сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-88-409

Т.Л.Бояджиев, Д.В.Павлов, И.В.Пузынин

НЬЮТОНОВСКИЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ОДНОМЕРНОМ НЕОДНОРОДНОМ ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ ПЕРЕХОДЕ

1988

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Стационарные состояния в одномерном джозефсоновском переходе длины 2R с одной микронеоднородностью в середине $x = 0$ описываются фазой $\phi(x)$, являющейся решением нелинейной граничной задачи /1-4/ :

$$-\phi'' + j_D(x) \sin\phi + \gamma = 0 , \qquad (1.1)$$

$$\phi'(\pm R) = h_0 , \qquad (1.2)$$

где $j_D(x)$ — ток Джозефсона, а штрихом обозначено дифференцирование по зависимой переменной $x \in [-R, R]$ (все величины безразмерны, о выборе соответствующей системы единиц см., например, статью /1/). Для аналитических расчетов удобно принять модель точечной неоднородности, что допустимо, если поле $\phi(x)$ достаточно мало изменяется на протяжении неоднородности. В указанном случае решение формально выписывается через эллиптические функции /1/. Реальные неоднородности, однако, всегда имеют конечные размеры, что следует учитывать при численных расчетах. В настоящей работе, как и ранее /2-4/ , неоднородность моделируется гладкой функцией

$$j_D(x) = 1 - \mathrm{sech}^2 \left[\frac{2x}{\mu} \right] ,$$

где μ — ширина неоднородности. Внешний ток γ на практике существенно меняется только вблизи концов перехода, ввиду чего в первом приближении его можно считать постоянным. Величина h_0 представляет собой значение магнитного поля на концах перехода.

При фиксированных значениях "технологических" параметров R и μ задача (1.1), (1.2) имеет несколько нетривиальных решений, число и вид которых зависят от "физических" параметров h_0 и γ, т.е.

$$\phi = \phi(x, h_0, \gamma) .$$

В модели с точечной неоднородностью число решений есть число корней нелинейной системы, получаемой из общего решения уравнения на отрезках $[-R, 0)$ и $(0, R]$ с учетом граничных условий, а также с учетом непрерывности функции $\phi(x)$ и условия скачка производной $\phi'(x)$ в точке $x = 0$.

Отметим, что решения уравнения (1.1) обладают следующими свойствами симметрии. Если функция $\phi(x, h_0, \gamma)$ — решение, то

$-\phi(x,-h_0,-\gamma)$ также есть решение. Далее, функции $\phi(x,-h_0,\gamma)$ и $-\phi(x,h_0,-\gamma)$ являются решениями задачи (1.1) с граничными условиями $\phi'(\pm R)=-h_0$. Наконец, если $\phi_0(x)$ есть решение, то

$$\phi_k = \phi_0 + 2\pi k\,, \quad \text{где} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

также есть решение задачи (1.1), (1.2).

Флюксонные состояния в бесконечных переходах исследованы достаточно подробно (см., например, монографии [5,6]). В конечных и неоднородных переходах о флюксоне можно говорить лишь в той степени, в какой можно пренебречь влиянием на него границ, а также неоднородности и внешнего тока γ через переход. Условимся называть флюксоном любое решение, для которого производная $\phi'(x) \geq 0$ при $x \in [-R,R]$; ввиду отмеченной симметрии, существует также решение с $\phi'(x) \leq 0$, которое будем называть антифлюксоном.

Устойчивость или неустойчивость некоторого решения $\phi(x,h_0,\gamma)$ нелинейной граничной задачи (1.1), (1.2) определяется [1] знаком минимального собственного числа порожденной этим решением задачи Штурма — Лиувилля

$$-\psi'' + U(x)\,\psi = \lambda\psi\,, \tag{1.3}$$

$$\psi'(\pm R) = 0\,, \tag{1.4}$$

с потенциалом $U = j_D(x)\cos\phi(x)$. При $\lambda_{min} > 0$ решение устойчиво, при $\lambda_{min} < 0$ — неустойчиво. Случай

$$\lambda_{min}(h_0,\gamma) = 0 \tag{1.5}$$

соответствует бифуркации решения. С физической точки зрения условие $\lambda_{min} > 0$ (устойчивость) выражает требование минимальности "свободной" энергии перехода

$$\Omega = \mathcal{E} - h_0\,\Delta\phi\,, \tag{1.6}$$

где $\Delta\phi = \phi(R) - \phi(-R)$ есть полный магнитный поток через переход, а

$$\mathcal{E} = \int_{-R}^{R} \left[\frac{1}{2}\phi'(x)^2 + j_D(x)(1-\cos\phi(x)) + \gamma\phi(x)\right] dx \;- \tag{1.7}$$

— энергия перехода.

Как показано в работах [3,4], с увеличением тока γ область существования по h_0 сужается. Значение γ_C, при котором состояние разрушается, т.е. происходит бифуркация, называется критическим. Исследования зависимости $\gamma_C(h_0)$ критического тока от магнитного поля

является важной практической задачей. Главный качественный эффект, полученный в указанных работах [3,4], состоит в появлении на графике $\gamma_C(h_0)$ характерных крестообразных структур, соответствующих устойчивым флюксону и антифлюксону, локализованным на неоднородности. Наиболее ярко этот флюксон-антифлюксонный крест выражен в точке $h_0 = 0$; в больших полях влияние микронеоднородности ослабевает.

Численный эксперимент в работах [3,4] проводился в следующей последовательности. Для фиксированных значений h_0 и γ, используя непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН) [7,8] с оптимальным шагом [9] и сплайн-разностную схему [10] порядка $O(h^2)$ на равномерной сетке с шагом h, отыскивали решения нелинейной граничной задачи (1.1), (1.2). Далее, методом итерации подпространств (см., например, [11]) вычислялась величина λ_{min}, соответствующая каждому из обнаруженных решений. Для устойчивых решений строились графики функций $\lambda_{min}(h_0)$. Преимущество такой методики заключается в возможности получить полную картину состояний в переходе, выражаемую функцией $\lambda_{min}(h_0)$ [2]; к недостаткам следует отнести ее большую трудоемкость. Поэтому представляется целесообразным разработать иной алгоритм, позволяющий непосредственно получить искомую зависимость.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Зафиксируем величины γ и λ и построим функцию

$$F(z) = \begin{cases} -\phi'' + j_D(x)\sin\phi + \gamma\,, \\ \phi'(\pm R) - h_0\,, \\ -\psi'' + (j_D(x)\cos\phi - \lambda)\,\psi\,, \\ \psi'(\pm R)\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

где переменная $z = (\phi, \psi, h_0)$. Основная идея заключается в рассмотрении уравнения

$$F(z) = 0 \tag{2.2}$$

как нелинейной задачи на собственные значения со спектральным параметром h_0. Будем искать решение z^* (2.2) в классе функций, удовлетворяющих условию нормировки:

$$\langle\psi,\psi\rangle \equiv \int_{-R}^{R} \psi^2(x)\,dx = 1\,. \tag{2.3}$$

Предположим, что такое решение существует и является изолированным, т.е. имеется окрестность $\|z - z^*\| < \epsilon$, в которой $F(z) \neq 0$. Для отыскания z^* будем использовать НАМН. Суть этого метода, как известно, заключается в параметризации функции z непрерывным параметром $t \in [0, +\infty)$ ("время") с последующей заменой стационарного уравнения (2.2) эволюционным процессом

$$\begin{cases} F'(z(t)) \dfrac{dz(t)}{dt} + F(z(t)) = 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

где через $F'(z)$ обозначена производная Фреше, а z_0 есть начальное приближение к искомому решению. Уравнение (2.4) имеет первый интеграл $F(z) = e^{-t}F(z_0)$, из которого при дополнительных условиях непрерывности функций $F(z)$ и $F'(z)$, а также ограниченности $F'(z)^{-1}$ в некоторой окрестности точки z^*, вытекает /7,8/ сходимость при $t \to +\infty$ непрерывной траектории $z(t)$ к точному решению.

Для численной реализации НАМН необходима дискретизация уравнения (2.4). В работах /8,12/ для этой цели предложен и обоснован метод Эйлера, который и используется в настоящей работе. На другие возможности указывается в /13/.

Введем, вообще говоря, неравномерную сетку с шагом τ_k; тогда на каждом слое t_k (на каждой итерации) имеем линейную дифференциальную задачу

$$F'(z^k)\, w^k + F(z^k) = 0 \tag{2.5}$$

относительно приращения

$$w^k = \frac{\Delta z^k}{\Delta t_k} = \frac{z^{k+1} - z^k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{z^{k+1} - z^k}{\tau_k}.$$

Следующее приближение находится по формуле

$$z^{k+1} = z^k + \tau_k w^k. \tag{2.6}$$

В случае $\tau_k = 1$ для всех k мы приходим к обычному методу Ньютона, который для матричных нелинейных спектральных задач рассматривался, например, в /14/. В настоящей работе, как и ранее /2-4/, применяется выбор итерационного шага, предложенный в /9/. Суть его заключается в аппроксимации невязки

$$\delta(\tau) = \|F(z^k + \tau_k w^k)\|^2$$

квадратичным по τ полиномом, точка минимума которого определяет оптимальный шаг:

$$\tau_{opt} = \frac{\delta(0)}{\delta(0) + \delta(1)}. \tag{2.7}$$

Ясно, что $\tau_{opt} \in [0,1]$ и при $\tau_{opt} > 0{,}5$ имеет место сходимость процесса. Во избежание слишком медленной сходимости вводится ограничение $\tau_{opt} \geq 0{,}1$. В работе /7/ показано, что вблизи простого изолированного корня сходимость итераций (2.6), (2,7) является квадратичной. Ниже приведено численное исследование метода в применении к конкретной задаче.

Приведем подробную запись соотношений (2.6), при этом приращение

$$w^k = \left(\frac{d}{dt}\phi^k, \frac{d}{dt}\psi^k, \frac{d}{dt}h_0^k\right) = (a^k(x), b^k(x), c^k)$$

(для упрощения записи индекс k итерации опускаем):

$$-a'' + j_D(x)\cos\phi\, a - \phi'' + j_D(x)\cos\phi + \gamma = 0, \tag{2.8}$$

$$a'(\pm R) - c + \phi'(\pm R) - h_0 = 0, \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} -b'' + (j_D(x)\cos\phi - \lambda)\, b + j_D(x)\sin\phi\,\psi\, a - \\ -\psi'' + (j_D(x)\cos\phi - \lambda)\,\psi = 0, \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$b'(\pm R) + \psi'(\pm R) = 0. \tag{2.11}$$

Сюда надо добавить также соотношение ортогональности

$$\langle \psi, b \rangle = 0, \tag{2.12}$$

вытекающее из условия нормировки (2.3).

Для решения системы (2.8)-(2.11) воспользуемся "методом окаймления" — будем искать решение в виде

$$\begin{cases} a(x) = a_1(x) + c\, a_2(x), \\ b(x) = b_1(x) + c\, b_2(x), \end{cases} \tag{2.13}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — новые неизвестные функции. Подставляя (3.6) в (3.1)-(3.5) и выбирая коэффициенты перед с равными нулю, получим

$$a_1'' - j_D(x)\cos\phi\, a_1 = j_D(x)\sin\phi + \gamma - \phi'', \tag{2.14}$$

$$a_1'(\pm R) = h_0 - \phi'(\pm R), \tag{2.15}$$

$$a_2'' - j_D(x)\cos\phi\, a_2 = 0, \tag{2.16}$$

$$a_2'(\pm R) = 1, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} &b_1'' - (j_D(x)\cos\phi - \lambda)\, b_1 = \\ &= -j_D(x)\sin\phi\,\psi\, a_1 + (j_D(x)\cos\phi - \lambda)\,\psi - \psi'', \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$b_1'(\pm R) = -\psi(\pm R), \tag{2.19}$$

$$b_2'' - (j_D(x)\cos\phi - \lambda)\, b_2 = -j_D(x)\sin\phi\,\psi\, a_2, \tag{2.20}$$

$$b_2'(\pm R) = 0, \tag{2.21}$$

$$c = -\langle b_1, \psi\rangle / \langle b_2, \psi\rangle. \tag{2.22}$$

Таким образом, замена (2.13) позволяет свести задачу о вычислении приращений функций к решению четырех граничных задач с попарно одинаковыми дифференциальными операторами и разными правыми частями. Укажем, что для линейных спектральных задач этот подход обоснован в /11/. Приращение неизвестного h_0 определяется по формуле (2.22).

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Далее рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' - q(x)\,y = r(x), \quad x \in [-R, R], \tag{3.1}$$

с граничными условиями Неймана

$$y'(\pm R) = s. \tag{3.2}$$

К аналогичному виду путем простого преобразования приводится любая из граничных задач (2.14)-(2.21). Для численного решения введем на интервале $[-R, R]$ равномерную сетку

$$\omega = \{x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N;\ x_0 = -R,\ x_N = R\}$$

с шагом $h = 2R/N$, а также сетку $\bar\omega$, которая получается добавлением к ω двух точек $x_{-1} = x_0 - h$ и $x_{N+1} = x_N + h$. Для произвольной функции $f(x)$ на $[-R-h, R+h]$ положим $f_i = f(x_i)$.

Для аппроксимации уравнения (3.1) в узлах сетки ω применим формулы неявного численного дифференцирования

$$y_i'' \cong \overset{(2)}{D} y_i - TM_i + O(h^4), \tag{3.3}$$

где

$$\overset{(2)}{D} y_i = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}),$$

$$Ty_i = \frac{1}{12}(y_{i-1} + 10y_i + y_{i+1}).$$

Граничные условия (3.2) для численного решения заменим в точках x_0 и x_N при помощи формул

$$y_i' = \overset{(1)}{D}\left(y_i - \frac{h^2}{6} M_i\right) + O(h^4), \tag{3.4}$$

где

$$\overset{(1)}{D} = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}).$$

В правых частях формул (3.3), (3.4) M_i найдем из равенства

$$M_i - q_i y_i = r_i,$$

которое считаем справедливым во всех точках сетки $\bar\omega$.

Проведенная аппроксимация имеет четвертый порядок по шагу сетки.

Итак, после дискретизации задачи (3.1), (3.2) приходим к системе линейных уравнений относительно неизвестных $y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$, y_N, y_{N-1}. Матрица полученной системы трехдиагональна за исключением первой и последней строки, вытекающих из граничных условий (3.2), поскольку в них входят коэффициенты при y_1 и y_{N-1}. Но легко исключить y_1 из первого уравнения системы, рассмотрев совместно с ним второе уравнение, аппроксимирующее (3.1) в точке x_0. Аналогично при помощи предпоследнего уравнения линейной системы исключается из последнего уравнения y_{N-1}, и матрица системы становится трехдиагональной.

Дискретизированные граничные задачи (2.14)-(2.21) выгодно решать LU-разложением, так как у задач для a_1, a_2 и b_1, b_2 матрицы линейных систем одинаковы, а отличаются лишь свободные члены. Т.е. для четырех задач необходимо только два LU-разложения.

Для заданного $\lambda \geq 0$ алгоритм не обязательно сходится к решению с $\lambda = \lambda_{min}$. Если $\lambda_{min} < 0$, то при изменении параметров задачи могут происходить бифуркации неустойчивых решений в неустойчивые. В этом случае обращается в ноль некоторое высшее собственное значение, номер n которого (при $\lambda_{min} = \lambda_0$) определяет порядок точки бифуркации (конкретные примеры решений, полученных численным путем и имеющих точки бифуркации порядка $n \geq 1$, приведены в [2]). В рамках предлагаемого алгоритма проблема выделения точек бифуркации устойчивых решений решается проще всего при помощи осцилляционной теоремы для задачи Штурма — Лиувилля [11]: если решение $\phi(x)$ устойчиво, то число узлов собственной функции $\psi(x)$ равно нулю, т.е. $\lambda_{min} = \lambda$.

4. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Как описано в п.3, на каждой итерации выбор оптимального шага осуществлялся по алгоритму, предложенному в [9]. Был произведен расчет, подтверждающий эффективность такого подхода. В этом можно убедиться, рассмотрев сходимость задачи (2.4) к какому-либо конкретному решению. На рис. 1 показана зависимость невязки δ от шага τ для некоторых значений номера итерации. Видно, что зависимость $\delta(\tau)$ близка к квадратичной, и выбор оптимального шага τ_{opt} осуществляется вблизи вершины параболы, аппроксимирующей невязку.

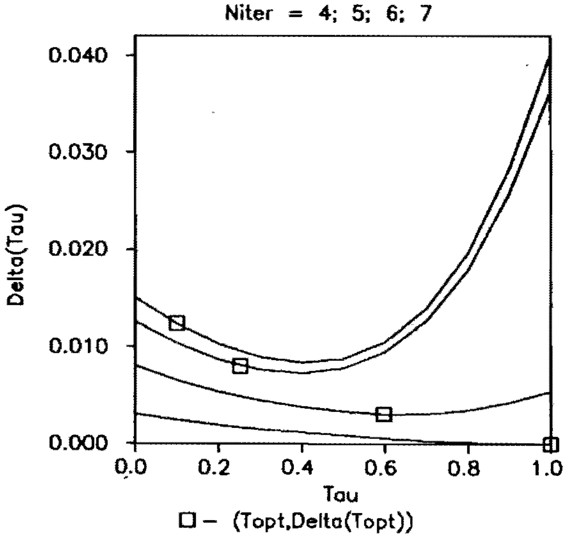

Рис. 1

Подробный анализ численных экспериментов с точки зрения физики явлений в джозефсоновских переходах будет проведен в отдельной работе. Здесь в качестве иллюстрации приведем лишь некоторые результаты расчетов.

В ходе исследований были получены различные как устойчивые, так и неустойчивые решения. На рис. 2 показаны некоторые неустойчивые решения $\phi(x)$ и соответствующие им собственные функции $\psi(x)$, найденные при длине перехода $2R = 10$ и размере неоднородности в середине $\mu = 1{,}2$.

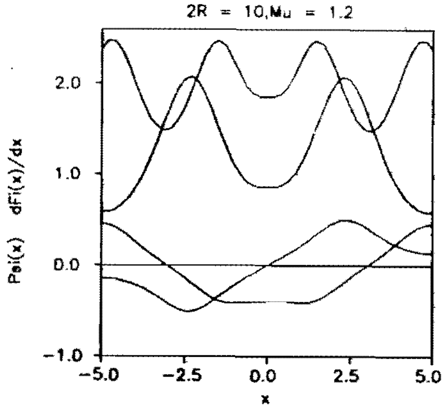

Рис. 2

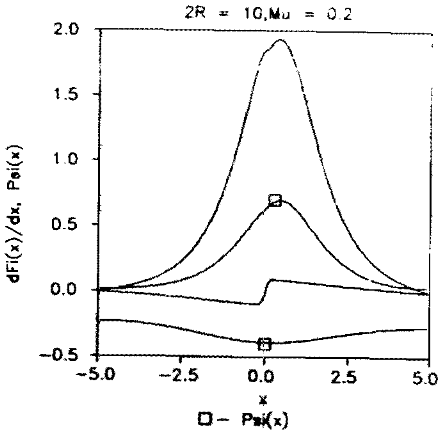

Рис. 3

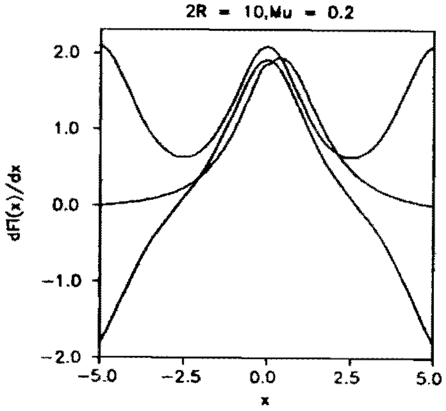

Рис. 4

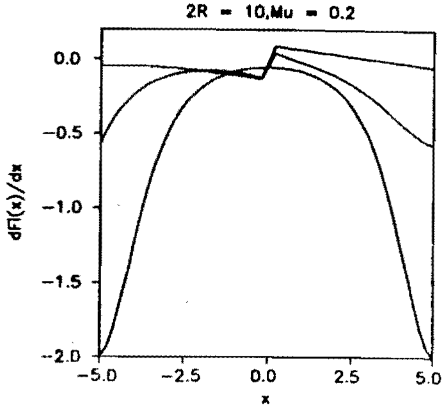

Рис. 5

Среди возможных решений ставилось целью исследовать так называемые мейсснеровские решения — такие распределения магнитного потока, когда магнитное поле проникает в переход только на длину порядка лондоновской длины, а также решения типа "флюксон", когда магнитное поле локализовано на микронеоднородности. Конкретные примеры указанных решений в окрестности точки бифуркации изображены на рис. 3.

Была получена зависимость критического тока γ_c от магнитного поля на концах перехода h_0 для мейсснеровского решения, флюксона и антифлюксона, а также изменение полного магнитного потока $\Delta\phi$ вдоль кривых $\gamma_c(h_0)$ и энергии $\mathcal{E}$, сосредоточенной внутри перехода.

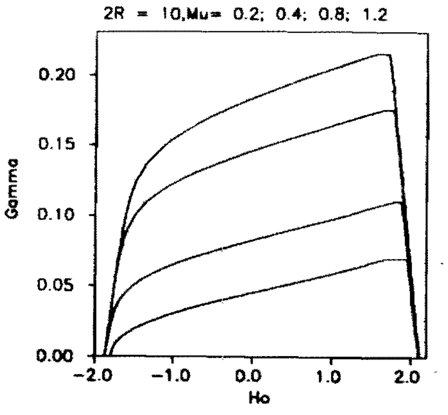

Рис.6

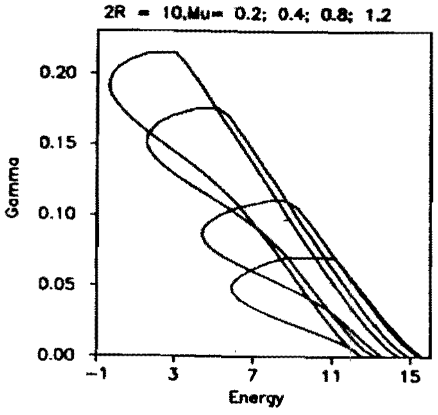

Рис.7

На рис. 4 показано развитие флюксона вдоль кривой $\gamma_c(h_0)$. На рис.5 представлено изменение мейсснеровского решения.

Проведен анализ влияния размера микронеоднородности μ на зависимость критического тока γ_c от магнитного поля h_0. Оказалось, что критический ток для флюксона при одном и том же магнитном поле больше для переходов с большим размером неоднородности (рис. 6). На мейсснеровские решения размер неоднородности существенного влияния не оказывает. Изменения критического тока при изменении μ вызывают, очевидно, изменения энергии перехода. Этот факт отражен на рис. 7.

5. УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА

Для сравнения численных результатов с реальными джозефсоновскими переходами может оказаться существенной неоднородность вдоль перехода внешнего тока γ. Поэтому рассмотрена модель, в которой введена зависимость величины γ от координаты x, имеющая вид

$$\gamma(x) = \frac{2R\gamma_0}{\pi - 2\arcsin\dfrac{\delta}{R}}(R^2+\delta^2-x^2)^{-1/2}, \tag{5.1}$$

где δ — параметр, $\delta \ll R$; γ_0 — средняя плотность тока через переход.

Для численной реализации измененной модели был изменен также способ аппроксимации граничных условий (3.4). Для того, чтобы не использовать точки $\bar{\omega}$ сетки $x_{-1} = -R - x$ и $x_{N+1} = R + h$, первая производная была заменена при помощи формул

Таблица 1

Случай $2R = 10$, $\mu = 0{,}2$

m(0) /s(0)	γ = Const	$\gamma = \gamma(x,\delta)$			
		δ			
		0,02	0,05	0,1	0,2
h = 0,2	21,53	—	—	—	—
h = 0,1	26,21	—	—	—	14,79
h = 0,05	26,10	—	—	14,34	15,10
h = 0,02	26,10	—	14,18	14,74	15,15
h = 0,01	26,10	13,73	14,50	14,82	15,14

Таблица 2

Случай $2R = 10$, $\mu = 0{,}2$

s(0)	γ = Const	$\gamma = \gamma(x,\delta)$			
		δ			
		0,02	0,05	0,1	0,2
h = 0,2	0,0454	—	—	—	—
h = 0,1	0,0375	—	—	—	0,0547
h = 0,05	0,0375	—	—	0,0557	0,0523
h = 0,02	0,0375	—	0,0556	0,0535	0,0523
h = 0,01	0,0375	0,0572	0,0540	0,0529	0,0521

Таблица 3

Случай $2R = 10$, $\mu = 0{,}2$

m(0)	γ = Const	$\gamma = \gamma(x,\delta)$			
		δ			
		0,02	0,05	0,1	0,2
h = 0,2	0,9774	—	—	—	—
h = 0,1	0,9839	—	—	—	0,8092
h = 0,05	0,9785	—	—	0,7890	0,7992
h = 0,02	0,9785	—	0,7887	0,7885	0,7917
h = 0,01	0,9785	0,7849	0,7835	0,7842	0,7890

$$y'_0 = \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4),$$

$$y'_N = \frac{1}{12h}(25y_N - 48y_{N-1} + 36y_{N-2} - 16y_{N-3} + 3y_{N-4}).$$

Теперь матрица дискретизированной задачи приводится к трехдиагональному виду следующим образом: совместно с первым уравнением системы, вытекающим из левого граничного условия, рассматриваются последующие три уравнения, и при их помощи из первого уравнения исключаются "ненужные" нам y_2, y_3, y_4; аналогично преобразуется последнее уравнение системы.

Согласно (5.1) плотность тока вблизи краев перехода сильно меняется. Для корректности численного эксперимента естественно потребовать, чтобы на участках наибольших градиентов $\gamma(x)$ на интервал пятидесятипроцентного изменения плотности тока попадали по крайней мере две точки сетки. Отсюда получается условие для шага сетки $h < 0{,}5\delta \ll R$.

Как выяснилось, распределение тока оказывает существенное влияние на критические кривые. Результаты расчетов приведены в таблицах 1, 2, 3, где приняты следующие обозначения: $s(0)$, $m(0)$ — критический ток в нулевом магнитном поле для флюксона и для мейсснеровского решения соответственно.

Авторы выражают благодарность Ю.С.Гальперн, А.Т.Филиппову и В.Я.Гольдину за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. – ЖЭТФ, 1984, т.86, с.1527.*
2. *Бояджиев Т.Л. и др. Сообщение ОИЯИ, Р11-85-807, Дубна, 1985.*
3. *Бояджиев Т.Л. и др. Сообщение ОИЯИ Р17-86-506, Дубна, 1986.*
4. *Filippov A.T. et al. – Phys. Lett. A, 1987, v.120, No1.*
5. *Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. М.: Мир, 1984.*
6. *Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985.*
7. *Гаврурин М.К. – Изв. вузов, математика, 1958, т.5/6, с.18.*
8. *Жидков Е.П., Пузынин И.В. – ДАН СССР, 1967, т.174, 2, с.271.*
9. *Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. – ЖВМ и МФ, 1981, т.21, №2, с.491.*
10. *Завьялов Ю.С. и др. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, с.491.*
11. *Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1979, с.398.*
12. *Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. – ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.1, с.127.*
13. *Ортега Дж., Рейнболд В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975, с.226.*
14. *Ruhe A., Siam J. – Numer Anal., 1973, v.10, No.4, p.674.*

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июня 1988 года.

Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В. Р11-88-409

Ньютоновский алгоритм вычисления критических параметров в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе

Рассматривается система

$$\phi'' = j_D(x)\sin\phi + \gamma(x), \quad x \in [-R, R], \quad \phi'(\pm R) = h_0, \tag{1}$$

$$\psi'' = [\,j_D(x)\cos\phi - \lambda\,]\psi, \quad \psi'(\pm R) = 0, \tag{2}$$

где $j_D(x)$ и $\gamma(x)$ — заданные гладкие функции. Уравнение (1) описывает, в частности, стационарные состояния $\phi(x,\gamma,h_0)$ в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе длиной $2R$ с внешним током $\gamma = \int_{-R}^{R}\gamma(x)\,dx/2R$. Знак минимального собственного значения λ_{min} задачи Штурма — Лиувилля (2) определяет устойчивость или неустойчивость решения ϕ в смысле малых возмущений. Для вычисления точек бифуркаций $\gamma_c(h_0)$ система (1), (2) рассматривается при $\lambda = 0$ как нелинейная задача на собственные значения со спектральным параметром h_0, численная реализация которой проводится при помощи непрерывного аналога метода Ньютона и сплайн-разностной схемы порядка $O(h^4)$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Boyadjiev T.L., Pavlov D.V., Puzynin I.V. P11-88-409

Newton's Algorithm for Calculation of the Critical Parameters in One-Dimensional Inhomogeneous Josephson Junction

The system

$$\phi'' = j_D(x)\sin\phi + \gamma(x), \quad x \in [-R, R], \quad \phi'(\pm R) = h_0, \tag{1}$$

$$\psi'' = [\,j_D(x)\cos\phi - \lambda\,]\psi, \quad \psi'(+R) = 0, \tag{2}$$

for the real functions ϕ and ψ is considered. Here $j_D(x)$ and $\gamma(x)$ are given smooth functions. Equation (1) describes, in particular, the static distributions $\phi(x,\gamma,h_0)$ in one-dimensional inhomogeneous Josephson junction of length 2R, the external current being equal to $\gamma = \int_{-R}^{R}\gamma(x)\,dx/2R$. The sign of the minimal eigenvalue λ_{min} of the Sturm — Liouvelle problem (2) decides whether or not the solution is stable under small perturbations. In order to calculate the bifurcation points $\gamma_c(h_0)$ the system (1), (2) for $\lambda = 0$ is regarded as a nonlinear eigenvalue problem with spectral parameter h_0. Numerical calculations are fulfilled using the continious analog of the Newton's method and spline-difference scheme of order $O(h^4)$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988