СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р11 - 8780

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА ($2\nu_z - \nu_x = 1$) ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИНХРОФАЗОТРОНА ОИЯИ МЕТОДОМ КРЫЛОВА-БОГОЛЮБОВА

1975

P11 - 8780

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА ($2\nu_z - \nu_x = 1$) ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИНХРОФАЗОТРОНА ОИЯИ МЕТОДОМ КРЫЛОВА-БОГОЛЮБОВА

Если посмотреть на диаграмму устойчивости работы синхрофазотрона ОИЯИ, то увидим, что близко от рабочей точки ускорителя проходят несколько нелинейных резонансов. Исследования влияния этих резонансов на движение частиц имеют большое значение[I-4]. Для этого надо найти решения системы нелинейных уравнений с периодическими коэффициентами. Однако достаточно общей теории подобных уравнений не существует. Можно воспользоваться методом усреднения[5] и получить укороченные уравнения, которые либо просто интегрируются, либо позволяют исследовать движение на фазовой плоскости.

В работе [6] исследования резонанса третьего порядка $2\nu_z - \nu_x = 1$ проводились в специально выбранной фазовой плоскости. В настоящей работе мы провели дальнейшие исследования укороченных уравнений, полученных в работе[6]. После усреднения методом Крылова-Боголюбова[5] исходная система нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами переходит в следующую систему укороченных уравнений:

$$
\begin{aligned}
a_x' &= \frac{\varepsilon}{\nu_x} \alpha a_z^2 \sin(\psi_x - 2\psi_z); \\
\psi_x' &= \frac{\varepsilon}{\nu_x} \alpha \frac{a_z^2}{a_x} \cos(\psi_x - 2\psi_z); \qquad \text{(I)} \\
a_z' &= -\frac{4\varepsilon}{\nu_x + 1} \alpha a_x a_z \sin(\psi_x - 2\psi_z); \\
\psi_z' &= \frac{2\varepsilon}{1+\nu_x} \left[\frac{\Delta}{2} + 2\alpha a_x \cos(\psi_x - 2\psi_z) \right].
\end{aligned}
$$

Здесь штрих означает дифференцирование по θ,

a_x, a_z и Ψ_x, Ψ_z – соответственно амплитуды и фазы бетатронных колебаний по переменным x и z, ν_x – частота бетатронных колебаний, $\alpha = \frac{R_0}{16} n_{11}$, $\varepsilon = \frac{1}{R_0}$, R_0 – радиус идеальной орбиты (подробнее см. /6/).

Систему уравнений (I) надо решать с начальным условием

$$
\begin{aligned}
a_x(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} &= a_{x0}, \\
a_z(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} &= a_{z0}, \\
\Psi_x(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} &= \Psi_{x0}, \\
\Psi_z(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} &= \Psi_{z0}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Вводя обозначения $\Psi_x - 2\Psi_z = \Phi$, систему (I) перепишем в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
a_x' &= \frac{\varepsilon}{\nu_x} \alpha a_z^2 \sin\Phi, \\
a_z' &= -\frac{\varepsilon}{1+\nu_x} 4\alpha a_x a_z \sin\Phi, \\
\Phi' &= \varepsilon\left[-\frac{2\Delta}{1+\nu_x} + \alpha\left(\frac{1}{\nu_x}\frac{a_z^2}{a_x} - \frac{8}{1+\nu_x} a_x\right)\cos\Phi\right].
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Если к системе (3) присоединить второе или четвертое уравнения системы (I), то системы (I) и (3) будут эквивалентны.

Из первых двух уравнений системы (3) получаем:

$$
4\nu_x a_x^2 + (1+\nu_x) a_z^2 = const = C_1, \tag{4}
$$

где константа C_1 определяется из начальных условий (2).

Это первый интеграл для системы (3), используя его, понизим порядок системы (3) на единицу.

Получаем:

$$a_x' = \frac{\varepsilon}{\nu_x} \alpha \left(\frac{c_1 - 4\nu_x a_x^2}{1+\nu_x} \right) \sin \Phi ,$$

$$\Phi' = \varepsilon \left[-\frac{2\Delta}{1+\nu_x} + \alpha \left(\frac{c_1 - 12\nu_x a_x^2}{\nu_x (1+\nu_x) a_x} \right) \cos \Phi \right]. \qquad (5)$$

В работе[6] система (5) исследовалась методом фазовой плоскости, что позволило наглядно представить "картину" влияния одного вида движения на другой и сделать ряд полезных выводов.

Теперь покажем, как можно найти еще один интеграл движения. Из (5) можно получить:

$$\frac{d\Phi}{da_x} = \frac{\left[-\frac{2\Delta}{1+\nu_x} + \alpha \left(\frac{c_1 - 12\nu_x a_x^2}{\nu_x(1+\nu_x) a_x} \right) \cos \Phi \right]}{\frac{\alpha}{\nu_x} \left(\frac{c_1 - 4\nu_x a_x^2}{1+\nu_x} \right)} . \qquad (6)$$

Вводя обозначение $\cos \Phi = y$ и используя (6), имеем:

$$\frac{dy}{da_x} + \frac{(c_1 - 12\nu_x a_x^2)}{a_x(c_1 - 4\nu_x a_x^2)} y = \frac{2\Delta\nu_x}{\alpha} \frac{1}{(c_1 - 4\nu_x a_x^2)} .$$

Решая последнее уравнение, получаем интеграл движения

$$\cos \Phi = \frac{\frac{\Delta\nu_x}{\alpha} a_x^2 + c_2}{a_x (c_1 - 4\nu_x a_x^2)} , \qquad (7)$$

где константа c_2 определяется из начальных условий (2).

Пользуясь двумя интегралами движения (3) и (7), можно провести полное исследование системы укороченных уравнений (I) с начальными условиями (2), т.е. найти решения этой системы через эллиптические функции, определить пределы изменения амплитуды вблизи резонанса, наложить определенные ограничения на начальные условия (2), чтобы максимальные амплитуды $max\, a_x$ и $max\, a_z$ не превышали наперед заданную константу и т.д. Для такого исследования удобно снова, так же как в работе /6/, перейти к новым переменным

$$V = a_x \sin\Phi ,\qquad U = a_x \cos\Phi . \tag{8}$$

В новых переменных уравнения (5) и (7) переходят соответственно в:

$$V' = \frac{4\varepsilon\alpha}{1+\nu_x}\left[R_1^2 - 2U_\alpha U - (V^2+3U^2)\right],\qquad U' = \frac{4\varepsilon\alpha}{1+\nu_x}\left[2U_\alpha V + 2VU\right] \tag{9}$$

и

$$V^2 = \frac{-U^3 - U_\alpha U^2 + R_1^2 U - R_2}{(U + U_\alpha)} , \tag{10}$$

где

$$R_1^2 = \frac{C_1}{4\nu_x} ,\quad U_\alpha = \frac{\Delta}{4\alpha} ,\quad R_2 = \frac{C_2}{4\nu_x} . \tag{11}$$

В работе /6/ было показано, что исследование системы (I) сводится к исследованию системы (9) на фазовой плоскости (V, U) в области

$$V^2 + U^2 < R_1^2 . \tag{12}$$

Все траектории системы (9) даются семейством кривых (10), причем кривые рассматриваются только в области (12).

Система (9) имеет следующие особые точки :

$$A_1 (V_1, U_1) ; \quad A_2 (V_1, U_2) ; B_1 (V_2, U_3) ; \quad B_2 (V_3, U_3) , \tag{13}$$

где
$$V_1 = 0 ; \quad U_{1,2} = \frac{U_\alpha}{3} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{3R_1^2}{U_\alpha^2}} \right) ; \tag{14}$$

$$V_{2,3} = \pm \sqrt{R_1^2 - U_\alpha^2} ; \qquad U_3 = -U_\alpha .$$

В работе /6/ было показано, что точки $B_{1,2}$ – сёдла, а $A_{1,2}$ – центры. Тогда из (10) следует, что на фазовой плоскости (V, U) в области (12) нет предельных циклов. При $R_1 > U_\alpha$ фазовая плоскость имеет вид , показанный на рис. 1.

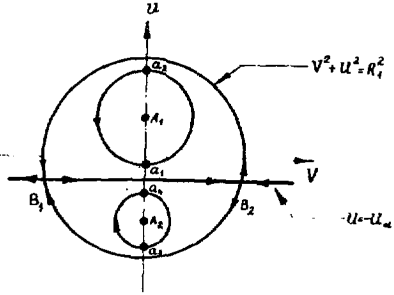

Рис.1

Теперь перейдем к нахождению минимального и максимального значений a_x^2 и a_z^2 . Так как a_x^2 и a_z^2 связаны соотношением (4), то они не могут неограниченно возрастать, поэтому достаточно ограничиться исследованием $\min a_x^2$ и $\max a_x^2$. Из (8) следует, что задача сводится к нахождению min и max функции $a_x^2 = V^2 + U^2$ на кривой (I0). Кривую (I0) можно переписать так:

$$V^2 + U^2 = \frac{K_1^2 U - R_1}{U + U_\alpha}, \tag{I5}$$

или функция $V^2 + U^2$ на кривой (I0) равна $\frac{R_1^2 U - R_2}{U + U_\alpha}$. Тогда min и max функции $V^2 + U^2$ на кривой (I0) равны соответственно min и max функции $\frac{R_1^2 U - R_2}{U + U_\alpha}$ на кривой (I0).

Выражение, стоящее в превой части (I5), является дробно-линейной функцией от U, а левая часть есть квадрат расстояния от центра точки (V, U), принадлежащей кривой (I0). Значит, нужно спроектировать кривую (I0) на ось U и на этой проекции искать min и max функции $\frac{R_1^2 U - R_2}{U + U_\alpha}$.

Кривая (I0) пересекает ось U не больше чем в трех точках. Непосредственной проверкой можно убедиться, что траектории (I0) пересекают ось U в области (I2) в двух точках a_1 и a_2 или a_3 и a_4 (см. рис.I), замкнуты и симметричны относительно U.

Отрезок $[a_1, a_2]$ или $[a_3, a_4]$ будет проекцией соответствующей кривой на ось U. Значит, нужно искать min и max функции $f = \frac{R_1^2 U - R_2}{U + U_\alpha}$ на этих отрезках (см. рис.2).

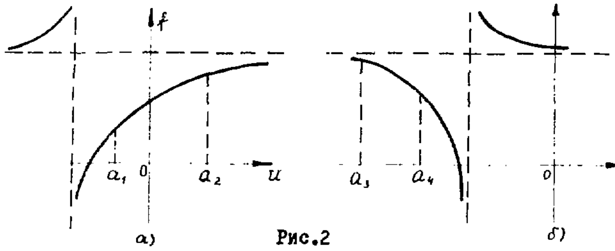

Рис.2

Из рис.2 видно, что для любой траектории в плоскости (V, U) min и max значение функции $a_x^2 = V^2 + U^2$ достигается соответственно в точках a_1 и a_2 или a_4 и a_3 пересечения траектории с осью U. Причем случай а) соответствует траекториям вокруг центра A_I, и случай б) соответствует траекториям вокруг центра A_2. Эти точки можно найти, решая уравнение

$$-U^3 - U_\alpha U^2 + R_1 U - R_2 = 0 . \tag{16}$$

Уравнение (16) имеет три корня, и можно показать, что при определенных ограничениях на $R_2 = \frac{C_2}{4\nu_x}$ все корни действительны. Два корня лежат внутри круга $V^2 + U^2 = R_1^2$ и один – за пределами этого круга. Корни, лежащие внутри круга $V^2 + U^2 = R_1^2$, как раз дают координаты точек a_1 и a_2 или a_3 и a_4. Так как постоянная C_2 в (7) задает семейство траекторий системы (5), то C_2 можно определить по (V_0, U_0) – произвольной точке кривой. Пусть это будет точка, где достигается $min(V^2 + U^2)$ на нашей кривой. Тогда из (10) получим

$$C_2 = 4\nu_x U_0 (-U_0^2 - U_\alpha U_0 + R_1^2) , \tag{17}$$

где

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & U_\alpha < U_0 < A_1 , \\ \mathrm{II} & A_2 < U_0 < U_\alpha . \end{array} \tag{18}$$

Изменяя значение U_0 на интервале I, находим пределы изменения C_2 для траектории вокруг центра A_I, аналогично, изменяя U_0 на интервале II, находим пределы изменения C_2 для траекторий вокруг центра A_2. Легко проверить, что первая производная от правой части (17) по U_0 на отрезке $[A_2, A_I]$ всегда положительная и, значит, C_2 – это возрастающая функция на этом отрезке (см. рис.3).

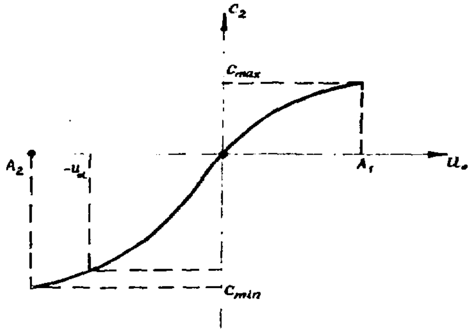

Рис.3

Как известно, в любых конкретных ускорителях всегда накладываются определенные ограничения на максимально возможные амплитуды, т.е. $a_x^2 < \bar{a}_x^2$ и $a_z^2 < \bar{a}_z^2$. Более жестким является ограничение на a_z. Поэтому в этом пункте покажем, к каким последствиям может привести данное ограничение.

Если $a_z^2 < \bar{a}_z^2$, где $\bar{a}_z = const$, то из (4) следует

$$a_x^2 > R_1^2 - \frac{(1+\nu_x)}{4\nu_x}\bar{a}_z^2 ,$$

или

$$u^2 + V^2 > R_1^2 - \frac{(1+\nu_x)}{4\nu_x}\bar{a}_z^2 .$$

Так как максимум и минимум наступают при $V=0$, то

$$u^2 > \bar{u}^2,$$

где

$$\bar{u}^2 = R_1^2 - \frac{(1+\nu_x)}{4\nu_x}\,\bar{a}_x^2 \quad . \tag{19}$$

Пределы изменения C_2 в этом случае определяются из (17) и (19) и показаны на рис.4.

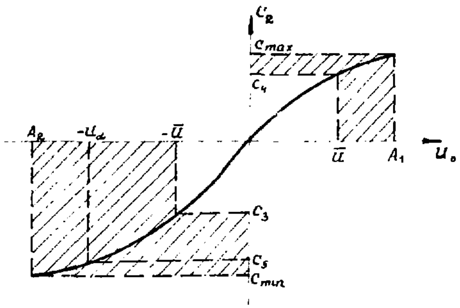

Рис.4

Область допустимых значений

$$\begin{aligned} C_{min} &\le C_2 \le C_1 \, , \\ C_4 &\le C_2 \le C_{max} \end{aligned} \tag{20}$$

на рисунке 4 заштрихована.

Эти ограничения на C_2 легко переносятся на фазовую плоскость (V, U), где также область допустимых траекторий заштрихована (см. рис.5).

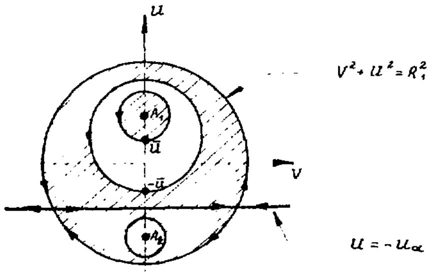

Рис.5

Тогда интервалы изменения $\min a_x$ есть

$$\bar{U} < \min a_x < A_1 ,$$
$$A_2 < \min a_x < -\bar{U} . \qquad (21)$$

Из выражения (7) имеем

$$\Phi = \operatorname{arc}\cos(y) , \qquad (22)$$

где

$$y = \frac{U_\alpha a_x^2 + \frac{C_2}{4\nu_x}}{a_x\left[R_1^2 - a_x^2\right]} . \qquad (23)$$

Учитывая (20) и (21), можно определить интервал изменения φ и тем самым найти определенные ограничения на Ψ_1 и Ψ_2, при выполнении которых условие $a_2^2 < \bar{a}_2^2$ удовлетворяется.

Последнее утверждение справедливо при фиксированных расстройках Δ. Если в процессе работы ускорителя Δ будет меняться, то на фазовой плоскости (VU) все траектории также претерпевают определенные изменения.

Качественная картина подобной зависимости траекторий от $U_\alpha = \frac{\Delta}{4\alpha}$ приведена на рис.6. Из рисунка видно, что, изменяя Δ в интервале $-R_1 < \frac{\Delta}{4\alpha} < R_1$, можно сделать $max\, a_z$ как угодно маленьким.

Отметим, что, используя интеграл (7), решение уравнения (5) можно свести к эллиптическим интегралам

$$I_x' = \frac{8\alpha\varepsilon}{1+\nu_x}\sqrt{I_x^3 - (2R_1^2 + U_\alpha^2)I_\alpha^2 + (R_1^2 - 2U_\alpha R_2)I_x - R_2^2}\,, \tag{24}$$

где

$$I_x = a_x^2.$$

Решением уравнения (22) в общем случае являются эллиптические функции. В частном случае, например, при $C_2=0$, для прямой $U = -U_\alpha$ и для случая, когда подкоренное выражение в (22) имеет кратные корни, решения (22) выражаются через элементарные функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На рис.6 приведена область изменения $max\, a_x$ и $min\, a_x$ в зависимости от расстройки Δ. Из рисунка видно, что наиболее сильная перекачка энергии с одной степени свободы на другую наблюдается, когда расстройка Δ изменяется на отрезке $-R_1 \leq \frac{\Delta}{4\alpha} \leq R_1$. Используя интегралы (3), (7) и фазовую плоскость (V, U), можно найти все не-

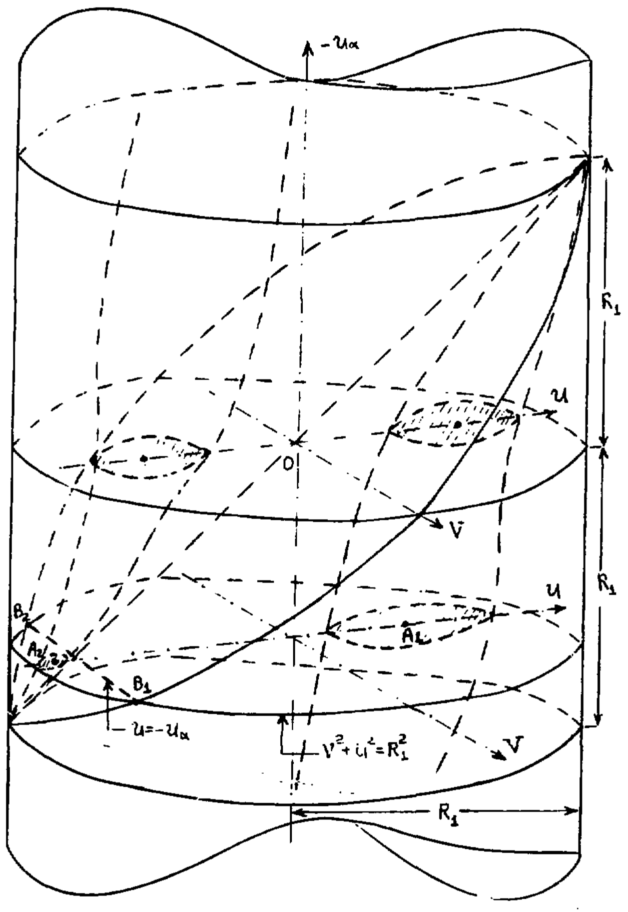

Рис. 6

обходимые ограничения на начальные условия a_{x_0}, a_{z_0}, ψ_{x_0}, ψ_{z_0}, при выполнении которых резонанс $2\nu_z - \nu_x = 1$ неопасен. Кроме этого, интегралы (3) и (7) позволяют проинтегрировать систему уравнений (5) через эллиптические функции, тем самым укороченные уравнения, полученные в первом приближении, исследуются полностью.

Авторы выражают глубокую благодарность Е.М.Кулаковой, И.Б.Иссинскому, В.П.Белову за обсуждение затронутых здесь вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Коломенский, А.И.Лебедев. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
2. A.Schoch. CERN - Report, 57-21, Geneve, 1958.
3. Б.В.Василишин, И.Б.Иссинский, В.А.Михайлов. Сообщение ОИЯИ, 9-7498, Дубна, 1973.
4. R.Hagedorn, A.Schoch. CERN -Report, 57-14, GENEVE, 1957.
5. Н.Н.Боголюбов, Ю.М.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, Изд-во "Наука", 1974.
6. И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков, И.Б.Иссинский, Е.М.Кулакова. Сообщение ОИЯИ, 9-8663, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1975 года.