сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-87-767

Р.М.Ямалеев, Н.В.Хуторной

# АЛГОРИТМ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНО-ЛИНЕАРИЗУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

1987

## ВВЕДЕНИЕ

Построение итерационных процессов, ведущих шаг за шагом от заданного начального приближения к искомому решению нелинейных задач, тесно связано с процедурой линеаризации нелинейных уравнений. В численных методах основным способом линеаризации нелинейных уравнений является разложение нелинейного функционала в ряд Тейлора в окрестности решения. При этом исходная нелинейная задача трансформируется в многоступенчатый /или эволюционный/ процесс нахождения решений линейных уравнений. Такова суть метода Ньютона-Канторовича [1] и его многочисленных модификаций [2]. Таким образом, итерационный процесс позволяет применять методы решения линейных уравнений для нахождения приближенных решений нелинейных задач. Одним из таких методов, применяемых для численного решения дифференциальных уравнений второго порядка с заданными краевыми условиями, является метод прогонки [3]. Этот метод в рамках итерационной процедуры с успехом применялся и для численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений [4].

В последнее время интенсивно развиваются методы конечномерной линеаризации [5]. Одним из таких методов является метод матричной линеаризации, примененный для решения нелинейных алгебраических уравнений [6].

Если нелинейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$Ly + F(y) = 0,\ y := y(x),\quad x \in [A, B],$$

$$\Phi_1(y)|_{x=A} = 0, \qquad \Phi_2(y)|_{x=B} = 0,$$

где

$$L(y) = (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})/h^2,\quad h = (B-A)/N,\quad x_k = hk,$$

$F(y)$ - заданный полином, то для нахождения решений такой задачи можно применить метод матричной линеаризации /ММЛ/.

ММЛ сводит исходную полиномиально-нелинейную задачу к линейной относительно матриц-решений. Тем самым алгоритм прогонки оказывается применим для нахождения матриц-решений, а следовательно, и самих решений, поскольку последние есть собственные значения найденных матриц.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

## 1. МЕТОД МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ /ММЛ/. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦ-КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМЫ ВЕКТОРНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод матричной линеаризации ставит в соответствие многомерному полиномиально-нелинейному уравнению векторное уравнение, линейное по неизвестным, но с матричными коэффициентами, действующими на определенный вектор. Простейшие способы матричной линеаризации, использующие алгебры Клиффорда, Грассмана и Даффина-Кеммера, нашли широкое применение при описании частиц со спином [7].

Рассмотрим систему из M уравнений в M-мерном пространстве

$$f_i(\xi) = 0, \quad (i = \overline{1,M}), \qquad /1.1/$$

где $\xi$ - точка в M-мерном пространстве, $f_i$ - полиномы произвольного порядка, заданные в кольце $\mathbf{C}[x_1, x_2, \ldots, x_M]$.

Пусть $\Omega$ - произвольное расширение основного поля $\mathbf{C}$. Набор из M элементов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M$ поля $\Omega$ является точкой аффинного пространства $A_M(\Omega)$. Точка $\xi$, удовлетворяющая /1.1/, называется корнем многочленов $f_i$ $(i = \overline{1,M})$. Множество всех общих корней /1.1/ образует алгебраическое многообразие [8].

Многомерный полином /многочлен/

$$f(\xi) := f(x_1, x_2, \ldots, x_M)$$

степени N из M переменных состоит из суммы $\mu(M,N)$ одночленов

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_M^{\alpha_M},$$

при этом максимальное число одночленов определяется по формуле [9]

$$\mu(M,N) = ((M+N)!/(M!\,N!)).$$

Для заданного многочлена составим два базисных вектора $F_1$ и $F_0$, максимальная размерность которых равна $L = \mu(M, N-1)$. $F_1$ и $F_0$ должны удовлетворять следующим условиям:

а/ $F_1$ содержит свободный член многочлена f и состоит из линейных по неизвестным выражений;

б/ $F_0$ содержит одночлены такой структуры, чтобы имело место равенство

$$(F_0, F_1) = f, \qquad /1.2/$$

где /...,.../ - означает скалярное произведение двух векторов.



Чтобы удовлетворить этим требованиям в общем случае, достаточно выбрать в качестве компонент $F_0$ всевозможные линейно-независимые одночлены степени меньше N: $x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i - k} \ldots x_M^{\alpha_M}$ и единицу. При этом структура $F_1$ будет определяться из /1.2/ и из требования линейности по неизвестным. Далее: запишем компоненты базиса $F_0$ в одну строку в порядке убывания степеней, проведем черту и под ней запишем соответствующие компоненты $F_1$. Следующим этапом построим линейно-независимые векторы $F_{p+1}$ $(p = 1, p = L-1)$, состоящие только из двух нетривиальных элементов: $x_i$ и -1 и удовлетворяющие условию

$$(F_0, F_{p+1}) = 0. \qquad /1.3/$$

Нумерацию p выберем в том порядке, чтобы она соответствовала месту /-1/ в $F_{p+1}$, если отсчитывать слева.

Например,

$$p = 1;\ F_2 := (-1, 0, \ldots, x_i, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$p = 2;\ F_3 := (0, -1, \ldots, x_k, \ldots, 0, 0). \qquad /1.4/$$

Располагая векторы $F_2, F_3, \ldots, F_\mu$ под вектором $F_1$, получим матрицу $\|F_{n,\ell}\|$ /n соответствует номеру вектора, $\ell$ - номеру компоненты вектора/. Важно, что элементы $F_{n,\ell}$ содержат неизвестные $x_i (i = \overline{1,M})$ только линейно.

На практике для построения $F_0$ и $F_1$ достаточно каждый одночлен полинома f представить в виде

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_M^{\alpha_M} = x_i (x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i - 1} \ldots x_M^{\alpha_M}),$$

затем линейный сомножитель объявить компонентой $F_1$, а сомножитель в скобках - компонентой $F_0$. Построенные таким образом $F_0$ и $F_1$ заведомо будут удовлетворять условию /1.2/. Для конструкции векторов $F_{p+1}$ последовательно каждому одночлену в $F_0$ необходимо найти другую компоненту $F_0$, при умножении которой на линейный по $x_i$ множитель получился бы данный одночлен. Поскольку у $F_{p+1}$ кроме двух остальные компоненты равны нулю, то условие /1.3/ оказывается выполненным.

Таким образом, матрица $W(f_i)$ для полинома $f_i(\xi)$ построена. Имеет место

<u>Теорема</u>. Определитель матрицы $W(f) := \|F_{n,\ell}\|$ есть полином f, т.е.

$$\det[W(f)] = f. \qquad /1.5/$$

/Доказательство см. в [6]/.

Матрица $W(f_i)$ может быть представлена в виде

$$W(f_i) := \sum_{k=1}^{M} x_k A_{ki} + A_{0i}, \qquad /1.6/$$

где матрицы $A_{ki}, A_{0i}$ зависят исключительно от коэффициентов полиномов $f_i$.

Итак, для заданной системы алгебраических уравнений /1.1/ мы получили билинейную векторную систему уравнений вида

$$\left[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{ki} + A_{0i}\right] \Psi_i = 0, \quad (i = \overline{1,M}), \qquad /1.7/$$

где $A_{ni}$ $(n = \overline{0,M};\ i = \overline{1,M})$ - матрицы, содержащие только коэффициенты системы /1.1/, $\Psi_i$ - соответствующие векторы. Размеры матриц определяются степенью полиномов.

Можно показать, /см., например,[6] /, что системы /1.1/ и /1.7/ равносильны, т.е. решения /1.1/ в точности совпадают с решениями /1.7/. Порядок матрицы $W(f)$ равен длине вектора $F_0$, который в общем случае есть $\approx \mu(M, N-1)$. В принципе, порядок матриц $A_{ik}$ может быть сокращен за счет усложнения описанного выше алгоритма.

## 2. РАЗДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ В МЕТОДЕ МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ. ПРОЦЕДУРА ПРИВЕДЕНИЯ К СОВМЕСТНОМУ ВИДУ. СОПРОВОЖДАЮЩАЯ МАТРИЦА ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

Практическая ценность ММЛ при решении нелинейных алгебраических уравнений состоит в том, что приведенные к совместному виду векторные уравнения позволяют произвести разделение неизвестных. На эту особенность векторных уравнений в рамках метода спинорной линеаризации квадратных уравнений впервые было указано в [10].

Есть еще одна важная особенность ММЛ[6]: исходная нелинейная задача /теория/ в ММЛ на определенном этапе ее решения, а именно после замены неизвестных соответствующими матрицами, превращается в линейную задачу /теорию/ относительно матриц-решений. Эти матрицы имеют те же свойства, что и сопровождающие матрицы /СМ/ для одномерных алгебраических уравнений. Разделение неизвестных, а следовательно, приведение исходной полиномиально-нелинейной системы к треугольному виду становится возможным после приведения векторных уравнений /1.11/ к совместному виду.



Рассмотрим систему векторных уравнений

$$\left[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{0m}\right] \Psi_m = 0, \quad (m = \overline{1,M}). \qquad /2.1/$$

Для определенности обозначим через $L$ порядок матриц $A_{km}$, $A_{0m}$. Приведем матрицы

$$G_m := \left[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{0m}\right] \qquad /2.2/$$

к взаимокоммутирующему виду, не теряя при этом свойства равносильности с исходной нелинейной системой. С этой целью умножим матрицу $G_1$ по правилу тензорного произведения слева, а остальные $M-1$ матриц $G_j$ $(j>1)$ справа, на единичную матрицу $E_L$ порядка $L$.

Получим

$$G1_1 = E_L \otimes G_1, \quad GJ_j = G_j \otimes E_L. \qquad /2.3/$$

При этом

$$\det(GJ_k) = \{\det G_k\}^L = f_k^L, \qquad /2.4/$$

так что равносильность при умножении $G_k$ на $E_L$ не теряется. Вместо заданных M-матриц $G_k$ /3.2/ образуем новые матрицы $GE_k$ по следующей формуле:

$$
\begin{aligned}
GE_1 &= \underbrace{E_L \otimes \dots \otimes E_L}_{(M-1)} \otimes G_1 \\
GE_2 &= \underbrace{E_L \otimes \dots \otimes E_L}_{(M-2)} \otimes G_2 \otimes E_L \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \qquad /2.5/ \\
GE_{M-1} &= E_L \otimes G_{M-1} \otimes \underbrace{E_L \otimes \dots \otimes E_L}_{(M-2)} \\
GE_M &= G_M \otimes \underbrace{E_L \otimes \dots \otimes E_L}_{(M-1)}.
\end{aligned}
$$

Можно показать, что полученные матрицы $GE_k$, $(k = \overline{1,M})$ коммутируют между собой.

Кроме того, они простые, так как по построению являются простыми матрицы $G_M$ из /2.2/. Следовательно, $GE_k$ обладают общим базисом собственных функций $\Phi_k$ $(n = \overline{1,L})$. Унитарную матрицу, столбцы которой состоят из собственных векторов $\Phi_n$, обозначим через U. Согласно соотношениям /2.4/, система уравнений

$$GE_m \Phi = 0, \quad (m = \overline{1,M}) \qquad /2.6/$$

равносильна системе /2.1/. Важно, что в /2.6/ все уравнения содержат одни и те же базисные векторы $\Phi$. Преобразование /2.5/ переводит /2.2/ в матрицы вида

$$GE_m := [\sum_{k=1}^{M} x_k AE_{km} + AE_{0m}] . \qquad /2.7/$$

Полученную систему уравнений /2.6/ по отношению к /2.1/ будем называть системой, приведенной к совместному виду.

Определим матрицу AEX как блочную матрицу, элементами-блоками которой являются матрицы $AE_{km}$ порядка L. Если диагональные блоки AEX-матрицы $AE_{kk}$ не особые, то существует матрица $AEX^{-1}$, обратная к AEX. Обозначим блоки $AEX^{-1}$, являющиеся матрицами того же порядка, что и AEX, через $BE_{nm}$.

Умножим /3.6/ слева на матрицу $AEX^{-1}$. Получим

$$x_n E\Phi = \hat{X}\Phi, \qquad /2.8/$$

$$\hat{X}_n = -\sum_{m=1}^{M} BE_{nm} AE_{0m} . \qquad /2.9/$$

В силу того, что $\det(AEX^{-1}) \neq 0$, система /2.8/ равносильна /2.6/, а следовательно, и /2.1/. Уравнения /2.8/ уже разделены относительно неизвестных $x_n$: каждое уравнение /2.8/ содержит свою неизвестную. Поскольку $\Psi_m$ содержит нетривиальный элемент, то $\Phi$ можно нормировать условием $\Phi^2 = 1$.

Таким образом, /2.8/ можно рассматривать как задачу на собственные значения. Пусть $D(x_n)$ - диагональная матрица из собственных чисел $x_n$.

Тогда /2.8/ запишем так:

$$UD(x_n) = \hat{X}_n U . \qquad /2.8a/$$

Из /2.8а/ видно, что матрицы $\hat{X}_n (n = \overline{1,M})$ имеют общий базис собственных векторов, следовательно /см., например, /11//, они взаимно коммутируют.

Заметим, что несмотря на линейность по неизвестным $x_n$, система /2.1/ нелинейна, точнее, билинейна, поскольку $\Psi_m$ также неизвестна. Согласно /1.12/, степень нелинейности /2.1/ совпадает со степенью /1.1/. Теперь поставим в соответствие системе /2.6/ линейную неоднородную матричную систему вида



$$\sum_{k=1}^{M} AE_{km} \hat{X}_k = -AE_{0m} . \qquad /2.10/$$

Решения /2.10/ определяются по формуле /2.9/.

Теорема. Матрицы $X_m (m = \overline{1,M})$ удовлетворяют нелинейной системе уравнений $f_m = 0, (m = \overline{1,M})$, т.е. являются общим решением этой системы в матричном представлении.

Доказательство. Допустим, что $x_{n,k} (n = \overline{1,M};\ k = \overline{1,L})$ являются собственными числами матриц $X_n$. Тогда, проектируя матричные уравнения /2.10/ на пространство собственных векторов $\Phi_k$ $(k = \overline{1,L})$, получим

$$[\sum_{m=1}^{M} AE_{mi} x_{m,k} + AE_{0i}]\Phi_k = 0. \qquad /2.11/$$

Но /2.6/ равносильна /2.1/, а /2.1/ равносильна /1.1/. Поскольку /2.11/ по форме повторяет /2.6/, то собственные значения являются решениями системы /1.1/. Это значит, что

$$f_i (D(x_n)) = 0. \qquad /2.12/$$

Из /3.8а/ имеем

$$UD(x_n)U^{-1} = \hat{X}_n .$$

Поэтому

$$0 = Uf_i (D(x_n))U^{-1} = f_i (UD(x_n)U^{-1}) = f_i (\hat{X}_n),$$

т.е. матрицы $\hat{X}_n$ удовлетворяют системе $f_i = 0, (i = 1,\dots,M)$.

На основе вышеизложенного можно сделать следующее заключение.

Для системы нелинейных алгебраических уравнений, для которых в принципе допустимо представление вида /2.6/ с невырожденными матрицами $AE_{km}$, существуют матрицы $\hat{X}_n$, обладающие свойствами:

1. Собственные значения $\hat{X}_n$ являются решениями заданной нелинейной системы.
2. Матрицы $\hat{X}_n$ удовлетворяют заданной системе уравнений.

Систему /1.1/ в этом случае можно называть аннулирующими многочленами или минимальной системой многочленов по отношению к матрицам $\hat{X}_n$ /по аналогии с одномерным случаем/.

3. Матрицы $\hat{X}_n$ находятся из решения линейных неоднородных алгебраических уравнений.

Таким образом, матрицы $\hat{X}_n$ обладают теми же свойствами, что и сопровождающие матрицы /СМ/ в одномерном случае. Поэтому $\hat{X}_n$ мы будем называть сопровождающими матрицами многомерной системы /СММС/.

До сих пор предполагалось, что матрицы $AE_{kk}$ - не особые. В действительности, это требование в рамках алгоритма 1 оказывается выполненным только в специальных случаях. А именно:

а/ если данное уравнение системы нелинейно по ведущей неизвестной и линейно по остальным неизвестным; б/ если уравнения системы обладают свойством однородности /нужной степени [6]/ по отношению к ведущим неизвестным. Как показано в [6], в принципе все системы могут быть сведены к случаю /б/ путем включения лишних "нулевых" решений. Однако изложенная выше техника может быть обобщена и на общий случай - когда ММЛ дает явно вырожденные матрицы $AE_{kk}$.

Продемонстрируем эту возможность на примере системы из двух неизвестных. В этом случае система /2.11/ имеет вид:

$$[AE_{11}x_1 + AE_{12}x_2]\Phi = -AE_{01}\Phi,$$
$$[AE_{21}x_1 + AE_{22}x_2]\Phi = -AE_{02}\Phi. \qquad /2.13/$$

Умножим первое уравнение на $AE_{21}$, второе - на $AE_{11}$. Вычитая одно уравнение из другого и используя условие коммутативности

$$AE_{21}AE_{11} - AE_{11}AE_{21} = 0,$$

получим

$$\omega x_1\Phi = (AE_{02}AE_{12} - AE_{01}AE_{22})\Phi \equiv R_1\Phi,$$
$$\omega x_2\Phi = (AE_{01}AE_{21} - AE_{02}AE_{11})\Phi \equiv R_2\Phi, \qquad /2.14/$$
$$\omega := (AE_{22}AE_{11} - AE_{12}AE_{21}).$$

Полученные обобщенные задачи на собственные значения /2.14/ являются сингулярными, т.е. не имеют характеристических многочленов. Действительно, в процессе вывода /2.14/ из /2.13/ уравнения были умножены на матрицы /$AE_{21}$ и $AE_{11}$/, детерминанты которых равны нулю. Отсюда следует, что

$$\det(\omega x_i - R_i) = 0, \quad (i = 1,2),$$

при любом значении $x_i$, т.е. задачи на собственные значения /2.14/ сингулярны [12].

В общем случае системы из M уравнений задачу разделения неизвестных в матричной системе /2.11/ с явно вырожденными особыми матрицами $AE_{kn}$ можно осуществить путем введения понятия матричного детерминанта [6].



Матричный детерминант: $\det(A)$ определяется для блочной матрицы с коммутирующими строками аналогично обычному определению детерминанта, где в качестве элементов матрицы выступают коммутирующие блоки. Таким образом, $\mathrm{Det}(A)$ является матрицей того же порядка, что и матрицы в блоках.

Обобщая процедуру исключения неизвестных, приведенную выше для двух уравнений /2.13/ на случай системы /2.11/, получим

$$\omega x_m\Phi = R_m\Phi, \quad m = 1,2,\dots,M, \qquad /2.15/$$

где

$$\omega = \mathrm{Det}(AEX),$$

$$R_m = -\sum_{k=1}^{M} F_k \cdot AEX_{km},$$

матрицы $AEX_{km}$- аналоги алгебраических дополнений для элементов-блоков $AE_{km}$, миноры которых определяются через матричный детерминант Det. В общем случае матрица $\omega$ - особая. В противном случае мы имели бы

$$x_m\Phi = \omega^{-1}R_m\Phi, \quad m = 1,2,\dots,M, \qquad /2.16/$$

что является очевидным обобщением формулы Крамера [6] с применением матричного детерминанта.

Обобщенная задача на собственные значения /2.15/ по той же причине, что и задача /2.14/, сингулярна. Здесь важно, что линейные преобразования при переходе от /2.11/ к /2.15/ не нарушают равносильности. Действительно, собственные векторы $\Phi$ и собственные значения $x_m$ задач /2.11/ и /2.15/ одни и те же. Таким образом, имеет место

<u>Теорема</u>.

Собственные значения задачи /2.15/ являются решениями нелинейной системы /1.1/.

<u>Доказательство</u> следует из равносильности /2.15/ и /2.11/, и, как было показано выше, /2.11/ и /1.1/. Таким образом, /2.15/ равносильна /1.1/.

Вычислительная процедура решения сингулярных обобщенных задач состоит в одновременной диагонализации матриц $\omega$ и $R_m$ /так называемый QZ-алгоритм [12]/. Для решения задачи /2.15/ можно предложить и другой путь.

Переформируем /2.15/ в следующем виде:

$$\omega\hat{X}_m = R_m, \qquad /2.17/$$

$$\lambda_m\Phi = \hat{X}_m\Phi. \qquad /2.18/$$

Таким образом, /2.15/ мы разбили на два этапа: /1/ из матричного уравнения /2.17/ определяется матрица $\hat{X}_m$ ; /2/ в /2.18/ решается обычная задача на собственные значения для матрицы $\hat{X}_m$. Допустим, что $P$ есть порядок матриц, входящих в /2.17/, а $N$ - ранг матрицы $\omega$. Тогда решение /2.17/ будет найдено, если будет задано $K = P - N$ строк матрицы $\hat{X}_m$. Для удобства можно задать $K$ нижних строк $\hat{X}_m$ нулями. Как известно [11], такая матрица имеет минимум $K$ нулевых собственных значений. Пусть $\xi_m (m = \overline{1,K})$ - собственные векторы $\hat{X}_m$, соответствующие этим "лишним" нулевым собственным значениям. Тогда /2.18/ следует сформировать как задачу на собственные значения со связями:

$$\lambda_{m,n} \Phi_n = \hat{X}_m \Phi_n, \quad (\Phi_n, \xi_\ell) = 0, \quad (\ell = 1, \ldots, K). \qquad /2.19/$$

## 3. МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Покажем, как метод матричной линеаризации позволяет обобщить алгоритм прогонки для нахождения решений нелинейного дифференциального уравнения в конечно-разностном представлении.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка в интервале $[a,b]$

$$y'' + p(x)y + F(y) = 0, \qquad /3.1/$$

где $F$ - полином от $y$.

Требуется найти решения /3.1/ при заданных краевых условиях

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

В результате конечно-разностной аппроксимации дифференциального оператора получим

$$(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1})/h^2 + p_n y_n + F(y_n) = 0,$$
$$y_0 = A, \quad y_N = B. \qquad /3.2/$$

Система /3.2/ из $N$ уравнений есть система нелинейных алгебраических уравнений специального вида. В результате применения ММЛ получим

$$Y_{n-1} L_n + Y_n K_n + Y_{n+1} M_n + T_n = 0,$$
$$Y_0 = A \cdot E, \quad Y_N = B \cdot E, \qquad /3.3/$$

где $L_n$, $K_n$, $M_n$, $T_n$ - матрицы, зависящие только от коэффициентов системы /3.2/, после приведения матричной системы к совместному виду, $E$ - единичная матрица, $Y$ - матрицы-решения линейной системы /3.3/ и нелинейной системы /3.2/. Для решения линейной матричной системы /3.3/ применим схему обычного метода прогонки.

Поскольку $Y_0$ - известная матрица, то $Y_1$ можно записать в виде

$$Y_1 = C_1 Y_2 + R_1.$$

Предположим, что на $n$-шаге имеем формулу

$$Y_n = C_n Y_{n+1} + R_n, \qquad /3.5/$$

тогда на $(n+1)$ шаге:

$$Y_{n+1} = C_{n+1} Y_{n+2} + R_{n+1}. \qquad /3.6/$$

Согласно /3.3/, в $(n+1)$ шаге имеет место следующее уравнение:

$$Y_n L_{n+1} + Y_{n+1} K_{n+1} + Y_{n+2} M_{n+1} + T_{n+1} = 0. \qquad /3.7/$$

Подставив /3.5/ в /3.7/, получим

$$Y_{n+1} = -(K_{n+1} + C_n L_{n+1})^{-1} M_{n+1} Y_{n+2} -$$
$$- (K_{n+1} + C_n L_{n+1})^{-1} (T_{n+1} + K_n L_{n+1}). \qquad /3.8/$$

Сравнивая /3.6/ и /3.8/, получим необходимые рекуррентные соотношения:

$$C_{n+1} = -(K_{n+1} + C_n L_{n+1})^{-1} M_{n+1}$$
$$R_{n+1} = -(K_{n+1} + C_n L_{n+1})^{-1} (T_{n+1} + K_n L_{n+1}). \qquad /3.9/$$

Надо отметить, что для системы вида /3.2/ обратная матрица $(K_{n+1} + C_n L_{n+1})^{-1}$ в общем случае существует. Это следует из того, что матрица $K_n$ /при любом $n$/ не особая, следовательно, система /3.3/ разрешима. В последней точке интервала

$$Y_N = B \cdot E,$$

поэтому из

$$Y_{N-1} = C_N \cdot B \cdot E + R_N$$

можно определить $Y_{N-1}$, и осуществляя обратный "прогоночный" ход, получим все $Y_n$ $(n = 1, \ldots, N-1)$. Полученные матричные решения $Y_n$ представляют собой взаимно-коммутирующие простые матрицы и, таким образом, обладают общим базисом собственных векторов. Решая задачу на собственные значения и определяя спектр и собственный базис матрицы $Y_{N-1}$, получим все решения /3.2/ как скалярные произведения:

$$y_{p,k} = (\Psi_{k,p}\ Y,\ \Psi_{k,p}). \qquad /3.2/$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Описание таблиц 1,2,3,4

В табл.1 приведены численные значения решений системы уравнений

$$A^k_{x2}x^2 + A^k_{y2}y^2 + A^k_{z2}z^2 + A^k_{xy}xy + A^k_{xz}xz + A^k_{yz}yz + \qquad /П.1/$$
$$+ A^k_x x + A^k_y y + A^k_z z + A^k_0 = 0, \quad (k = 1,2,3)$$

со следующими значениями коэффициентов:

$A^1_{x2} = 1$, $A^1_{y2} = -7{,}77$; $A^1_{z2} = 1{,}0$; $A^1_{xy} = 8{,}977$;

$A^1_{xz} = 3{,}0$; $A^1_{yz} = 2{,}0$; $A^1_x = -1{,}0$; $A^1_y = -2{,}0$; $A^1_z = -2{,}0$;

$A^2_{x2} = 0{,}004$; $A^2_{y2} = 1{,}0$; $A^2_{z2} = -2{,}0$; $A^2_{xy} = 0$, $A^2_{xz} = -3{,}0$;

$A^2_{zy} = 1{,}0$; $A^2_x = 4{,}0$; $A^2_y = 3{,}0$; $A^2_z = -2{,}0$; $A^3_{x2} = -25{,}1$;

$A^3_{y2} = 0{,}411$; $A^3_{z2} = -1{,}0$; $A^3_y = 2{,}0$; $A^3_z = 2{,}0$; $A^3_{xy} = 1{,}0$.

Здесь $A^3_{xz} = 4{,}0$; $A^3_{zy} = 1{,}0$.
Значения $A^1_0$, $A^2_0$, $A^3_0$ взяты из условия, чтобы одно из решений системы было: $x = 1{,}0$, $y = 2{,}0$, $z = 3{,}0$.

В табл.2,3,4 приведены численные значения решения нелинейного дифференциального уравнения

$$y'' + V(x)y + y^2 = 0, \qquad /П.2/$$



где

$V(x) = 10 * \exp(-2x)$,

в конечно-разностном представлении в интервале $[0,1]$ с краевыми условиями $y(0) = 1{,}0$; $y(1) = 5{,}0$.

В табл.2 приведены результаты, когда интервал интегрирования разбит на три части /N = 3-1/, в табл.3 - на четыре части /N = 4-1/ и в табл.4 - на пять частей /N = 5-1/. Число решений системы, полученной из /П.2/ в результате конечно-разностного представления производной, есть $2^N$, где N - число точек разбиения внутри интервала интегрирования.

Таблица 1

| № | X Re | X Im | Y Re | Y Im | Z Re | Z Im |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | -0.3II04 | 0.66706 | 0.60669 | 0.I4249 | -2.73548 | -0.79675 |
| 2 | -0.3II04 | -0.66706 | 0.60669 | -0.I4249 | -2.73548 | 0.79675 |
| 3 | -0.05065 | -0.I8436 | 0.I0884 | 0.90570 | 2.0623I | 0.5I9I3 |
| 4 | -0.05065 | 0.I8436 | 0.I0884 | -0.90570 | 2.0623I | -0.5I9I3 |
| 5 | I | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| 6 | -0.37439 | 0.60042 | -2.23406 | 0.4I638 | -3.09865 | -0.65489 |
| 7 | -0.37439 | -0.60042 | -2.23406 | -0.4I638 | -3.09865 | 0.65489 |
| 8 | 0.63I87 | 0 | 0.68007 | 0 | 2.304I9 | 0 |

Таблица 2

| № | $ReY_1$ | $ImY_1$ | $ReY_2$ | $ImY_2$ |
|---|---|---|---|---|
| I | II.094313346 | 9.8783645398 | I2.026203738 | I0.232666223 |
| 2 | II.094313346 | -9.8783645399 | I2.026203738 | -I0.232666223 |
| 3 | I.77I5I5462I | 4.4030303504 | 3.3378248809 | 4.56095I3392 |
| 4. | I.77I5I54620 | -4.4030303504 | 3.3378248808 | -4.56095I339I |

Таблица 3

| № | $Re\,y_1$ | $Im\,y_1$ | $Re\,y_2$ | $Im\,y_2$ | $Re\,y_3$ | $Im\,y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 24.032720967 | I9.568I63II4 | 25.7889II504 | 27.066I3II29 | 25.8348I4038 | I9.773502925 |
| 2 | 24.032720967 | -I9.568I63II4 | 25.7889II504 | -27.066I3II29 | 25.8348I4038 | -I9.773502925 |
| 3 | 22.7I3082893 | I2.933006350 | 2.5292068254 | 5.30I8522478 | 24.279882950 | I3.247095008 |
| 4 | 22.7I3082894 | -I2.933006350 | 2.5292068254 | -5.30I8522479 | 24.279882950 | -I3.247095008 |
| 5 | 3.3797I52452 | I2.98I676327 | I4.297082898 | I5.5579409I0 | 5.3326339749 | I3.I957I0400 |
| 6 | 3.3797I52458 | -I2.98I676327 | I4.297082898 | -I5.5579409I0 | 5.3326339749 | -I3.I957I0400 |
| 7 | I.7438676858 | 3.779II5005I | I4.027209947 | I5.7552084II | 4.09006583II | 3.9293778402 |
| 8 | I.7438676858 | -3.779II5005I | I4.027209947 | -I5.7552084II | 4.09006583II | -3.9293778402 |



Таблица 4

| $Re\,Y_1$ | $Im\,Y_1$ | $Re\,Y_2$ | $Im\,Y_2$ |
|---|---|---|---|
| 39.683384837 | 3I.302680006 | 43.92996744I | 45.I63569I44 |
| 44.677I6I368 | 45.2I0252258 | 4I.958438864 | 3I.452045305 |
| 39.68338483I | -3I.302680006 | 43.929967440 | -45.I63569I45 |
| 44.677I6I369 | -45.2I0252258 | 4I.958438864 | -3I.452045305 |
| 38.394I68280 | 29.280874I96 | 40.824I26579 | 39.226404092 |
| 4I.542498739 | 39.36I588I02 | 40.684226643 | 29.439697927 |
| 38.394I6828I | -29.280874I96 | 40.824I26579 | -39.226404092 |
| 4I.542498739 | -39.3I6588I02 | 40.684226643 | -29.439697927 |
| 4I.4776I2643 | 20.07334II49 | 2.43346I2375 | 20.605450014 |
| 3.I795677634 | 20.720355609 | 43.654542350 | 20.237655020 |
| 4I.4776I2643 | -20.07334II49 | 2.43346I2375 | -20.605450014 |
| 3.I795677634 | -20.720355609 | 43.654542350 | -20.237655020 |
| 37.037570966 | I7.982033I62 | 2.2205284508 | 5.I029277595 |
| 3.I9672850I8 | 5.I86289734I | 39.I39996945 | I8.248606799 |
| 37.037570966 | -I7.982033I63 | 2.2205284508 | -5.I029277595 |
| 3.I9672850I9 | -5.I86289734I | 39.I39996946 | -I8.248606799 |
| $Re\,Y_3$ | $Im\,Y_3$ | $Re\,Y_4$ | $Im\,Y_4$ |
| 6.824I55I567 | 23.043807978 | I8.I35792I89 | 3I.84309I867 |
| I8.937356206 | 3I.836349686 | 9.209I460600 | 23.I94057972 |
| 6.824I55I564 | -23.043807978 | I8.I35792I89 | -3I.84309I867 |
| I8.937356206 | -3I.336349686 | 9.209I460596 | -23.I9405797I |
| 9.0666050367 | I7.0772I8I89 | 30.I96470552 | 27.328596860 |
| 30.800809088 | 27.427203934 | II.28504949I | I7.242024I67 |
| 9.0666050366 | -I7.0772I8I88 | 30.I96470552 | -27.328596860 |
| 30.800809088 | 27.427203934 | II.28504949I | -I7.242024I67 |
| -0.98589786I63 | II.379552II8 | 2I.2072II284 | 22.I38279736 |
| 23.456I649I7 | I7.525432062 | 4.4549386655 | 3.3I84866547 |
| -0.98589786I80 | -II.379552II8 | 2I.2072II284 | -22.I38279737 |
| 23.456I649I7 | -I7.525432062 | 4.4549386655 | -3.3I84866547 |
| I.6895939873 | 3.I959I54783 | 23.079283435 | I7.I88952222 |
| 22.I6I944896 | 22.II6520893 | I.5377996077 | II.535545738 |
| I.6895939874 | -3.I959I54784 | 23.079283435 | -I7.I88952222 |
| 22.I6I944896 | -22.II6520893 | I.5377996078 | -II.535545738 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Наука, М., 1977.
2. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. ЭЧАЯ, 1973, ч.1, с.127.
3. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1962.

4. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, P11-85-445, Дубна, 1985.
5. Buchberger B.Gröbner Bases: Algorithmic Method of Polinomial Ideal Theory. CAMP-Publ.Nr 83-29.0, Nov. 1983.
6. Ямалеев P.M. ОИЯИ, P11-85-815, Дубна, 1985; ОИЯИ, P5-86-250, Дубна, 1986; ОИЯИ, P5-86-833, Дубна, 1986.
7. Богуш А.А. Ввведение в полевую теорию элементарных частиц. "Наука и техника", Минск, 1981.
8. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра, "Наука", М., 1979.
9. Мысовских И.Н. Интерполяционные кубатурные формулы. "Наука", М., 1981.
10. Кузнецов Н.Г., Пшеничников С.Б. ДАН СССР, 1985, т.283, № 5, с. 1073.
11. Ланкастер П. Теория матриц. "Наука", М., 1978.
12. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений, "Наука", М., 1970.
Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. "Наука", М., 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 октября 1987 года.



Ямалеев Р.М., Хуторной Н.В. P11-87-767
Алгоритм прогонки для решения матрично-линеаризуемых нелинейных краевых задач

Предложен метод решения полиномиально-нелинейных конечноразностных уравнений второго порядка с заданными краевыми условиями. Показано, что применение метода матричной линеаризации позволяет обобщить известный алгоритм прогонки для нахождения общих решений нелинейных уравнений в матричном представлении. Для определения матриц-решений достаточно решить линейную блочно-матричную систему уравнений. Собственные значения полученных матриц соответствуют численным решениям исходного нелинейного уравнения. Приведены таблицы значений решений модельной задачи.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

**Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987**

Перевод О.С.Виноградовой

Yamaleev R.M., Khutornoy N.A. P4-87-767
Alternative Direct Algorithm for Solving the Matrix-Linearity Nonlinear Boundary Value Problem

A method for solving the polynomial nonlinear finite difference two order equations with the given boundary value conditions is proposed. It is shown that the application of the matrix linearization permits to generalized the well known alternative direct algorithm in order to find general solutions of nonlinear equations in matrix representation. To define matrix-solutions linear block-matrix system of equations should be solved. Matrix spectrum obtained corresponds to the numerical solutions of the initial nonlinear equation. Tables of values of model problem solutions are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

**Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987**