

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

У 424  
P11-88-335

**Е.П.Жидков, И.В.Куц, Р.В.Полякова, И.А.Шелаев,  
И.П.Юдин**

**РЕШЕНИЕ**

**ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
МАГНИТОСТАТИКИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

Направлено в Оргкомитет X Советско-чехословацкого совещания "Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики" (ЧССР, сентябрь 1988 г.) и в "ЖВМ и МФ"

**1988**

## Введение

В данной работе рассмотрено решение обратной задачи магнитостатики для безжелезного сверхпроводящего (СП) дипольного магнита, состоящего из прямоугольных токовых обмоток возбуждения. Требуемое магнитное поле создавалось путем подбора положения этих обмоток. При этом токовые обмотки должны запитываться только от одного источника питания и ток во всех проводниках (витках), образующих указанные обмотки, одинаков.

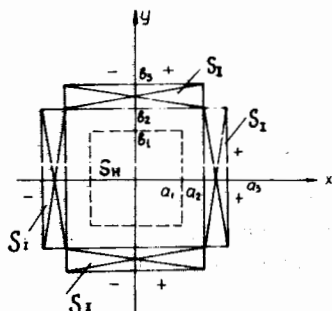


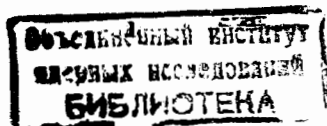
Рис. I

На геометрию магнитной системы (см. рис. I), величину тока в СП витке, а также на характер и величину магнитного поля налагались конкретные условия, вытекающие из возможностей изготовления и использования магнита на ускорителе ЛВЭ ОИЯИ.

Математически задача сводилась к классу некорректных задач <sup>/I/</sup> и решалась методом регуляризации по А.Н.Тихонову.

### Математическая постановка задачи

Пусть в апертуре магнита (см. рис. I) необходимо создать однород-



ное магнитное поле  $\vec{H}(x,y)$  с единственной отличной от нуля компонентой  $H_y(x,y)$ . Предполагаем, что продольные размеры магнита значительно больше поперечных и расчеты не зависят от выбора сечения. Запишем известное выражение (закон Био-Савара) для вычисления  $H_y(x,y)$ :

$$H_y(x,y) = \iint_{S_I} \frac{J(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot (x-\tilde{x}) d\tilde{x} \cdot d\tilde{y}}{[(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2]^{3/2}} \equiv I_0 \cdot G(\tilde{s},x,y), \quad (1)$$

где  $(x,y) \in S_H$ ,  $\tilde{s} \equiv (\tilde{x},\tilde{y}) \in S_I$ ,  $I_0$  - величина тока в сечении  $S_I$ ,  $J(\tilde{x},\tilde{y})$  - плотность тока,  $G(\tilde{s},x,y)$  - функция Грина. Для прямоугольного витка вид  $G(\tilde{s},x,y)$  приведен в [2-4].

Токовая обмотка (область  $S_I$ ) реально состоит из  $m = N_x + N_y$  витков, где  $N_x$  - число витков обмотки вдоль оси  $x$ , а  $N_y$  - число витков обмотки вдоль оси  $y$ . Поперечные размеры витка  $2a = 0,40$  см по ширине и  $2b = 0,15$  см по высоте. Как указывалось выше, плотность тока в витке постоянна, т.е.  $J(x,y) = J_0$ . В этом случае для области  $S_I$ , состоящей из  $m$  одинаковых витков с плотностью тока  $J_0$ , уравнение (1) представим в виде

$$J_0 \cdot \sum_{i=1}^m \int_{x_i-a}^{x_i+a} \int_{y_i-b}^{y_i+b} \frac{(x-\tilde{x}) \cdot d\tilde{x} \cdot d\tilde{y}}{[(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2]^{3/2}} = H_y(x,y) \equiv H_0, \quad (2)$$

где  $(x_i, y_i)$  - координаты центра  $i$ -го витка;  $H_0 = \text{const}$  в области  $S_H$ . Таким образом, для решения задачи требуется подобрать  $J_0$  и центры  $(x_i, y_i)$  такие, чтобы  $H_y(x,y) = H_0$  в области  $S_H$ . Такая задача относится к классу нелинейных обратных задач, которые, как известно [1], для  $m$  достаточно больших относятся к классу некорректных задач.

#### Метод решения задачи

Решение нашей некорректной задачи сводится к решению плохо обусловленной системы  $2m+1$  нелинейных уравнений. Чтобы избежать трудностей, связанных с решением таких систем уравнений, проведем решение задачи (2) в два этапа. На первом этапе считаем, что витки закреплены и распределены по обмотке равномерно, а искомой функцией является плотность тока  $J(\tilde{x},\tilde{y})$ . Тем самым задача (1) становится линейной. Из ее решения (функция  $J(\tilde{x},\tilde{y})$ ) выделяем две части:  $J_x(\tilde{x}) \equiv J(\tilde{x},\tilde{y} \equiv \text{const})$ , непрерывную вдоль оси  $x$ , и  $J_y(\tilde{y}) \equiv J(\tilde{x} \equiv \text{const}, \tilde{y})$ , непрерывную вдоль оси  $y$ . На втором этапе полученные непрерывные распределения  $J_x(\tilde{x})$  и  $J_y(\tilde{y})$  моделировались с помощью кусочно-постоянных функций - "блоков" при условии постоянства тока в одном витке. ("Блоки" формируются из витков стандартных размеров: 0,4 см x

x 0,15 см). Предполагалось, что составленные таким образом "блочные" функции дадут решение задачи (2) со всеми поставленными ограничениями.

I этап. Отметим, что уравнение (1) на этом этапе приобрело вид линейного интегрального уравнения Фредгольма I рода. Задача определения распределения  $J(\tilde{x},\tilde{y})$  по известному  $H_y(x,y)$  является неустойчивой и относится к классу некорректно поставленных задач. Это проиллюстрировано на рис. 2, где приведено полученное авторами решение этой задачи одним из обычных методов без введения регуляризации.

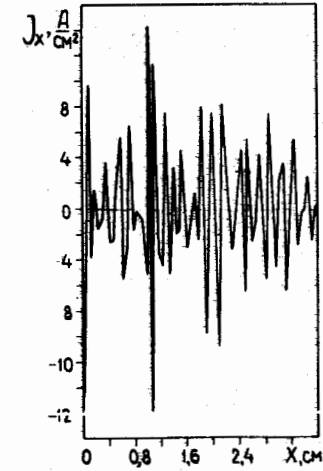


Рис. 2

В дальнейшем задача решалась методом регуляризации по Тихонову. Решение сводилось к определению функции  $J(\tilde{x},\tilde{y})$ , минимизирующей стабилизирующий функционал  $m^\alpha$ :

$$m^\alpha(J,H) = \Phi[J(\tilde{x},\tilde{y}), H_y(x,y)] + \alpha \cdot \Omega[J(\tilde{x},\tilde{y})], \quad (3)$$

где

$$\Phi[J(\tilde{x},\tilde{y}), H_y(x,y)] = \iint_{S_H} [H_y(x,y) - \iint_{S_I} J(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot K(x,y,\tilde{x},\tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}]^2 dx dy \quad (4)$$

- квадратичное уклонение оператора  $\iint_{S_I} J(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot k(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}$   
от заданной функции  $N_Y(x, y) = N_0$  в области  $S_H$ ,

$$k(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{x - \tilde{x}}{[(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2]^{3/2}} \quad \text{в области } S_I,$$

$$\Omega [J(\tilde{x}, \tilde{y})] = \iint_{S_I} J^2(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y} \quad - \text{стабилизирующий функционал,}$$

$\alpha$  - параметр регуляризации, который выбирается из условия

$$\iint_{S_H} [N_Y(x, y) - \iint_{S_I} J^\alpha(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot k(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}]^2 dx dy \leq \delta, \quad (5)$$

где  $J^\alpha$  - элемент, на котором при данном  $\alpha$   $M^\alpha$  достигает минимума для данного  $\delta$ .

Для проведения численных расчетов проведем дискретизацию. Запишем предыдущие выражения в следующем виде:

$$M^\alpha = \sum_{j=1}^n [N_j(x_j, y_j) - \sum_{i=1}^m J_i(x_i, y_i) K_{ij}(x_j, y_j, x_i, y_i)]^2 + \alpha \sum_{i=1}^m J_i^2(x_i, y_i) \Delta x \Delta y, \quad (6)$$

где  $(x_i, y_i) \in S_I$ ,  $(x_j, y_j) \in S_H$ ,  $n$  - число точек в области  $S_H$ ,  $m$  - число точек в области  $S_I$ ,

$$K_{ij} = \frac{\int_{x_i-a}^{x_i+a} \int_{y_i-b}^{y_i+b} \frac{(x_j-x) dx \cdot dy}{[(x_j-x)^2 + (y_j-y)^2]^{3/2}} = \frac{y_i - y_j + b}{2} \ln \frac{(x_i - x_j + a)^2 + (y_i - y_j + b)^2}{(x_i - x_j - a)^2 + (y_i - y_j + b)^2}. \quad (7)$$

Элементы  $J_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , минимизирующие  $M^\alpha$ , находились как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial M^\alpha}{\partial J_1} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial M^\alpha}{\partial J_m} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{где } \frac{\partial M^\alpha}{\partial J_\ell} = -2 \sum_{j=1}^n N_j K_{\ell j} \Delta x \Delta y + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m J_i \cdot K_{\ell j} \cdot K_{ij} \Delta x \Delta y + 2 \cdot \alpha \cdot J_\ell \cdot \Delta \tilde{x} \cdot \Delta \tilde{y}. \quad (9)$$

Полагая  $\alpha' \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \alpha \cdot \Delta \tilde{x} \cdot \Delta \tilde{y}$ , получим

$$\sum_{i=1}^m J_i \cdot \sum_{j=1}^n K_{\ell j} \cdot K_{ij} + \alpha' \cdot J_\ell = \sum_{j=1}^n N_j \cdot N_{\ell j}. \quad (10)$$

Параметр  $\alpha'$  выбирается так, чтобы квадратичное уклонение

$$F = \sum_{j=1}^n [N_0 - \sum_{i=1}^m J_i^\alpha(x_i, y_i) \cdot K_{ij}(x_j, y_j, \tilde{x}_i, \tilde{y}_i)]^2 \Delta x \Delta y$$

было минимальное, такое, что  $F \leq \delta \leq 10^{-6}$ . Здесь  $J_i^\alpha$  - решение (10) при данном  $\alpha'$ . В (10)  $\Delta x = \Delta y = 0,25$  см,  $\Delta \tilde{x} = \Delta \tilde{y} = 0,055$  см и  $\alpha = \alpha' \cdot 21$ .

В таблице I приведена зависимость  $F$  от  $\alpha'$  в интервале  $\alpha' = 10^{-8} + 10^{-16}$ . В качестве наилучшего выбрано  $\alpha' = 10^{-11}$  ( $\alpha = 21 \cdot 10^{-11}$ ).

Таблица I. Зависимость функционала  $F$  - квадрата невязки от параметра регуляризации  $\alpha'$

$\alpha'$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$	$10^{-11}$	$10^{-12}$
$F$	$271 \cdot 10^{-10}$	$79 \cdot 10^{-10}$	$5,5 \cdot 10^{-10}$	$0,14 \cdot 10^{-10}$	$2,6 \cdot 10^{-10}$
$\alpha'$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$	$10^{-16}$	
$F$	$55 \cdot 10^{-10}$	$846 \cdot 10^{-10}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$	0,354	

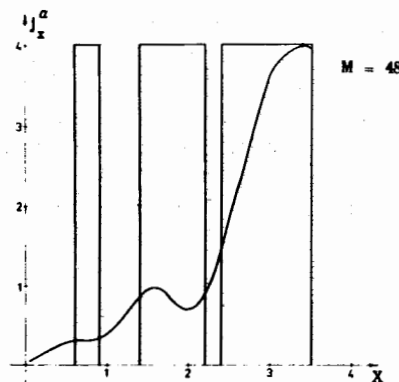


Рис. 3

Таблица 2

Влияние выбора количества блоков и их размещения на однородность поля внутри апертуры

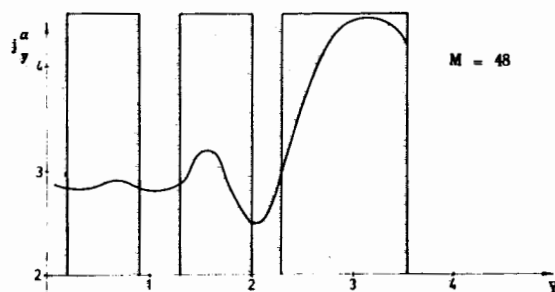


Рис. 4

На рис. 3 и рис. 4 изображены зависимости  $J_x$  от  $x$  ( $x = 0+3,6$  см;  $y = 4$  см),  $J_y$  от  $y$  ( $x = 4$  см;  $y = 0+3,6$  см), полученные как решение системы (10) при  $\alpha' = 10^{-11}$ .

II этап. На втором этапе решения задачи непрерывные распределения  $J_x$  и  $J_y$  моделировались кусочно-постоянными функциями - "блоками". При этом требовалось выполнение следующих условий, вытекающих из практических возможностей изготовления исследуемых магнитов:

1) плотность тока во всех блоках постоянна и одинакова:

$$J_i = J_0, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad k - \text{число блоков};$$

2) каждому блоку должно соответствовать целое число витков, т.е. длина каждого блока кратна высоте одного витка  $2b$  (в нашем случае  $2b = 0,15$  см);

3) при переходе от непрерывного распределения  $J_x$  и  $J_y$  к кусочно-постоянному необходимо как можно меньше потерять витков.

В первом приближении блоки размещались так, чтобы зазоры между ними соответствовали минимумам на кривых  $J_x$ ,  $J_y$ . Площади блоков  $s_i$  определялись численным интегрированием  $J_x$ ,  $J_y$  по методу трапеций от левого минимума полученного непрерывного распределения  $J_x$ ,  $J_y$  до правого минимума. Плотности тока в  $i$ -м блоке  $J_i$  определялись как  $J_i = s_i / l_i$ , где  $l_i$  - расстояние между соседними минимумами. Затем из условия  $J_0 = \max J_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ , выбиралась плотность тока  $J_0$ , одинаковая во всех блоках. В этом случае размеры

№ варианта	$N_y$ - количество витков по Y	$N_k$ кол-во витков по блокам	$N_x$ кол-во витков по X	$N_k$ кол-во витков по блокам	Средняя относительная точность низших гармоник $c_2, c_4, c_6$
I	24	24 -	10	6 три блока I	$0,2 \cdot 10^{-1}$ $0,4 \cdot 10^{-2}$ $0,8 \cdot 10^{-4}$
2	24	24 - один блок	10	8 три блока I	$0,17 \cdot 10^{-1}$ $0,5 \cdot 10^{-2}$ $0,14 \cdot 10^{-3}$
3	20	9 три блока 4	9	4 три блока 2	$0,35 \cdot 10^{-2}$ $0,84 \cdot 10^{-3}$ $0,13 \cdot 10^{-2}$
4	20	10 три блока 5	9	6 три блока I	$0,4 \cdot 10^{-3}$ $0,5 \cdot 10^{-4}$ $0,4 \cdot 10^{-3}$
5	20	12 два блока 8	9	6 три блока I	$0,4 \cdot 10^{-2}$ $0,1 \cdot 10^{-3}$ $0,9 \cdot 10^{-3}$
6	20	11 три блока 4	9	6 три блока I	$0,2 \cdot 10^{-2}$ $0,1 \cdot 10^{-2}$ $0,2 \cdot 10^{-2}$
7	20	10 три блока 4	9	6 три блока I	$0,2 \cdot 10^{-2}$ $0,9 \cdot 10^{-3}$ $0,32 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3

Количество витков в блоках и координаты центров блоков для оптимального варианта магнита

N <sub>y</sub>	N <sup>k</sup> <sub>1</sub>			N <sub>x</sub>			N <sup>k</sup> <sub>2</sub>			x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	Средняя относительная точность низших гармоник c <sub>2</sub> , c <sub>4</sub> , c <sub>6</sub>
	N <sub>2</sub>	N <sub>1</sub>	N <sub>1</sub>	N <sub>x</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>1</sub>	y=const=3,8	y=const=3,8					
10													
20	5	5	5	9	2	1	6	2	1	1,0017	2,2937	3,1406	0,3 · 10 <sup>-6</sup> ± 0,5 · 10 <sup>-6</sup>

блоков не выходят за рамки  $l_1$ . Далее, так как в каждом блоке должно быть целое число витков, длины блоков  $l_i$  определялись как  $l_i = 0,15 \times N_i$ , где  $N_i$  - целая часть отношения  $a_i / (0,15 \times J_0)$ . В этом первом приближении размещение блоков между всеми минимумами приводит к большим потерям витков. Наименьшие же потери витков происходят при размещении на каждом из непрерывных распределений  $J_x$  и  $J_y$  трех блоков (см. рис.3, рис.4). Размеры блоков магнита с различными конфигурациями приведены в таблице 2.

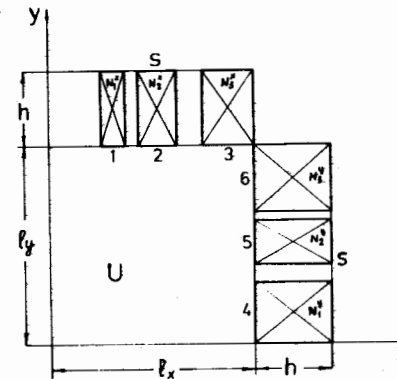


Рис 5

После такого предварительного размещения блоков далее задача решалась с использованием программы ГМИ1 - минимизации квадратичного функционала<sup>/5/</sup>. В качестве варьируемых параметров брались координаты центров блоков.

Результаты такой минимизации приводятся в таблице 3. На рис.5 приведена одна из возможных конфигураций реального магнита, в котором однородность поля  $\Delta v/v \leq 1 \cdot 10^{-4}$  в 80% размеров апертуры.

### Заключение

Таким образом, результаты проведенных численных экспериментов позволяют сделать следующее заключение.

I. Использование безжелезного СП-диполя с прямоугольной геометрией обмотки дает возможность получить высокооднородное магнитное поле величиной 4-5 Тл в 80% размеров апертуры.

2. Нелинейные эффекты (  $\Delta v/v$  ) сравнительно невелики для конфигураций, предложенных к технической реализации.

3. Расчеты магнитных полей и их неоднородностей проведены методом регуляризации с использованием системы написанных на ФОРТРАНе программ.

4. Проведенное исследование послужит основой для численного моделирования многослойного безжелезного СП-диполя и его дальнейшей технической реализации.

#### Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Наука, М., 1974.
2. Полякова Р.В. ОИЯИ, II-12228, Дубна, 1979.
3. Полякова Р.В. ОИЯИ, II-12436, Дубна, 1979.
4. Шелаев И.А., Клин И.П. ОИЯИ, P9-80-333, Дубна, 1980.
5. Сялин И.Н. ОИЯИ, II-62, Дубна, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 мая 1988 года.

Жидков Е.П. и др.

P11-88-335

Решение одной нелинейной обратной задачи магнитостатики методом регуляризации

Исследовано решение нелинейной обратной задачи магнитостатики в случае, когда требуемое магнитное поле необходимо создать с помощью проводников, координаты которых варьируются при условии, что ток во всех проводниках одинаков. Известно, что такие задачи относятся к классу некорректных задач. Приведена математическая постановка этого класса нелинейных обратных задач магнитостатики. Предлагаемый численный алгоритм, использующий метод регуляризации по А.Н.Тихонову, позволяет сравнительно легко преодолеть трудности, связанные с решением плохо обусловленных систем уравнений, к которым обычно сводятся обратные задачи магнитостатики, и рассчитать геометрию обмоток возбуждения безжелезного сверхпроводящего дипольного магнита, обеспечивающего однородность магнитного поля вплоть до  $10^{-5}$  внутри прямоугольной апертуры.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P. et al.

P11-88-335

Solution of Some Nonlinear Magnetostatic Inverse Problem by a Regularization Method

A nonlinear magnetostatic inverse problem is investigated for a case when it is needed to create a required magnetic field using conductors which coordinates vary on condition that current value is equal in all the conductors. It is known that the same problems fall under the category of noncorrect problems. Mathematical statement of this type of nonlinear magnetostatic inverse problems is given. The proposed numerical algorithm using the regularization method by A.N.Tikhonov permits to overcome comparatively easily the difficulties connected with badly conditioned equation systems to which usually the magnetostatic inverse problems reduce. This algorithm allows one to calculate the existing winding geometry of superconducting dipole ironless magnet which ensures a magnetic field homogeneity up to  $10^{-5}$  within a rectangular aperture.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1988

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. (2 тома)	7 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р. 00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р. 80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике Алушта, 1986.	4 р. 50 к.
—	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. (2 тома)	13 р. 50 к.
Д1,2-86-669	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. (2 тома)	7 р. 35 к.
Д9-87-105	Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1986. (2 тома)	13 р. 45 к.
Д7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна, 1986.	7 р. 10 к.
Д2-87-123	Труды Совещания "Ренормгруппа - 86". Дубна, 1986.	4 р. 45 к.
Д4-87-692	Труды Международного совещания по теории малочастичных и кварк-адронных систем. Дубна, 1987.	4 р. 30 к.
Д2-87-798	Труды VIII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1987.	3 р. 55 к.
Д14-87-799	Труды II Международного симпозиума по проблемам взаимодействия мюонов и пионов с веществом. Дубна, 1987.	4 р. 20 к.
Д17-88-95	Труды IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1987.	5 р. 20 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.