)}{q}_j = \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j + \overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_{j-1}; \quad \overset{(k)}{q}_0 = 0 = \overset{(k)}{\lambda}_0; \quad j = m, m-1, \ldots, 1 \\ &\tilde{\lambda}_j = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j, & \text{если} \quad d = 0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{\tilde{\lambda}}_j - d = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{(k)}{q}_j - d, & \text{если} \quad d \neq 0,\ j = m, m-1, \ldots, 1 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

<u>Если $|\overset{(k^*)}{P}_{j^*}| \leq \varepsilon$</u> в любой итерации K=K* ≥ 2 некотором $j = j^*$, <u>то</u>

$$\left\{ \overset{(k^*)}{\tilde{B}}{}^{-1}_{nn}(G) = \overset{(k^*)}{\Lambda}{}^{-1}_{n+1},\ \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n = \overset{(k^*)}{q}_n,\ \overset{(k^*+1)}{P}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{\tilde{\lambda}}_n \right\}_{n=1}^{j^*} \quad \text{для всех} \quad k \geq k^*. \tag{4.24}$$

Здесь $\lambda_i = \tilde{\lambda}_{m-(i-1)}$ и в $(4.21)_{I)}$ и $(4.23)_{I)}$ $\overset{(k)}{\tilde{B}}{}^{-1}_{ii}(\Lambda)$ и $\tilde{B}^{-1}_{jj}(G)$ есть (4.16) и (4.11) соответственно.

<u>Доказательство</u> теоремы фактически следует из теорем 1,2,3, леммы 6 и равенств (1.26)÷(1.31), а также существования всех $\tilde{B}^{-1}_{ii}$ в силу (1.31) и (1.26) при условии, что $\{ \overset{(k)}{\Lambda}_i \neq 0,\ \overset{(k)}{G}_i \neq 0 \}$ из-за положительной определенности матрицы $\overset{(1)}{C} = C + dE$. Указанные обстоятельства позволяют нам не приводить подробное доказательство. Теорема установлена.

Вместе с тем мы закончили в основном формальное построение множества методов корректного вычисления спектра матриц типа $\overset{(1)}{C}$(1.1). Вопросам ускорения сходимости будут посвящены следующие наши работы.

5. Заключение

В заключение настоящей работы отметим следующие основные результаты:

1°. Построены с использованием стратегии смещений множества $\mathfrak{M}(\Lambda; d)$, $\mathfrak{M}(G, d)$ и $\mathfrak{M}(G, \Lambda, B; d)$ корректных методов вычисления спектра трехдиагональных матриц (общего вида) на основе соответственно верхних, нижних главных угловых миноров, а также диагональных элементов обратных матриц (теоремы 1÷2,4).

2°. Получены необходимые и достаточные условия вырожденности как самих трехдиагональных (так и их итерационных) матриц (лемма 6).

3°. Доказана теорема 3 (об общем процессе с краевыми условиями) согласования противоположных процессов с начальными условиями для верхних и нижних угловых миноров.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящим исследованиям и предоставленную возможность работы над ними.

Л и т е р а т у р а

1. Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, Р11-88-451, Дубна, 1988.
2. Г.А.Емельяненко. ОИЯИ, Р11-86-531, Дубна, 1986.
3. Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов. ОИЯИ, Р11-87-533, Дубна, 1987.
4. Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов. ОИЯИ, Р11-87-623, Дубна, 1987.
5. В.П.Ильин, Ю.И.Кузнецов. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985.
6. В.П.Ильин. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июня 1988 года.

Емельяненко Г.А., Им Ён Сек P11-88-452

Стратегия смещений и множества корректных методов вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида

Получены (неизвестные ранее): множества корректных методов вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида с вещественными элементами; необходимые и достаточные условия вырожденности трехдиагональных матриц; процесс с краевыми условиями, согласованный с процессами вычисления главных верхних и нижних угловых миноров трехдиагональной матрицы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Im Yen Sec P11-88-452

The Strategy of Spectrum Removal and of Many Correctable Eigenvalue Calculation Methods of General Tridiagonal Matrices

Many correctable methods for eigenvalue calculation of general tridiagonal matrices with real elements; criteria of singular tridiagonal matrices; process with boundary conditions according to calculation processes of general upper and lower tridiagonal matrix minors are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988