

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

A 39

P11-87-738

П.Г.Акишин, В.П.Акопян*, Е.П.Жидков

**РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ
ГЕЛЬМГОЛЬЦА МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

* Ереванский физический институт

1987

В данной работе исследуется вопрос численного решения двумерного уравнения Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений. Для случая ограниченных областей широко развиты методы, использующие дифференциальную постановку задачи, созданы пакеты программ, успешно применяемые на практике /1-4/. Интегральные методы относительно слабо отражены в научной литературе /5-8/, что связано со сложностью их применения. С другой стороны, интегральный подход позволяет одновременно находить решения как внутренней задачи, так и внешней, для которой применение дифференциальной постановки затруднительно. В настоящей работе предпринята попытка решения некоторых вопросов интегральной постановки, быстрого вычисления коэффициентов матриц дискретизованных уравнений, создание устойчивого алгоритма решения нелинейных дискретизованных уравнений, разработка критерия отбора решений для внутренней и внешней задачи. Изложение проводится для внутренней задачи, однако все идеи могут быть использованы и для решения внешней задачи.

§ I. Дискретизация интегральных уравнений

В замкнутой односвязной области $G \in R^2$ рассмотрим однородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) u + k^2 u \equiv 0 \quad (I.1)$$

для k и функции $u = u(\bar{y})$, удовлетворяющей на границе области G условию

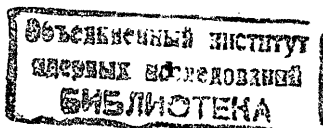
$$u(\bar{y}) \equiv 0, \quad \bar{y} \in DG. \quad (I.2)$$

Функцию $u(\bar{y})$ будем искать в виде

$$u(\bar{y}) = \int_{DG} \chi_0(k|\bar{x}-\bar{y}|) \sigma(\bar{x}) d\ell_{\bar{x}}, \quad (I.3)$$

где $\chi_0(\bar{x})$ - функция Бесселя второго рода /9/.

Очевидно, что функция (I.3) удовлетворяет уравнению (I.1). Потребуем на границе области G выполнения условия (I.2):



$$u(\bar{y}) = \oint_{DG} y_0(k|\bar{x}-\bar{y}|) \sigma(\bar{x}) d\ell_{\bar{x}} \equiv 0, \quad \bar{y} \in DG. \quad (I.4)$$

Для однозначности определения $u(\bar{y})$ вводится нормировка $\oint_{DG} \sigma^2(\bar{x}) = 1$.
Решение уравнения (I.4) относительно k и $\sigma(\bar{x})$ будет предметом дальнейшего исследования.

Заметим, что любое решение уравнения (I.1)-(I.2) представимо в виде (I.4). В предположении необходимой гладкости границы DG решение уравнения (I.1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$\alpha(\bar{y}) u(\bar{y}) = \oint_{DG} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{\bar{x}}} (y_0(k|\bar{x}-\bar{y}|) u(\bar{x})) d\ell_{\bar{x}} - \oint_{DG} y_0(k|\bar{x}-\bar{y}|) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_{\bar{x}}} d\ell_{\bar{x}}, \quad (I.5)$$

где

$$\alpha(\bar{y}) = \begin{cases} 4 & \bar{y} \in G \setminus DG \\ 2 & \bar{y} \in DG \\ 0 & \bar{y} \in R^2 \setminus G \end{cases}$$

а $\bar{n}_{\bar{x}}$ - внешняя нормаль к области G .

Из (I.2) и (I.5) нетрудно показать существование k и $\sigma(\bar{x})$, удовлетворяющих (I.4).

Заметим, что не все $u(\bar{y})$ из (I.4) будут нетривиальными решениями (I.1)-(I.2), так как (I.4) удовлетворяют $\sigma(\bar{x})$ и k , такие, что соответствующие им убывающие на бесконечности $u(\bar{y})$ являются решениями задачи для области $G_1 = R^2 \setminus G$ и тождественно равны нулю в области G .

Для дискретизации уравнения (I.4) используется метод коллокации. Пусть t_1, t_2, \dots, t_{N+1} - набор узлов на $DG(t_{N+1}=t_1)$. Обозначим через s_i отрезок с вершинами в t_i, t_{i+1} . Приближим $\sigma(\bar{x})$ кусочно-постоянной функцией

$$\sigma(\bar{x}) = \left\{ \sigma_i, \bar{x} \in [t_i, t_{i+1}] \right\}.$$

Обозначив через $\{\bar{y}_i\}$ середины отрезков $\{s_i\}$, заменим (I.4) следующим уравнением:

$$u(\bar{y}_i) = \sum_{j=1}^N \int_{s_j} y_0(k|\bar{x}-\bar{y}_i|) \sigma_j d\ell_{\bar{x}} \equiv 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (I.6)$$

Пусть $[A] = [A(k)]$ - матрица размерности $[N \times N]$:

$$[A(k)] = \begin{pmatrix} \int_{s_1} y_0(k|\bar{x}-\bar{y}_1|) d\ell_{\bar{x}} & \dots & \int_{s_N} y_0(k|\bar{x}-\bar{y}_1|) d\ell_{\bar{x}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{s_1} y_0(k|\bar{x}-\bar{y}_N|) d\ell_{\bar{x}} & \dots & \int_{s_N} y_0(k|\bar{x}-\bar{y}_N|) d\ell_{\bar{x}} \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы уравнение (I.6) имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно равенства нулю детерминанта матрицы $[A(k)]$

$$\det [A(k)] \equiv 0. \quad (I.7)$$

Чтобы явно выписать коэффициенты матрицы $[A(k)]$ необходимо вычислить интегралы вида:

$$a_{ji} = \int_{s_i} y_0(k|\bar{x}-\bar{y}_j|) d\ell_{\bar{x}}. \quad (I.8)$$

При $i \neq j$ a_{ji} аппроксимируется следующим выражением:

$$a_{ji} = \mu(s_i) y_0(k|\bar{x}_i-\bar{y}_j|), \quad (I.9)$$

где $\mu(s_i)$ - длина отрезка s_i . Для вычисления a_{ii} функция $y_0(\bar{x})$ приближается выражением вида

$$\tilde{y}_0(\bar{y}) = P(\bar{y}) \ln|\bar{y}| + Q(\bar{y}),$$

где $P(\bar{y})$ и $Q(\bar{y})$ - полиномы. После такой замены интеграл (I.8) берется в явном виде:

$$a_{ii} = \int_{s_i} \tilde{y}_0(k|\bar{x}-\bar{y}_i|) d\ell_{\bar{x}}. \quad (I.10)$$

§ 2. Учет симметрий

В этом параграфе мы рассмотрим широко применяемый на практике учет симметрии задачи, позволяющий существенно сократить объем вычислений. Пусть область G имеет одну ось симметрии (рис. I)

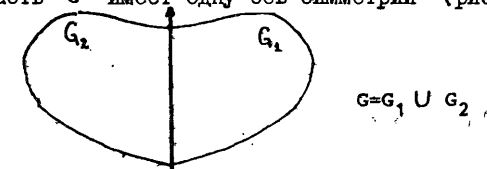


Рис. I

и оператор B переводит точку $P(x, y)$ в точку $\tilde{P}(-x, y)$. Тогда

$$G_2 = BG_1, \quad (\bar{x} \in G_1) \quad (2.1)$$

Если функция $u(\bar{x})$ удовлетворяет уравнению (I.1), то функции

$$u_1(\bar{x}) = \frac{1}{2}(u(\bar{x}) + u(B\bar{x})), \\ u_2(\bar{x}) = \frac{1}{2}(u(\bar{x}) - u(B\bar{x}))$$

также удовлетворяют уравнению (I.1). Кроме того, $u_1(\bar{x})$ удовлетворяет условию симметрии

$$u_1(B\bar{x}) = u_1(\bar{x}) \quad (2.2)$$

а $u_2(\bar{x})$ — антисимметрии

$$u_2(B\bar{x}) = -u_2(\bar{x}) \quad (2.3)$$

Так как $u(\bar{x}) = u_1(\bar{x}) + u_2(\bar{x})$, достаточно найти только симметричные и антисимметричные решения, остальные будут их линейной комбинацией. Условие симметрии и антисимметрии можно обеспечить, налагая аналогичные (2.2)–(2.3) условия на $\sigma(\bar{x})$. И наоборот, если $\sigma(\bar{x})$ удовлетворяет уравнению (I.4), то

$$\sigma_1(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\sigma(\bar{x}) + \sigma(B\bar{x}))$$

$$\sigma_2(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\sigma(\bar{x}) - \sigma(B\bar{x}))$$

также удовлетворяют уравнению (I.4). Действительно, пусть $DG = DG_1 \cup DG_2$ (предполагается, что $G_1 \cap G_2$ не входит в DG_1 , DG_2), $\tilde{\sigma}_1(\bar{x}) = \sigma_1(\bar{x})$ для $\bar{x} \in DG_1$ и $\tilde{\sigma}_2(\bar{x}) = \sigma_2(\bar{x})$ для $\bar{x} \in DG_2$. Из уравнения (I.4) следует, что

$$\int_{DG_1} \gamma_0(k|\bar{x}-\bar{y}|) \tilde{\sigma}_1(\bar{x}) d\ell_{\bar{x}} + \int_{DG_2} \gamma_0(k|\bar{x}-\bar{y}|) \tilde{\sigma}_2(\bar{x}) d\ell_{\bar{x}} \equiv 0 \quad (2.4)$$

для $\bar{y} \in DG_1$, и

$$\int_{DG_1} \gamma_0(k|\bar{x}-\bar{y}|) \tilde{\sigma}_1(\bar{x}) d\ell_{\bar{x}} + \int_{DG_2} \gamma_0(k|\bar{x}-\bar{y}|) \tilde{\sigma}_2(\bar{x}) d\ell_{\bar{x}} \equiv 0 \quad (2.5)$$

для $\bar{y} \in DG_2$.

Используя очевидное тождество

$$|\bar{x} - B\bar{y}| \equiv |\bar{x} - \bar{y}| \quad (2.6)$$

и симметрию ($DG_2 = BDG_1$), из (2.4)–(2.5) несложно показать, что $\tilde{\sigma}_1(\bar{x})$ и $\tilde{\sigma}_2(\bar{x})$ удовлетворяют интегральному уравнению (I.4). Аналогично рассматривается и случай двух осей симметрии.

Учет симметрии задачи позволяет существенно сократить размерность решаемой дискретизованной задачи. Рассмотрим свойства матрицы $[A]$ из уравнения (I.7) при аппроксимации (I.9)–(I.10). Возьмем диагональную матрицу $[D]$ с элементами $a_{ii} = \mu(S_1)$ и рассмотрим матрицу $[\tilde{A}] = [A] \cdot [D]^{-1}$. Элементы \tilde{a}_{ij} равны

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \gamma_0(k|\bar{x}_i - \bar{x}_j|), & i \neq j \\ \frac{1}{\mu(S_1)} \int_{S_1} \tilde{\gamma}_0(k|\bar{x} - \bar{x}_i|) d\ell_{\bar{x}}, & i=j. \end{cases}$$

Отсюда видно, что матрица $[\tilde{A}]$ симметричная. Это свойство матрицы $[\tilde{A}]$ сохраняется и при учете симметрии области G . Покажем это в случае наличия у области одной симметрии: $G = G_1 \cup G_2$; $G_2 = BG_1$. Коэффициенты \tilde{a}_{ij}^l в этом случае равны

$$\tilde{a}_{ij}^l = \begin{cases} \gamma_0(k|\bar{x}_j - \bar{x}_i|) + (-1)^l \gamma_0(k|B\bar{x}_j - \bar{x}_i|), & i \neq j \\ \frac{1}{\mu(S_1)} \left(\int_{S_1} \tilde{\gamma}_0(k|\bar{x} - \bar{x}_i|) d\ell_{\bar{x}} + (-1)^l \int_{S_1} \gamma_0(k|B\bar{x}_i - \bar{x}_i|) d\ell_{\bar{x}} \right), & i=j, \end{cases} \quad (2.7)$$

где l равно 0 для $\sigma_1(\bar{x})$ и 1 для $\sigma_2(\bar{x})$. Из (2.6) и (2.7) следует, что $\tilde{a}_{ij}^l = \tilde{a}_{ji}^l$. Аналогично показывается симметрия матрицы $[\tilde{A}]$ в случае наличия двух осей симметрии в области G .

§ 3. Итерационный процесс решения нелинейного уравнения

Решение уравнения (I.7) сводится к нахождению корней функции $f(k) = \det[\tilde{A}(k)]$.

Для вычисления $f(k)$ проводится факторизация матрицы $[\tilde{A}(k)]$:

$$[\tilde{A}(k)] = [L(k)][D(k)][L(k)]^T, \quad (3.1)$$

где $[L(k)]$ — нижняя треугольная матрица с единичными элементами по главной диагонали, а $[D(k)]$ — диагональная матрица. Очевидно, что детерминант $[\tilde{A}(k)]$ равен произведению диагональных элементов

$\{a_{ii}\}$ матрицы $[D(k)]$

$$f(k) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Для нахождения корней функции $f(k)$ воспользуемся модификацией метода Ньютона с вырезанием корней /10/. Пусть $k_1^* < k_2^* < \dots < k_n^*$, решения уравнения

$$f(k_i^*) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Введем функцию $\hat{f}(k)$:

$$\hat{f}(k) = e^{-k\alpha} f(k), \quad \alpha \geq 0.$$

Для функции $\hat{f}(k)$ имеет место Лемма.

Лемма

Пусть на отрезке $[k_0, k_1^* + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) выполнены условия:

А. Вторая производная $f(k)$ ограничена:

$$|f''(k)| \leq m_1.$$

В. Первая производная $f(k)$ в корне k_1^* отлична от нуля:

$$|f'(k_1^*)| \geq m_2 > 0.$$

С. На отрезке $[k_0, k_1^* + \varepsilon]$ существует только один корень функции $f(k)$.

Тогда существует такое $\alpha \geq 0$, что итерационный процесс

$$k_{j+1} = k_j - \frac{\hat{f}(k_j)}{\hat{f}'(k_j)} \quad (3.2)$$

$$j=0, 1, 2, \dots$$

сходится к корню k_1^* .

Доказательство

Для определенности предположим, что $f(k) > 0$ на отрезке $[k_0, k_1^*]$. Тогда из условия В следует, что $f'(k_1^*) \leq -m_2$. Из условия А, В и тождества

$$f'(k) = f'(k_1^*) - \int_k^{k_1^*} f''(k) dk \quad (3.3)$$

следует, что существует такое $m_3 > 0$, что

$$|f'(k)| \leq m_3$$

для $k \in [k_0, k_1^*]$. Из (3.3) следует, что существует такое $\delta > 0$, при

котором $f'(k) \leq -m_2/2$ для $k \in [k_1^* - \delta, k_1^*]$. Обозначим через $s = \inf_{k_0 \leq k \leq k_1^* - \delta} f(k)$. Согласно определению функции $\hat{f}(k)$ имеем:

$$\frac{d\hat{f}(k)}{dk} = e^{-\alpha k} (f'(k) - \alpha f(k))$$

$$\frac{d^2\hat{f}(k)}{dk^2} = e^{-\alpha k} (f''(k) - 2\alpha f'(k) + \alpha^2 f(k)).$$

Определим $\{\alpha_i\}$ следующим образом:

$$\alpha_1 = \inf_{\alpha \geq 0} \{\alpha : m_3 - \alpha_1 s < 0\}$$

$$\alpha_2 = \inf_{\alpha \geq 0} \{\alpha : -m_1 - 2\alpha_2 m_3 + \alpha_2^2 s \geq 0\}$$

$$\alpha_3 = \inf_{\alpha \geq 0} \{\alpha : -m_1 + \alpha_3 m_2 \geq 0\}.$$

Тогда при $\alpha^* = \max_{i=1, 3} \alpha_i$ $\frac{d\hat{f}(k)}{dk} < 0$, $\frac{d^2\hat{f}(k)}{dk^2} \geq 0$

для $k \in [k_0, k_1^*]$. По теореме о сходимости метода Ньютона /II/, последовательность $\{k_j\}$ из (3.2) монотонно сходится к корню k_1^* . Лемма доказана.

Заметим, что выбор α фактически означает обеспечение необходимой выпуклости (вогнутости) функции $\hat{f}(k)$ для $k \in [k_0, k_1^*]$.

После определения первого корня k_1^* используется процедура исчерпывания из /12/. Итерационный процесс применяется для функции $\hat{f}_1(k) = \frac{\hat{f}(k)}{k - k_1^*}$ с начальным приближением $\lambda_0 = k_1^* - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Если выбранное α сохраняет выпуклость (вогнутость) $\hat{f}_1(k)$ для $k \in [k_1^* - \varepsilon, k_2^*]$, то процесс Ньютона сходится к корню k_2^* . Аналогично, для нахождения k_{i+1}^* используется функция

$$\hat{f}_i(k) = \frac{\hat{f}(k)}{\prod_{j=1}^i (k - k_j^*)}$$

В этом случае выражение в правой части (3.2) имеет вид

$$\frac{\hat{f}_1(\lambda_j)}{\hat{f}'_1(\lambda_j)} = \frac{f(\lambda_j)}{f'(\lambda_j) - f(\lambda_j) \cdot \left(\alpha + \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{1}{\lambda_j - k_\ell^*} \right)}$$

Ситуация существенно усложняется, когда функция $\hat{f}(k)$ имеет кратные или очень близкие корни. В этом случае данный итерационный процесс будет сходиться, если производные функции $\hat{f}(k)$ вычислять точно. Так как функция $f(k)$ и ее производная $f'(k)$ определяются приближенно, за счет ошибок аппроксимации возможна потеря кратных или очень близких корней. В этом случае функция $f(k)$ приближается квадратичной параболой. Если парабола не имеет корней, то в качестве корня берется значение k^* , при котором достигается экстремум.

Для контроля итерационного процесса использовались следующие соображения. Пусть $a_{11}(k), a_{22}(k), \dots, a_{NN}(k)$ - диагональные элементы матрицы $[D(k)]$ из (3.1). По теореме Сильвестра об инерции квадратичной формы /13/ количество положительных, отрицательных и равных нулю собственных значений матрицы $[\tilde{A}(k)]$ совпадает соответственно с количеством положительных, отрицательных и равных нулю значений $\{a_{11}(k)\}$. Так как

$$\det[\tilde{A}(k)] = \prod_{i=1}^N a_{11}(k),$$

то изменение соотношения количества положительных и отрицательных элементов $\{a_{11}(k)\}$ указывает на наличие корня функции $\hat{f}(k)$.

§ 4. Оптимизация вычислений

В этом параграфе излагаются некоторые соображения, позволяющие провести дальнейшее сокращение объема вычислений. Из вышеизложенного ясно, что в процессе итераций возникает необходимость многократного вычисления функций Бесселя второго рода от выражений вида $R_{1j} = k|\bar{x}_1 - \bar{x}_j|$. В общем случае при фиксированном k $\{R_{1j}\}$ принимают $(1+N \cdot \frac{N-1}{2})$ значений, где N - количество разбиений границы области DG . Но для многих конфигураций эта величина существенно меньше. Пусть s_1, s_2, \dots, s_L - всевозможные, не равные между собой значения, которые принимает выражение $|\bar{x}_1 - \bar{x}_j|$ при $i, j = 1, 2, \dots, N$. Будем предполагать, что $s_i > s_j$ при $i > j$. Присвоим $\text{IND}(I, J)$ значение i_0 , для которого $s_{i_0} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_j|$. Для выполнения одного шага итерационного процесса необходимо вычислить L значений функции Бесселя $y_i = y_0(k \cdot s_i)$ ($i = 1, 2, \dots, L$). Далее, в соответствии с функцией $\text{IND}(I, J)$ определяются значения $y_0(k|\bar{x}_1 - \bar{x}_j|)$, кроме того, для ускорения вычисления значений функ-

ции Бесселя второго рода используется аппроксимация функций Бесселя в -сплайном третьего порядка. Для решения задачи используется многосеточный алгоритм. Первоначальная задача решается на крупной сетке, т.е. находятся корни уравнения (1.7) и одновременно определяется принадлежность корня внутренней или внешней задаче.

Из уравнения (1.5) следует, что если $\sigma(\bar{x})$ и k соответствуют $u(\bar{y})$ - решению внешней задачи, то $u(\bar{y}) \equiv 0$ для $\bar{y} \in G$. Следовательно, предел нормальной производной $\frac{\partial u^+}{\partial n_{\bar{y}}}$ внутри области G равен нулю. Аналогично, если $\sigma(\bar{x})$ и k соответствуют решению внутренней задачи, то предел нормальной производной $\frac{\partial u^-}{\partial n_{\bar{y}}}$ извне области G равен нулю. Учитывая разрыв нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на границе области, имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial u(\bar{y})^+}{\partial n_{\bar{y}}} = \int_{DG} \frac{\partial}{\partial n_{\bar{y}}} (y_0(k|\bar{x} - \bar{y}|)) \sigma(\bar{x}) d\ell_{\bar{x}} - 2 \sigma(\bar{y})$$

$$\frac{\partial u(\bar{y})^-}{\partial n_{\bar{y}}} = \int_{DG} \frac{\partial}{\partial n_{\bar{y}}} (y_0(k|\bar{x} - \bar{y}|)) \sigma(\bar{x}) d\ell_{\bar{x}} + 2 \sigma(\bar{y}).$$

Для определения принадлежности решения внутренней (внешней) задаче по квадратурным формулам вычисляются интегралы

$$s_1 = \int_{DG} \left(\frac{\partial u(\bar{y})^+}{\partial n_{\bar{y}}} \right)^2 d\ell_{\bar{y}}, \quad s_2 = \int_{DG} \left(\frac{\partial u(\bar{y})^-}{\partial n_{\bar{y}}} \right)^2 d\ell_{\bar{y}}.$$

В случае, если $s_1 > \gamma s_2$, то предполагается, что $u(\bar{y})$ является решением внутренней задачи, а если $s_2 > \gamma s_1$, то $u(\bar{y})$ - решение внешней задачи. В остальных случаях считается, что принадлежность решения не определена и анализ переносится на следующую сетку. Значение γ выбирается до начала итерационного процесса. В проведенных расчетах значение γ бралось равным 10.

Таким образом, найденные значения k_1^* разбиваются на 3 класса. На следующей сетке те значения $\{k_1^*\}$, которые определены как решения задачи, и все неопределенные используются в качестве начальных приближений для итерационного процесса по методу Ньютона.

§ 5. Численное моделирование

Изложенная методика реализована в виде комплекса программ на **FORTRANe**. Для проверки правильности расчетов, а также для оценки точности решения и времени счета, рассматривались задачи, имеющие аналитические решения. Результаты вычислений для области G в виде круга с единичным радиусом приведены в таблице 1, для области G в виде прямоугольника со сторонами π и 2π - в таблице 2. Проводи-

Таблица 1

N	$h=\pi/18$	$h=\pi/36$	$h=\pi/72$	экстраполир.	точное
I	2,42450	2,41208	2,40781	2,40453	2,40482
2*	3,86387	3,84343	3,83654	3,83088	3,83171
3*	5,17951	5,15152	5,14209	5,13578	5,13562
4	5,56824	5,53729	5,52708	5,52042	5,52007
5*	6,43515	6,40013	6,38828	6,38019	6,38016

СР TIME ЕС IO6I равно 8,7 с.

* - кратные корни.

Таблица 2

N	$h=\pi/6$	$h=\pi/12$	$h=\pi/24$	экстраполир.	точное
I	1,12649	1,12203	1,11998	1,11805	1,11803
2	1,42300	1,41843	1,41628	1,41413	1,41421
3	1,81263	1,80753	1,80508	1,80263	1,80278
4	2,08008	2,06988	2,06551	2,06113	2,06155
5	2,25393	2,24441	2,24005	2,23568	2,23607
6	2,24747	2,24157	2,23871	2,23585	2,23607
7	2,51704	2,50847	2,50406	2,49965	2,5
8	2,70586	2,69902	2,69564	2,69225	2,69258
9	2,84449	2,83716	2,83264	2,82811	2,82843
10	3,07168	3,05460	3,04745	3,04029	3,04138
11	3,17749	3,16979	3,16578	3,16178	3,16227

СР TIME ЕС IO6I равно 20,7 с.

Таблица 3

N	$h=1/3$	$h=1/6$	$h=1/12$	экстраполир.
1*	3,11842	3,11230	3,10966	3,10702
2	3,95351	3,92348	3,91007	3,89666
3	4,48681	4,46739	4,45465	4,44191
4	5,47903	5,46068	5,44625	5,43182
5	5,64178	5,66166	5,65741	5,65316

СР TIME ЕС IO6I равно 11 с.

* - значение, посчитанное по программе ЕДИН /2/ равно 3,10479.

Таблица 4

N	$h=1./3.$	$h=1./6.$	$h=1./12.$	экстрапол.	PDSOR /14/
I	3,04916	3,04381	3,03982	3,03582	3,0354
2	3,11448	3,11159	3,10979	3,10798	3,1070
3	3,54634	3,52263	3,51207	3,50152	
4	3,95077	3,92153	3,90912	3,89672	3,8973
5	4,20699	4,18491	4,17328	4,16165	4,1617

СР TIME ЕС IO6I равно 45,6 с.

Значения первого собственного числа, посчитанные по программам:

Spielman В.Е., Harrington R.F. /5/ - 3,041

Григорьев и др. /15/ - 3,0396.

Таблица 5

N	номер расчетной области				
	I	II	III	IV	V
k_1	1,71777	1,67509	1,61247	1,52493	1,42190
k_2	2,12366	2,00553	1,92646	1,85373	1,80168
k_3	2,70669	2,55510	2,41389	2,26873	2,10905
k_4	3,03688	2,71161	2,37008	2,09165	1,86788
k_5	3,10811	3,06710	3,05582	2,82220	2,57064
k_6	3,34465	3,06211	2,73928	2,50306	2,35301

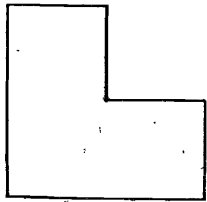


Рис. 2.

L-образная область.

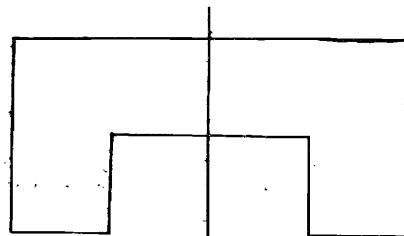


Рис. 3.

U-образная область.

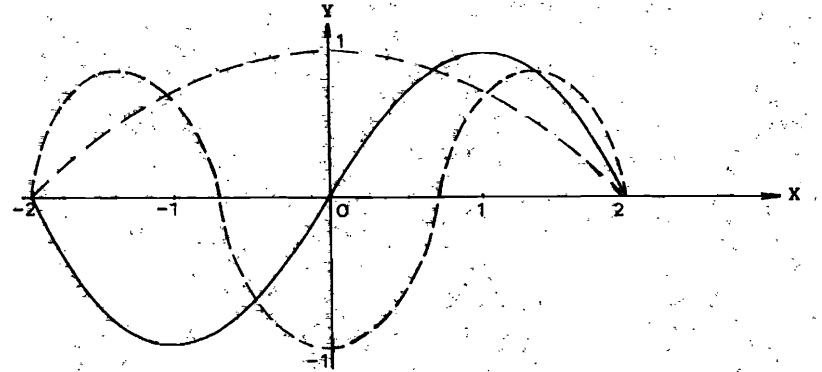


Рис. 4.

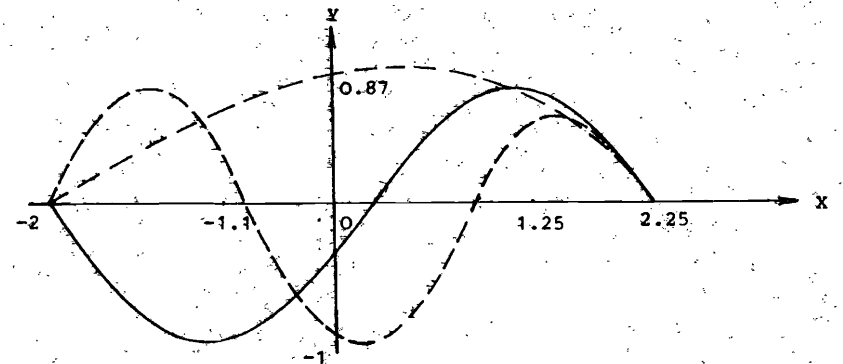


Рис. 5.

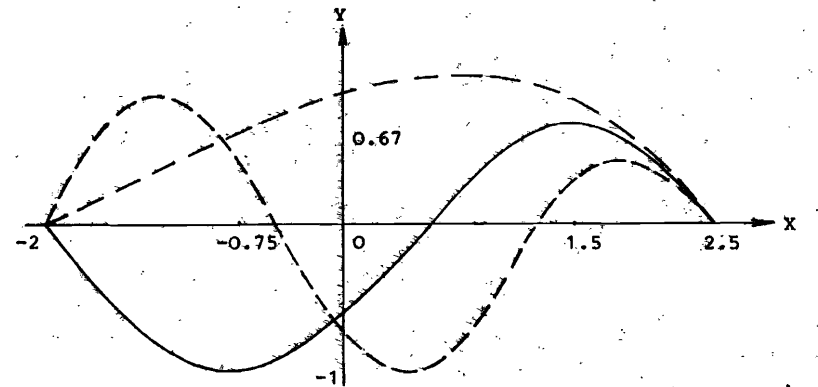


Рис. 6.

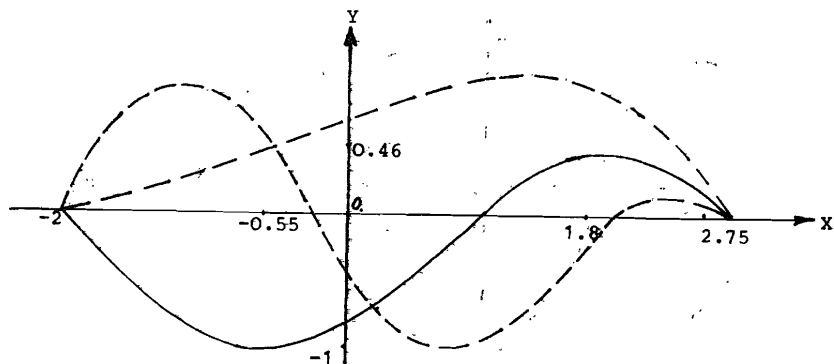


Рис.7

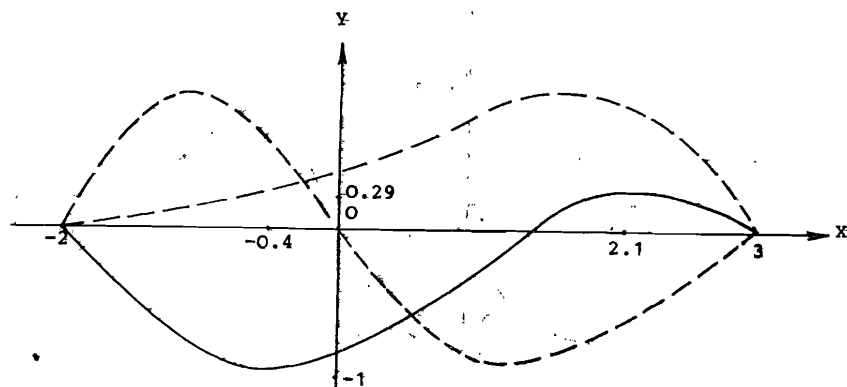


Рис.8

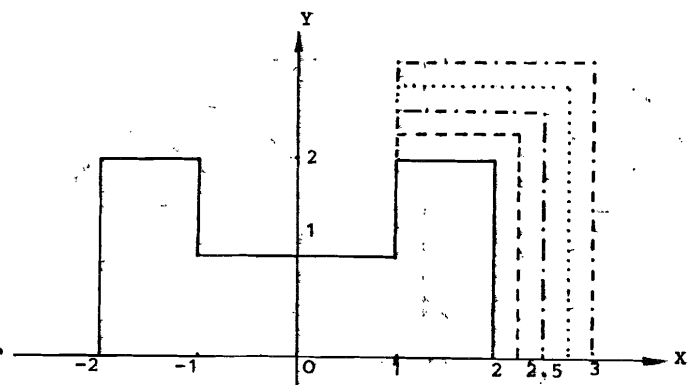


Рис.9. Симметричная часть расчетной области.

лись расчеты собственных значений k и сравнения результатов с расчетами по другим программам для L -образной области ^{/2/} (таблица 3) и для Γ -образной области ^{/14/} (рис.3, таблица 4). Из таблиц видно, что сходимость собственных значений по шагу дискретизации близка к линейной. В таблицах также приводятся результаты экстраполяции по Ричардсону.

При исследовании поведения пучка электронов в волноводе возникла необходимость анализа поведения собственных значений и собственных функций для n -образной области в зависимости от изменения параметров области (рис.9). Результаты расчетов приведены в таблице 5.

Графики значений волновых функций на оси ox изображены на рис.4-8. Для второй частоты на этих рисунках отмечены экстремальные точки и даны значения собственной функции в этих точках.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность О.И.Кудашеву за ряд ценных замечаний по изложению материала.

Литература

1. Halbach K., Holsinger R.F. SUPERFISH - a computer program for evaluation of RF cavities with cylindrical symmetry. Part. Accel., 1976, v.7, p.213-222.
2. Гаврилин А.В. Автоматизация решения задач электродинамики. Новосибирск, 1980 (Препринт ВЦ СО АН СССР, 268).
3. Касчиева В.А. и др. Пакет программ MULTIMODE для расчета спектров частот осесимметричных и продольно-однородных электромагнитных резонаторов методом конечных элементов. Препринт ИФВЭ 82-92, Серпухов, 1982.
4. Абрамов А.Г. и др. Пакет программ PRUD-0 для расчета ускоряющих структур. Препринт ИФВЭ 83-3, Серпухов, 1983.
5. Spielman B.E., Harrington R.F. Waveguides of arbitrary cross section by solution of nonlinear integral equation. IEEE Trans. 1972, v. MTT-20, No9, p.578-585.
6. Kleinman R.E., Wendland W.L. On Neumann's Method for the Exterior Neumann Problem for the Helmholtz Equation. J. Math. Anal. and Appl. v.57, 1977, p.170-172.
7. Аюпян В.П. и др. Решение спектральной задачи для уравнения Максвелла в случае цилиндрической симметрии методом граничных интегральных уравнений. ОИЯИ, ПИ-83-557, Дубна, 1983.
8. Иванов В.Я. и др. Применение метода интегральных уравнений для расчета ВЧ-резонаторов. Препринт ИЯФ СО АН СССР 83-59, Новосибирск, 1983.

9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. Наука, М., 1979.
10. Акишин П.Г., Пузынин И.В. ОИЯИ, 5-10992, Дубна, 1977.
11. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Наука, М., 1965.
12. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Наука, М., 1970.
13. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Мир, М., 1983.
14. Beaubien M.J., Wexler A. An accurate finite-difference method for higher waveguide modes. - IEEE Trans. , 1968, v. MTT-16, No 12, p. 1007-1017.
15. Григорьев А.Д. и др. Численный расчет электромагнитного поля в полых резонаторах и волноводах методами конечных разностей и конечных элементов. - Электронная техника. Серия: электроника СВЧ, 1978, вып.5, стр. 27-33.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 октября 1987 года.

Акишин П.Г., Акопян В.П., Жидков Е.П. P11-87-738
Решение двумерного уравнения Гельмгольца
методом граничных интегральных уравнений

Исследуются вопросы, возникающие при численном решении двумерного уравнения Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений. Для дискретизации уравнений используется метод коллокаций. Предлагается итерационный процесс решения дискретизованных уравнений, используется многосеточный алгоритм. Приводятся результаты численных расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G., Akopian V.P., Zhidkov E.P. P11-87-738
Solution of the Two-Dimensional Helmholtz
Equation by the Boundary Integral
Equation Method

Some problems arising in the process of numerical solution of the two-dimensional Helmholtz equation by the boundary integral equation method are investigated. The equations are discretized using the collocation method. The iterative process for solving the discretized equations is proposed. The problem is solved using an algorithm on a grid sequence. Numerical results are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Technique and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987