

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Ж - 694

P11-88-15

Е.П.Жидков, Г.Е.Мазуркевич, Б.Н.Хоромский,
И.П.Юдин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
КРАЕВОГО ПОЛЯ
СИНХРОТРОННОГО ДИПОЛЬНОГО МАГНИТА

Направлено в "Журнал технической
физики"

1988

ВВЕДЕНИЕ

В Лаборатории высоких энергий ОИЯИ проводятся работы по комплексным испытаниям сверхпроводящего (СП) ускорителя — синхротрона СПИН^{1,2/} на энергию протонов 1,5 ГэВ. В таком ускорителе предъявляются высокие требования к качеству магнитного поля в апертуре поворотного СП-диполя^{3,4/}. Проблеме получения конфигурации диполя, отвечающей этим требованиям в области энергий инжекции пучка, посвящена работа^{5/}. Полученная в^{5/} конфигурация была реализована в поворотном магните регулярной структуры синхротрона СПИН

(см. рис. 1а, где $\rho_x = 0,15$ м, $\rho_y = 0,14$ м, $\rho_z = 0,396$ м, апертюра $6,5 \times 5,5 \cdot 10^{-4}$ м²). Исследование распределения двумерного магнитного поля с учетом табличной зависимости магнитной проницаемости μ от индукции магнитного поля \vec{B} : $\mu = \mu(|\vec{B}|)^{6/}$, проведено в работах^{6-8/}.

Целью данной работы является численный анализ пространственного распределения поля СП-диполя, в первую очередь анализ эффектов, возникающих на торцах магнитопровода. Анализ некоторых аналогичных магнитных систем был проведен в работах^{9, 21, 22/}.

Расчеты проводились с помощью модульного комплекса программ МОК31, специально созданного для этих целей. При разработке МОК31 использован один из эффективных методов анализа нелинейных пространственных магнитных систем, основанный на пред-

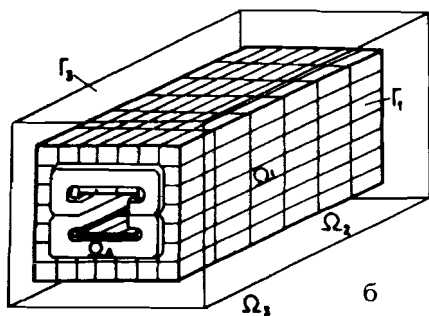
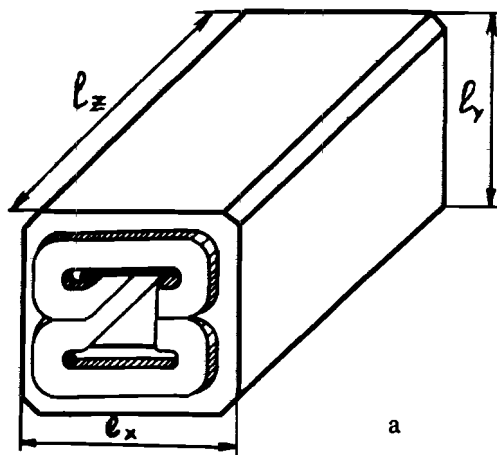


Рис. 1

ставлении полного поля \vec{H} в виде суммы поля от источников в вакууме \vec{H}^0 и поля намагниченной среды \vec{H}^m :

$$\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^m,$$

при этом для описания \vec{H}^m достаточно одной скалярной функции u [10]. В этом случае задачи вычисления поля от токовых обмоток \vec{H}^0 и вычисления функции u разделяются и их можно оптимизировать независимо друг от друга. При численном решении краевой задачи для скалярной функции u отпадает необходимость рассматривать токовые области, что ведет к значительному упрощению дискретизации задачи.

Отметим особенности данного подхода. Вычисление поля \vec{H}^0 от токовых обмоток сложной конфигурации с достаточной точностью — довольно трудоемкая задача: в комплексе программ МОКЗ1 вычисление \vec{H}^0 и функций от \vec{H}^0 , необходимых для получения скалярного потенциала u , занимает 30-35% времени решения всей задачи.

Другая проблема состоит в том, чтобы с необходимой точностью аппроксимировать поведение скалярной функции u на бесконечности. Объединение методов потенциала и конечных элементов для решения этой задачи рассмотрено в работе [12]. Другим эффективным подходом к решению этой проблемы, как показано в [13, 14], является сведение ее к краевой задаче для скалярного потенциала внутри некоторой вспомогательной области, содержащей ферромагнетик, со специальным условием интегрального типа на границе этой области. Это специальное граничное условие точно учитывает поведение потенциала u на бесконечности. В работе [11] рассмотрены проблемы разрешимости и итерационные методы решения такой краевой задачи.

Использование специальных областей (параллелепипед, шар, цилиндр) в качестве вспомогательных дает возможность эффективно численно решать на границе таких областей возникающие интегральные уравнения.

В модульном комплексе программ МОКЗ1 в качестве вспомогательной области используется параллелепипед с квадратом в основании. На рис. 1б эта область обозначена через Ω_3 , ее граница — через Γ_3 с внутренней нормалью \vec{n}_3 . Область Ω_3 содержит дипольный магнит: область Ω_1 — ферромагнетик с магнитной проницаемостью μ , зависящей от величины магнитной индукции $|B|$; она ограничена поверхностью Γ_1 с внутренней нормалью \vec{n}_1 . Область Ω_A соответствует токовым обмоткам. Направление осей координат показано на рис. 2, где изображена 1/8 часть области, в которой проводятся расчеты. В дальнейшем изложении используются введенные здесь обозначения.

По сравнению с программами GFUN3D и MAGSYS, с помощью которых проводился анализ поля СП-диполя в работах [21, 22], МОКЗ1 дает возможность: а) проводить расчеты на последовательности сеток, что позволяет контролировать точность расчетов в процессе вычислений при отсутствии экспериментальных данных, уменьшая суммарное время

счета; б) находить результирующее поле сразу на большом массиве точек (около $5 \cdot 10^4$ точек, в том числе $1,5 \cdot 10^4$ в железном сердечнике) для последующего применения карты поля в программах, моделирующих движение пучка частиц в ускорителе, в) изменять функциональное наполнение (как в сторону усложнения, так и в сторону упрощения) основных модулей комплекса независимо друг от друга с целью наиболее полного использования специфики структурных характеристик магнитной системы. В частности, для решения дифференциальной задачи могут быть использованы как метод конечных разностей, так и метод конечных элементов, а краевое условие на бесконечности может быть аппроксимировано на сетке, не зависящей от внутреннего разбиения. Следует также отметить, что г) поле от источников тока в вакууме необходимо вычислять лишь на двумерной поверхности ферромагнетика один раз до начала расчетов.

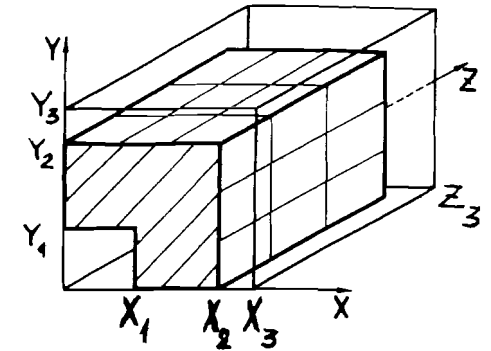


Рис. 2

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем математическую постановку задачи относительно двух скалярных потенциалов $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$ (считаем, что внешние токи по намагниченной среде Ω_1 не протекают); через u_1 и u_2 магнитное поле выражается по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= -\nabla u_1(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_1, \\ \vec{H}_2 &= \vec{H}^0 - \nabla u_2(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_2', \end{aligned} \quad (1)$$

Ω_2' — область вакуума, содержащая бесконечно удаленную точку, $\Omega_1 \cup \Gamma_1 \cup \Omega_2' = R^3$. Поле \vec{H}^0 создается током плотности \vec{j}_0 , протекающим по обмоткам Ω_A . \vec{H}^0 считаем известным, оно вычисляется по закону Био-Савара-Лапласа:

$$\begin{aligned} \vec{H}^0 &= \frac{1}{c} \int_{\Omega_A} \frac{\vec{j}_0(\vec{x} - \vec{x}_A)}{|\vec{x} - \vec{x}_A|^3} d\vec{x}_A, \\ \text{причем} \quad \int_{\Omega_A} \vec{j}_0(\vec{x}_A) d\vec{x}_A &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Стационарные уравнения Максвелла для магнитоизотропных сред при использовании (1), (2) преобразуются в систему уравнений^{/10/}:

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(\mu \frac{d}{dx_i} u_1 \right) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega_1, \quad (3)$$

$$-\Delta u_2 = 0, \quad \vec{x} \in \Omega_2'. \quad (4)$$

Система (3), (4) дополняется условиями на границе раздела сред Γ_1 :

$$\frac{du_1}{d\vec{n}_1} - \frac{du_2}{d\vec{n}_1} = \psi(\vec{x}), \quad (5)$$

$$u_1 = u_2 - \phi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma_1, \quad (6)$$

и условием на бесконечности

$$u_2(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right) \text{ при } |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

В (5) $\frac{du_i}{d\vec{n}_i}$ — координатные производные, определенные выражением

$$\frac{du_i}{d\vec{n}_i} = \sum_{j=1}^3 \mu \frac{du_j}{dx_j} \cos(\vec{x}_j, \vec{n}_i), \quad i = 1, 2,$$

при $\vec{x} \in \Omega_2'$ $\mu = 1$. Функции $\psi(\vec{x})$ и $\phi(\vec{x})$ определены на Γ_1 и задаются соотношениями

$$\psi(\vec{x}) = -(\vec{H}^0 \vec{n}_1), \quad (8)$$

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} (\vec{H}^0 \vec{x} \vec{n}_1) d\vec{r},$$

\vec{r} — вектор касательной к Γ_1 , \vec{x}_0 — произвольная точка на поверхности Γ_1 .

Для точного учета условия (6) помещаем нелинейную среду во вспомогательную область Ω_3 (рис. 1б), на границе которой записываем условие, эквивалентное (6)^{/11/}:

$$(E + K)u_2 = L \frac{du_2}{d\vec{n}_3}; \quad (9)$$

E — единичный оператор, операторы K и L задаются соотношениями

$$Ku_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_3} \frac{\cos((\vec{x}_p - \vec{x}), \vec{n}_3)}{|\vec{x}_p - \vec{x}|^2} u_2(\vec{x}_p) d\sigma_p,$$

$$L \frac{du_2}{d\vec{n}_3} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_3} \frac{1}{|\vec{x}_p - \vec{x}|} \frac{du_2(\vec{x}_p)}{d\vec{n}_3} d\sigma_p.$$

В области $\Omega_2 = \bar{\Omega}_3 / \bar{\Omega}_1$ сохраняем уравнение (4). Решение задачи (3), (4), (5) с граничным условием (8) сводится к решению операторного уравнения, определенного на границе вспомогательной области, относительно функции $y \equiv u_2|_{\Gamma_3}$ ^{/11/}:

$$S_1^{-1}y + S_2^{-1}y = 0. \quad (10)$$

Здесь S_1^{-1} — оператор, обратный нелинейному оператору Пуанкаре — Стеклова, определенному для области Ω_3 и дифференциального оператора (3), (4), (5) при $\phi \equiv 0$ ^{/11/}; $S_2^{-1} \equiv L^{-1}(E + K)$ — линейный оператор. Следующие свойства функции $\mu(\vec{x}, |\vec{B}|)$ гарантируют существование и единственность решения (9) ($\vec{x} \in \Omega_1$; $t, r \in [0, \infty)$)^{/11/}:

$$\mu(\vec{x}, t)t - \mu(\vec{x}, r)r \geq m(t - r), \quad t \geq r, \quad m > 0, \quad (11)$$

$$|\mu(\vec{x}, t)t - \mu(\vec{x}, r)r| \leq M|t - r|.$$

Функция $\mu(\vec{x}, t)t$ непрерывно дифференцируема по t , причем

$$\left| \frac{d}{dt} \mu(\vec{x}, t)t \right| \leq M.$$

При выполнении свойств (10) так же сходятся итерационные процессы решения (9): метод простой итерации, метод Ньютона^{/11/}, методы, основанные на минимизации функционала.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Метод простой итерации решения задачи (9), реализованный в комплексе программ МОКЗ1, выглядит следующим образом:

$$y_{n+1} = (1 - \tau)y_n + S_2 S_1^{-1} y_n. \quad (12)$$

Он включает в себя следующие этапы:

I. Вычисление вектора $v = S_1^{-1} y_n$. Это эквивалентно решению нелинейной задачи (3), (4), (5) в области Ω_3 с граничным условием Дирихле на Γ_3 : $u_2(\vec{x}) = y_n(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma_3$. Далее находим

$$v(\vec{x}) = \frac{du_2(\vec{x})}{d\vec{n}_3}, \quad \vec{x} \in \Gamma_3.$$

II. Вычисление вектора $y_{n+1/2} = S_2 v$. На этом этапе решается граничное интегральное уравнение (ГИУ) $(E + K)y_{n+1/2} = L v$ на поверхности вспомогательной области Γ_3 и находится вектор $y_{n+1/2} = (E + K)^{-1} L v$.

III. Релаксация $y_{n+1} = (1 - \tau)y_{n+1/2} + \tau y_n$ и возвращение к этапу I.

Отметим, что использование в качестве τ диагональной матрицы в ряде случаев существенно ускоряет итерационный процесс.

Эффективная численная реализация процесса предполагает, естественно, что алгоритм решения интегрального уравнения на этапе II по числу арифметических действий, затратам памяти ЭВМ не превосходит по порядку необходимые ресурсы для решения нелинейной задачи Дирихле на этапе I. Как известно¹⁹, порядок алгебраической системы с плотной матрицей, возникающей при дискретизации ГИУ, составляет $O(N^2)$, требуемая память — $O(N^4)$, а число арифметических операций может изменяться от $O(N^4 \ln N)$ до $O(N^6)$ в зависимости от метода решения системы (N — среднее число неизвестных по одной переменной). Для сеточных методов, в свою очередь, требуемая память составляет $O(N^3)$, а число арифметических операций изменяется от $O(N^3 \ln^2 N)$ до $O(N^4 \ln N)$. Таким образом, реализация этапа II является весьма трудоемкой задачей.

В работах¹³⁻¹⁶ предложен алгоритм решения ГИУ для специальных вспомогательных поверхностей (цилиндр, параллелепипед), который по требуемой памяти и числу арифметических операций не превосходит соответствующие характеристики для сеточных методов. Разработанные программы BIESM3, BIEGM3^{17, 18} для решения интегрального уравнения на границе вспомогательной области в виде параллелепипеда с квадратом в основании используют $O(N^3)$ ячеек машинной памяти, а решение получается за $O(N^3 \ln N)$ арифметических действий. Это дает возможность эффективно их использовать для решения задачи, возникающей на этапе II. В модульном комплексе программ МОКЗ1 мы используем программу BIESM3.

Так как вся информация о форме магнита и токовых областей, о характере нелинейной зависимости $\mu(x, |\vec{B}|)$ используется только при решении задачи на этапе I, то мы ограничимся вышесказанным о решении граничного интегрального уравнения на этапе II (подробнее см.^{17, 18}). Рассмотрим этап I.

Представляем $u_2(\vec{x}) = u_2^{\vec{x}}(\vec{x}) + u_2^{\vec{z}}(\vec{x})$, где $u_2^{\vec{z}}(\vec{x})$ является решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u_2^{\vec{z}} &= 0, & \vec{x} \in \Omega_2, \\ u_2^{\vec{z}} &= \phi(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma_1, \\ u_2^{\vec{z}} &= y_n, & \vec{x} \in \Gamma_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Для определения в Ω_3 функции

$$u(\vec{x}) = \begin{cases} u_1(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_1 \\ u_2(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$

получаем следующую однородную нелинейную краевую задачу:

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(\mu \frac{d}{dx_i} u \right) = 0, \quad \vec{x} \in (\Omega_3 / \Gamma_1), \quad (13)$$

$$\left[\frac{du}{d\vec{n}_1} \right] = \psi(\vec{x}) + \frac{du_2^{\vec{z}}}{d\vec{n}_1}, \quad \vec{x} \in \Gamma_1,$$

$$[u] = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_1,$$

$$u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_3.$$

$[\cdot]$ означает скачок функции u либо ее конормальной производной.

Воспользуемся свойством симметричности поля дипольного магнита и для разностной аппроксимации краевых задач (12), (13) сузим расчетную область (рис. 2), поставив на плоскостях $z = 0$ и $x = 0$ условия симметричности скалярного потенциала, а на плоскости $y = 0$ — условие антисимметричности.

Построим неравномерную сетку с элементарными ячейками в виде параллелепипедов:

$$\Omega_3^h = \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + h_i^x, \quad i = 1 \div X_3 \\ (x_i, y_j, z_k), \quad y_{j+1} = y_j + h_j^y, \quad j = 1 \div Y_3 \\ z_{k+1} = z_k + h_k^z, \quad k = 1 \div Z_3 \end{array} \right\}.$$

Далее везде используем обозначение $(i, j, k) \equiv (x_i, y_j, z_k)$. Вершинами ячейки Π_{ijk} являются узлы (a, b, c) , $a = i, i + 1, b = j, j + 1, c = k, k + 1$. Обозначим центр ячейки Π_{ijk} через $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$. Граница расчетной области Γ_3 и внутренняя граница Γ_1 раздела сред с различными магнитными характеристиками являются узловыми линиями $\Omega_3^h = \Gamma_3^h \cup \Omega_2^h \cup \Gamma_1^h \cup \Omega_1^h$. Считаем, что поле \vec{H}^0 задано, и поэтому область Ω_A для сеточной аппроксимации задачи не рассматриваем. Для этой конфигурации полагаем

$$\begin{aligned} h_i^x &\equiv H_1^x, \quad i = 1 \div X_1, & h_j^y &\equiv H_1^y, \quad j = 1 \div Y_1, \\ h_i^x &\equiv H_2^x, \quad i = (X_1 + 1) \div X_2, & h_j^y &\equiv H_2^y, \quad j = (Y_1 + 1) \div Y_2, \end{aligned}$$

$$h_i^x \equiv H_3^x, \quad i = (X_2 + 1) \div X_3, \quad h_j^y \equiv H_3^y, \quad j = (Y_2 + 1) \div Y_3,$$

$$h_k^z \equiv H_1^z, \quad k = 1 \div Z_2,$$

$$h_k^z \equiv H_1^z, \quad k = (Z_2 + 1) \div Z_3,$$

где X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_2 являются координатами сеточных плоскостей, которые попадают на границу раздела сред; X_3, Y_3, Z_3 — координаты сеточных плоскостей, попадающих на границу расчетной области (рис.2). Γ_1^h представим в виде

$$\Gamma_1^h = \Gamma_{X_1} \cup \Gamma_{X_2} \cup \Gamma_{Y_1} \cup \Gamma_{Y_2} \cup \Gamma_{Z_2},$$

$$\Gamma_{X_a} = \{(i, j, k), i = X_a, j = 1 \div (Y_a - 1), k = 1 \div (Z_2 - 1)\},$$

$$\Gamma_{Y_a} = \{(i, j, k), i = 1 \div X_a, j = Y_a, k = 1 \div (Z_2 - 1)\},$$

$$a = 1, 2;$$

$$\Gamma_{Z_2} = \left\{ (i, j, k), \begin{array}{l} i = 1 \div X_2, \quad j = Y_1 \div Y_2, \\ i = X_1 \div X_2, \quad j = 1 \div (Y_1 - 1), \end{array} k = Z_2 \right\}.$$

Интегрируя (13) по объему параллелепипеда Π , который содержит узел (i, j, k) и вершинами которого являются центры элементарных ячеек $(i \pm 1/2, j \pm 1/2, k \pm 1/2)$, применяя формулу Грина [20], получим для узлов $(i, j, k) \in \Gamma_1^h, (i, j, k) \in \Gamma_3^h, i \neq 1, j \neq 1, k \neq 1$

$$\int_{\Pi} \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(\mu \frac{d}{dx_i} u \right) dV = \int_{S_{\Pi}} \mu \nabla u dS = 0. \quad (14)$$

Для вычисления интегралов в (14) используем формулы прямоугольников. При этом заменяем производные их разностными аналогами и считаем магнитную проницаемость μ постоянной в пределах одной элементарной ячейки и равной значению в центре ячейки. Получаем систему нелинейных уравнений для определения сеточной функции $u_{ijk} \equiv u(i, j, k)$:

$$A_i u_{i+1jk} + A_{i-1} u_{i-1jk} + B_j u_{ij+1k} + B_{j-1} u_{ij-1k} + C_k u_{ijk+1} + C_{k-1} u_{ijk-1} - S u_{ijk} = 0,$$

$$A_i = \frac{1}{h_i^x} \sum_{m=j-1}^j \sum_{n=k-1}^k \mu_{imn} h_m^y h_n^z,$$

$$B_j = \frac{1}{h_j^y} \sum_{m=i-1}^i \sum_{n=k-1}^k \mu_{mjn} h_m^x h_n^z,$$

$$C_k = \frac{1}{h_k^z} \sum_{m=i-1}^i \sum_{n=j-1}^j \mu_{mnk} h_m^x h_n^y,$$

(15)

$$S = A_i + A_{i-1} + B_j + B_{j-1} + C_k + C_{k-1},$$

$$\mu_{ijk} = \mu(|\vec{B}(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)|), \quad (i, j, k) \in \Omega_1^h,$$

$$\mu_{ijk} = 1, \quad (i, j, k) \in \Omega_2^h.$$

Из системы (15) получается также алгебраическая система, аппроксимирующая (12), — это узлы $(i, j, k) \in \Omega_2^h$. На плоскостях $x = 0$ ($i = 1$), $z = 0$ ($k = 1$) записываем условие симметричности для скалярного потенциала

$$\frac{u_{ij1} - u_{ij2}}{H_1^z} = 0; \quad \frac{u_{1jk} - u_{2jk}}{H_1^x} = 0; \quad (16)$$

на плоскости $y = 0$ ($j = 1$) условия антисимметричности

$$u_{i1k} = 0. \quad (17)$$

Для (12) на Γ_1^h записываем условие Дирихле (у сеточных функций u_{ijk} , для краткости, опущены изменяющиеся индексы):

$$u''_{B_a} = \phi(i, j, k), \quad (i, j, k) \in \Gamma_{B_a},$$

$$B = X, Y, \quad a = 1, 2, \quad (18)$$

$$B = Z, \quad a = 2,$$

а для (13) — разностное соотношение, определяющее скачок нормальной производной:

$$\mu_{B_1} \frac{u_{B_1+1} - u_{B_1}}{H_2^B} - \frac{u_{B_1} - u_{B_1-1}}{H_1^B} = \psi(i, j, k) + \frac{u''_{B_1} - u''_{B_1-1}}{H_1^B},$$

$$(i, j, k) \in \Gamma_{B_1}, \quad B = X, Y;$$

$$\mu_{B_2-1} \frac{u_{B_2} - u_{B_2-1}}{H_2^B} - \frac{u_{B_2+1} - u_{B_2}}{H_3^B} = \psi(i, j, k) + \frac{u''_{B_2+1} - u''_{B_2}}{H_3^B}, \quad (19)$$

$(i, j, k) \in \Gamma_{B_2}$, $B = X, Y, Z$.

Функции ϕ и ψ определены в (7). Для решения нелинейной системы разностных уравнений (15), (16), (17), (19) применяем двухступенчатый итерационный процесс, в котором циклы последовательной верхней релаксации (SOR) при вычислении потенциала чередуются с нижней релаксацией для магнитной проницаемости:

$$\mu_{ijk}^{n+1} = (1 - \eta)\mu_{ijk}^n + \eta\mu_{ijk}^{n+1/2}, \quad 0 < \eta \leq 1,$$

$$\mu_{ijk}^{n+1/2} = \mu(\mu_{ijk}^n \cdot |\text{grad } u|),$$

$$|\text{grad } u| = \left\{ \left[\frac{1}{4} \sum_{m=j-1}^j \sum_{\ell=k-1}^k \left(\frac{u_{i+1m\ell}^{n+1} - u_{im\ell}^{n+1}}{h_1^x} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{4} \sum_{m=i-1}^j \sum_{\ell=k-1}^k \left(\frac{u_{m,j+1\ell}^{n+1} - u_{mj\ell}^{n+1}}{h_j^y} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{4} \sum_{m=i-1}^j \sum_{\ell=j-1}^j \left(\frac{u_{m\ell k+1}^{n+1} - u_{m\ell k}^{n+1}}{h_k^z} \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (20)$$

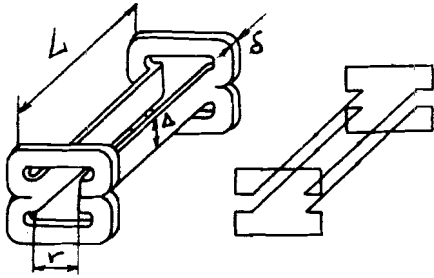


Рис. 3

разбивается на линейные проводники, как показано на рис. 3; от каждого линейного проводника с координатами начала (x_1, y_1, z_1) и конца (x_2, y_2, z_2) поле в точке (x_0, y_0, z_0) вычисляется по формулам

$$H_x^0 = \frac{j_0}{4\pi} (b_2 - y_0 - z_0 a_2) (D_2 - D_1),$$

$$H_y^0 = -\frac{j_0}{4\pi} (b_1 - x_0 - z_0 a_1) (D_2 - D_1), \quad (21)$$

$$H_z^0 = -\frac{j_0}{4\pi} (b_2 a_1 - b_1 a_2 - x_0 a_2 - y_0 a_1) (D_2 - D_1),$$

где

$$D_i = \frac{2A_0 z_i + B_0}{2(A_0 C_0 - \frac{B_0^2}{4}) \sqrt{A_0 z_i^2 + B_0 z_i + C_0}}, \quad i = 1, 2,$$

$$a_1 = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}, \quad a_2 = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1}, \quad b_1 = x_1 - z_1 a_1, \quad b_2 = y_1 - z_1 a_2,$$

$$A_0 = 1 + a_1^2 + a_2^2,$$

$$B_0 = -2z_0 + 2a_2(b_2 - y_0) + 2a_1(b_1 - x_0),$$

$$C_0 = z_0^2 + (b_1 - x_0)^2 + (b_2 - y_0)^2.$$

Если число линейных проводников по ширине либо толщине проводника Ω_A достаточно велико, то более экономичными для расчетов оказываются формулы, в которых выражение (21) проинтегрировано по соответствующему направлению (переход к бесконечно тонким пластинам).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

С помощью описанного выше метода, реализованного в комплексе программ МОК31, были проведены расчеты пространственного распределения поля дипольного магнита синхротрона СПИН с обмоткой, изображенной на рис. 3 (с параметрами $L = 2,04 \cdot 10^{-1}$ м, $\Delta = 5,4 \cdot 10^{-2}$ м, $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $r = 5,5 \cdot 10^{-2}$ м). Магнитные свойства яма описаны в работе ¹⁶, где приведена использованная здесь таблица зависимости $\mu = \mu(|\vec{B}|)$.

Расчеты проводились на последовательности сеточных областей $(12,12,7) \rightarrow (23,23,17) \rightarrow (45,45,25)$ с использованием решения, полученного на грубой сетке в качестве приближения для решения на более мелкой. Такая организация вычислительного процесса дает выигрыш по времени счета в $1,5 \div 2$ раза по сравнению с использованием только одной сетки $(45,45,25)$. Выход из итерационного процесса на каждой сетке происходил, когда величина

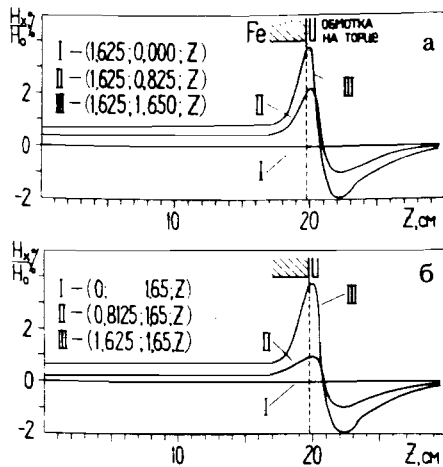
$$\epsilon = \left[\left(\sum_{i \in \Gamma_3^h} |y_{n+1}^i - y_n^i|^2 \right) / \left(\sum_{i \in \Gamma_3^h} |y_{n+1}^i|^2 \right) \right]^{1/2}$$

достигала значения 10^{-3} . Время счета на ЭВМ ЕС-1061 для третьей сетки изменялось в зависимости от тока в обмотке магнита от 30 мин для тока 500 А до 70 мин для тока 2500 А. В этом случае число неизвестных в расчетной области равнялось $N_3 \approx 5 \cdot 10^4$. Отметим, что в большей части апертуры достаточно высокая точность расчетов получается уже на второй сетке, где число неизвестных составляет $N_2 \approx 6 \cdot 10^3$,

а время счета меняется от 3 до 9 мин в том же диапазоне изменения токов. Представление о характере сходимости решений на трех сетках дает табл. 1, где точка (0,0,19.8) соответствует торцу ферромагнетика.

Таблица 1

Ток в витке составляет 500 А				
Сетка	H(0,0,0) Т	H(0,0,14.85) Т	H(0,0,19.8) Т	H(0,0,24.75) Т
I	0,5485	0,5500	0,5536	0,0873
II	0,5483	0,5477	0,5162	0,0734
III	0,5482	0,5470	0,4706	0,0687
Ток в витке равен 2000 А				
Сетка	H(0,0,0) Т	H(0,0,14.85) Т	H(0,0,19.8) Т	H(0,0,24.75) Т
I	2,1454	2,1457	2,1583	0,3348
II	2,1489	2,1404	2,0109	0,2818
III	2,1500	2,1388	1,8304	0,2632



а) Распределение поля при слабом насыщении ядра
Результаты расчетов магнитного поля при токе в витке обмотки 500А, что соответствует слабому насыщению

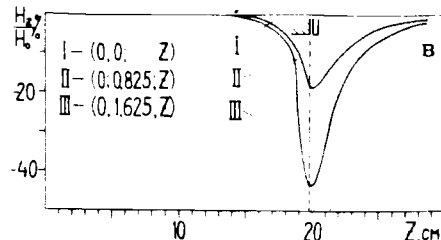


Рис. 4

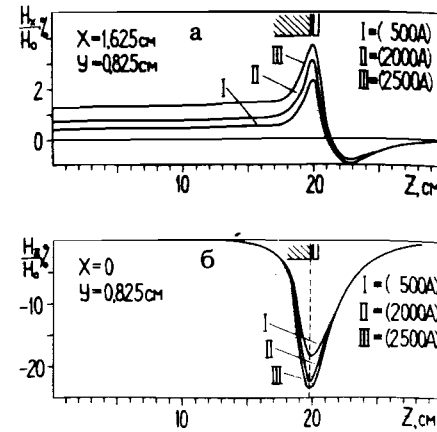


Рис. 5

нию ядра, представлены на рис. 4 и на рис. 6 (кривые I). На рис. 4 показаны отклонения от однородного магнитного поля при удалении от оси магнитной системы (0, 0, z) внутри апертуры и на торцах магнита. Ось данной магнитной системы характерна тем, что на ней отлична от нуля только одна компонента поля — H_y (рис. 6в, кривая I), которая постоянна на больших расстояниях от торцов магнита и равна значению в точке (0,0,0). Все отклонения от однородного поля на рис. 4 (далее на рис. 5 и рис. 6) выражены в процентном отношении к этой величине $H_0 \equiv H_y(0,0,0)$. При токе в витке обмотки 500 А и $H_0 = 0,5482$ Т.

На рис. 4 оси магнитной системы соответствуют кривые 1. Распределение H_x и H_z компонент поля по z при удалении от оси дипольного магнита представлено на рис. 4 кривыми II и III. Распределение неоднородности поля $(H_y - H_0)/H_0$ по апертуре магнита показано на рис. 6а,б. Сплошная кривая I на рис. 6а представляет поведение поля в зависимости от x при $y = 0$ в центральной плоскости ($z = 0$) а пунктирная кривая I — аналогичную зависимость в плоскости, близкой к торцу магнита ($z = 18,565$ см). Для этих же плоскостей на рис. 6б показана зависимость магнитного поля от y при $x = 0$.

б) Распределение поля с учетом насыщения ядра

Расчеты проводились при следующих значениях тока в витке обмотки: 500, 1000, 1500, 2000 и 2500 А. Кривые I, II, III на рис. 5

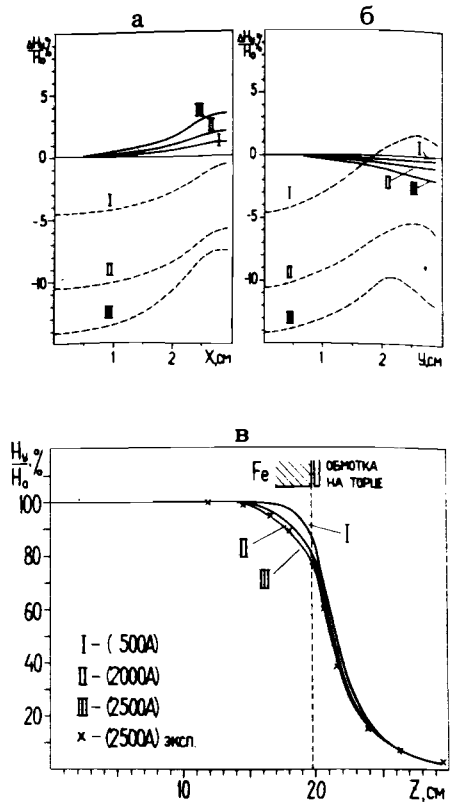


Рис. 6

и рис. 6 представляют изменения неоднородностей поля при насыщении железного сердечника. Зависимость поведения компонент поля от z для трех значений тока в витке обмотки 500, 2000 и 2500 А показана на рис. 5а,б и рис. 6в. Для этих же значений тока на рис. 6а,б показано радиальное распределение неоднородности поля в плоскостях $z = 0$ и $z = 18,565$ см.

В табл. 2 приведены значения величины магнитного поля в среднем сечении ($z = 0$) в окрестности оси магнитной системы ($R \leq 2,5 \cdot 10^{-2}$ м), полученные с помощью программ МОК31, MAGSYS^{/22/}, GRIDS (двумерное приближение)^{/7/}, а также экспериментальные значения (относительная точность экспериментальных значений $1 \cdot 10^{-3}$).

Таблица 2

Ток (А)	Эксперимент Н(Т)	MAGSYS Н, Т	МОК31 Н, Т	GRIDS Н, Т
500	0,539	0,5379* 0,5465**	0,5481	0,5482
1000	1,08	1,068* 1,081**	1,096	1,0965
1500	1,62	1,856* 1,898**	1,641	1,6426
2000	2,15	2,102* 2,145**	2,150	2,1619
2500	—	2,526* 2,576**	2,597	2,5945

* — разбиения 1/8 ярма на 48 элементов

** — более мелкое разбиение

Большой интерес представляет такая характеристика магнитной системы, как эффективная длина:

$$\ell_{\text{eff}} = \frac{1}{H_0} \int_{-\infty}^{+\infty} H_y(0, 0, z) dz. \quad (22)$$

В табл. 3 приведены вычисленные по результатам моделирования с помощью МОК31 величины эффективной длины диполя ℓ_{eff} (при

Таблица 3

I, А	ℓ_{eff} , см	$\Delta \ell_{\text{eff}}$, %
500 А	43,9	0
2000 А	43,2	1,8
2500 А	42,7	2,8

$x = 0, y = 0$) для различных значений токов в СП-обмотке и их относительные отклонения от ℓ_{eff} , вычисленной для малых величин тока (500 А). Видно, что процессы насыщения железного сердечника при увеличении поля в магните могут приводить к изменению ℓ_{eff} более чем на 2%. Приведенное в табл. 3 $\ell_{\text{eff}} = 43,9$ см можно сравнить с имеющимся^{/2/} экспериментальным значением $\ell_{\text{eff}} = 43,7$ см, измеренным при малых значениях поля. Дальнейшее развитие методики расчетов трехмерных нелинейных магнитных систем, использованной в данной работе, связано с развитием функционального наполнения программного модуля QLEEN3^{/11/}, который для каждой заданной на границе вспомогательной области функции u находит ее нормальную производную du/dn и с помощью которого осуществляется этап I итерационного процесса (11). Под развитием функционального наполнения мы понимаем возможность описания в QLEEN3 широкого класса магнитных систем и решения возникающей дискретизованной нелинейной задачи Дирихле во вспомогательной области, которая содержит ферромагнетик, достаточно эффективным методом. При этом вся структура комплекса программ МОК31 остается без изменений.

Полученные в результате расчетов распределения магнитных полей предполагается использовать в программах, моделирующих транспортировку пучка заряженных частиц в синхротроне СПИН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шелаев И.А., Юдин И.П. Сообщение ОИЯИ 9-12346, Дубна, 1979.
2. Шелаев И.А. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-83-582, Дубна, 1983.
3. Юдин И.П. Сообщение ОИЯИ 9-85-153, Дубна, 1985.
4. Юдин И.П. Сообщение ОИЯИ Р11-87-349, Дубна, 1987.
5. Шелаев И.А., Юдин И.П. Сообщение ОИЯИ Р9-80-333, Дубна, 1980.
6. Жидков Е.П. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-81-12, Дубна, 1981.
7. Айрян Э.А. и др. Сообщение ОИЯИ Р11-86-80, Дубна, 1986.
8. Айрян Э.А. и др. — В кн.: Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Дубна, 1987, т.2, с.316.

9. Дойников Н.И. и др. – ЖТФ, 1983, т.53, вып.10, с.2055.
10. Дойников Н.И. Препринт НИИЭФА, ОБ-8, Ленинград, 1976, с.18.
11. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ P11-87-501, Дубна, 1987.
12. Абрамов А.Г. и др. В кн.: VIII Всесоюзное совещание по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Дубна, 1983, т.2, с.155.
13. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Препринт ОИЯИ P11-83-261, Дубна, 1983.
14. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ P11-83-329, Дубна, 1983.
15. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ P11-84-795, Дубна, 1984.
16. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ P11-85-371, Дубна, 1985.
17. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ P11-86-230, Дубна, 1986.
18. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ P11-86-333, Дубна, 1986.
19. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
20. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
21. Борисовская З.В. и др. Сообщение ОИЯИ P9-81-63, Дубна, 1981.
22. Борисовская З.В. и др. Сообщение ОИЯИ 9-84-523, Дубна, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1988 года.

Жидков Е.П. и др. P11-88-15
Численное моделирование пространственного
распределения краевого поля
синхротронного дипольного магнита

Для исследования пространственного распределения поля дипольного магнита синхротрона СПИН использована методика расчета трехмерных нелинейных открытых магнитных систем, основанная на применении граничных интегральных уравнений теории потенциала, определенных на поверхности вспомогательной области, для точного учета поведения магнитного поля на бесконечности. Возникающие при этом краевые задачи внутри вспомогательной области, содержащей исходную магнитную систему, решаются сеточными методами. Расчеты проводились с помощью комплекса программ МОК31. Приводятся результаты моделирования, сравнения с экспериментальными данными.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P. et al. P11-88-15
Numerical Calculation of Space Distribution
of Boundary Field of Synchrotron Dipole Magnet

The method for analysis of magnetostatic nonlinear space problems in unbounded region based on application of boundary integral equations on some auxiliary surface for accurate account of field decrease at infinity is used for the analysis of the field distribution of the SPIN's dipole magnet. The boundary value problems which arise in the region bounded by auxiliary surface are solved by gridmethod. Calculations have been performed with the help of the МОК31 program complex. The results of the calculations and the comparison with the experimental data are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Thechniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988