сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-87-732

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков, В.Д.Кравцов*

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОСТАТИКИ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

1987

Пусть $\vec{B}(\vec{x})$, $\vec{H}(\vec{x})$ и $\vec{M}(\vec{x})$ – соответственно индукция магнитного поля, напряженность и намагниченность в точке $\vec{x}$, $\vec{H}^S(\vec{x})$ – напряженность поля в отсутствие железа и G – область, занимаемая железом. Интегральная постановка задачи магнитостатики в трехмерном случае имеет вид [I]

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}) + \frac{\nabla\vec{a}}{4\pi}\left[\int_G \left(\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}\right) dV_{\vec{x}}\right], \qquad (\mathrm{I})$$

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0 \cdot \mu(|\vec{B}(\vec{x})|)}, \qquad (2)$$

$$\vec{M}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{H}(\vec{x}), \qquad (3)$$

где $\mu = \mu(|\vec{B}(\vec{x})|)$ – магнитная проницаемость, а μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

В случае двух измерений (I) редуцируется к следующему уравнению:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}) - \frac{\nabla\vec{a}}{2\pi}\left[\int_G \left(\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \ln|\vec{x} - \vec{a}|\right) dS_{\vec{x}}\right]. \qquad (4)$$

Векторы $\vec{H}$, $\vec{H}^S$, $\vec{M}$ и область G в (4) двумерные.

В [I] используется следующая дискретизация уравнения (I). Область G разбивается на подобласти $\{G_i\}$:

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i .$$

Мера пересечения $G_i \cap G_j$ равна нулю при $i \neq j$. В качестве точки наблюдения в каждом G_i используется $\vec{a}_i$ – центр тяжести G_i. $\vec{M}(\vec{x})$, $\vec{B}(\vec{x})$, $\vec{H}(\vec{x})$ в каждом G_i считаются постоянными и равными соответственно $\vec{M}_i$, $\vec{B}_i$, $\vec{H}_i$. Затем используется метод коллокаций

$$\vec{H}_i = \vec{H}^s(\vec{a}_i) + \frac{\nabla \vec{a}}{4\pi}\left[\sum_{j=1}^{N} \int_{G_j} \left(\vec{M}_j, \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right) dV_{\vec{x}}\right]\Bigg|_{\vec{a}=\vec{a}_i} \qquad (5)$$

Если в (5) точку наблюдения a_i заменить на интегрирование по области G_i, получается дискретизация, рассматриваемая в [2]:

$$\vec{H}_i \int_{G_i} dV_{\vec{a}} = \int_{G_i} \vec{H}^s(\vec{a})dV_{\vec{a}} + \int_{G_i} dV_{\vec{a}}\left(\frac{\nabla \vec{a}}{4\pi}\int_{G_i}\left(\vec{M}_j, \nabla_{\vec{a}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right)dV_{\vec{x}}\right), \qquad (6)$$

$$i=1,2,\dots,N.$$

Общим для дискретизаций (5) и (6) является использование кусочно-постоянных функций. Достоинством (5) является относительная простота вычисления коэффициентов системы дискретизованных уравнений. К числу недостатков (5) относится тот факт, что эту постановку нельзя обобщить на тип элементов, имеющий более высокий порядок гладкости, чем кусочно-постоянный (например, кусочно-линейный, кусочно-квадратичный и т.д.). При стремлении точки наблюдения к угловым точкам или точкам ребра границы интеграл в (5) стремится к бесконечности. К числу недостатков (6) необходимо отнести качественное усложнение вычисления коэффициентов матрицы за счет второго интегрирования. Дискретизация, аналогичная (6), использующая кусочно-линейные элементы для двумерных интегральных уравнений, рассматривалась в [3]. В данной работе сделана попытка совместить достоинства обоих подходов (5) и (6), т.е. при незначительном усложнении вычисления коэффициентов матрицы обобщить дискретизацию (5) на элементы более высокого порядка гладкости.

Рассмотрим интегральную постановку задачи магнитостатики в двумерном случае:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) + \nabla_{\vec{a}}\varphi(\vec{a}), \qquad (7)$$

$$\varphi(\vec{a}) = -\frac{1}{2\pi}\int_G (\vec{M}(\vec{x})\nabla_{\vec{a}} \ln|\vec{x}-\vec{a}|)dS_{\vec{x}}. \qquad (8)$$

Пусть G разбита на треугольники $\{S_i\}$:

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} S_i .$$

Разбиение удовлетворяет следующим условиям:

I . Мера пересечения S_i с S_j равна нулю при $i \neq j$.

2 . Вершины одного треугольника не могут быть внутренними точками сторон другого треугольника, т.е. если два треугольника касаются, то они касаются или только по одной вершине, или по целой стороне.

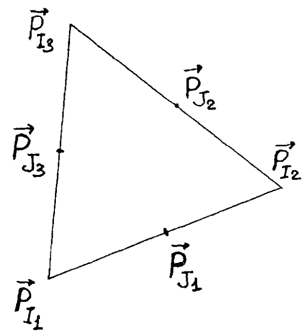
Пусть $\{\vec{P}_k,\ k=1,\dots,L\}$ – набор всех вершин треугольников. Пусть $f_k(\vec{x})$ – функция формы, ассоциированная с вершиной $\vec{P}_k$:

$$f_k(\vec{P}_\ell) = \begin{cases} 1, & k=\ell, \\ 0, & k\neq\ell. \end{cases} \qquad (9)$$

Функция $f_k(\vec{x})$ в каждом треугольнике линейна. Дополним набор $\{\vec{P}_k\}$ серединами всех ребер треугольников $\{S_i\}$ и введем квадратичные функции формы $g_k(\vec{x})$:

$$g_k(\vec{P}_\ell) = \begin{cases} 1, & k=\ell, \\ 0, & k\neq\ell. \end{cases} \qquad (10)$$

Функции $g_k(\vec{x})$ квадратичны по $\vec{x}$ и непрерывны на всем G . Функции $g_k(\vec{x})$ выражаются через $f_\ell(\vec{x})$ следующим образом:



$$g_{I_k}(\vec{x}) = f_{I_k}(\vec{x})\cdot(2f_{I_k}(\vec{x}) - 1), \quad k=1,2,3;$$

$$g_{J_1}(\vec{x}) = 4f_{I_1}(\vec{x})\cdot f_{I_2}(\vec{x}),$$

$$g_{J_2}(\vec{x}) = 4f_{I_2}(\vec{x})\cdot f_{I_3}(\vec{x}), \qquad (11)$$

$$g_{J_3}(\vec{x}) = 4f_{I_3}(\vec{x})\cdot f_{I_1}(\vec{x}).$$

Рис. I

Приблизим $\vec{M}(\vec{x})$ в (8) с помощью следующей вектор-функции:

$$\tilde{M}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{L} f_k(\vec{x})\cdot \vec{M}_k ,$$

где $\vec{M}_k = \vec{M}(\vec{P}_k)$. Аналогично приблизим напряженность и индукцию магнитного поля $\vec{H}(\vec{x})$ и $\vec{B}(\vec{x})$:

$$\tilde{H}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{L} f_k(\vec{x})\cdot \vec{H}_k ,$$

$$\tilde{B}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{L} f_k(\vec{x})\cdot \vec{B}_k ,$$

$\vec{M}_k$, $\vec{H}_k$ и $\vec{B}_k$ удовлетворяют условиям связи (2)-(3).

Введем обозначение:

$$\varphi_i = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_G (\tilde{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \ln|\vec{x}-\vec{a}|)\, dS_{\vec{x}} \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_i}, \quad i=1,2,\dots,LL; \tag{12}$$

где LL – суммарное число всех вершин и середин ребер треугольников $\{S_i\}$.

Предлагаемая дискретизация имеет следующий вид:

$$\int\limits_G \tilde{H}(\vec{x}) f_i(\vec{x})\, dS_{\vec{x}} = \int\limits_G \vec{H}^s(\vec{x}) f_i(\vec{x})\, dS_{\vec{x}} + \int\limits_G f_i(\vec{x}) \nabla_{\vec{x}} \left\{ \sum_{j=1}^{LL} \varphi_j g_j(\vec{x}) \right\}, \tag{13}$$

$i=1,2,\dots,L$.

Пусть $\hat{\varphi}$, $\hat{H}$, $\hat{H}^s$, $\hat{M}$, $\hat{B}$ есть

$$\hat{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{LL})^T,$$

$$\hat{H} = (\vec{H}_1, \vec{H}_2, \dots, \vec{H}_L)^T,$$

$$\hat{H}^s = \left(\int\limits_G \vec{H}^s(\vec{x}) f_1(\vec{x})\, dS_{\vec{x}}, \dots, \int\limits_G \vec{H}^s(\vec{x}) \cdot f_L(\vec{x})\, dS_{\vec{x}}\right),$$

$$\hat{M} = (\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_L)^T,$$

$$\hat{B} = (\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_L).$$

Используя введенные обозначения, (12) можно записать в виде

$$\hat{\varphi} = [D_1]\, \hat{M}, \tag{14}$$

где $[D_1]$ – прямоугольная матрица размерности $LL \times 2L$.

Аналогично (13) можно записать в виде

$$[C]\,\hat{H} = \hat{H}^s + [D_2]\, \hat{\varphi}, \tag{15}$$

где $[D_2]$ – прямоугольная матрица размерности $2L \times LL$, а $[C]$ – матрица размерности $2L \times 2L$ вида

$$[C] = \begin{pmatrix} [C_{11}] & \dots\dots & [C_{1L}] \\ [C_{L1}] & \dots\dots & [C_{LL}] \end{pmatrix},$$

где $[C_{ij}]$ есть диагональные матрицы размера 2x2 типа

$$[C_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int\limits_G f_i(\vec{x}) \cdot f_j(\vec{x})\, dS_{\vec{x}}.$$

Подставляя (14) в (15) и добавляя к обеим частям $[C]\,\hat{M}$, получаем

$$\frac{1}{\mu_0}[C]\hat{B} = \hat{H}^s + ([A] + [C])\hat{M}, \tag{16}$$

где $[A] = [D_2] \cdot [D_1]$.

$\hat{M}$ в (16) нелинейным образом зависит от $\hat{B}$.

Рассмотрим подробнее структуру матрицы $[D_2]$:

$$[D_2] = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11} & \dots\dots & \hat{D}_{1LL} \\ \vdots & & \\ \hat{D}_{L1} & \dots\dots & \hat{D}_{LLL} \end{pmatrix},$$

где $\hat{D}_{ij}$ – вектор размерности:

$$\hat{D}_{ij} = \int\limits_G f_i(\vec{x})\, \nabla_{\vec{x}} g_j(\vec{x})\, dS_{\vec{x}}.$$

В случае, когда либо $\vec{P}_i$, либо $\vec{P}_j$ являются внутренними вершинами разбиения, $\hat{D}_{ij}$ тождественно равно нулю. Действительно,

$$\int\limits_G f_i(\vec{x}) \nabla g_j(\vec{x})\, dS_{\vec{x}} = \int\limits_G \nabla (f_i(\vec{x}) \cdot g_j(\vec{x}))\, dS_{\vec{x}} - \int\limits_G g_j(\vec{x}) \cdot \nabla f_i(\vec{x})\, dS_{\vec{x}}. \tag{17}$$

По формуле Грина

$$\int\limits_G \nabla (f_i(\vec{x}) \cdot g_j(\vec{x}))\, dS_{\vec{x}} = \oint\limits_{\partial G} \vec{n}(\vec{x}) \cdot f_i(\vec{x}) \cdot g_j(\vec{x}) \cdot d\ell_{\vec{x}} = 0.$$

На каждом треугольнике выражение $\nabla f_i(\vec{x})$ есть константа и его можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_G g_j(\vec{x}) \nabla f_i(\vec{x})\, dS_{\vec{x}} = \sum_{k=1}^{N} \vec{Z}_k \int\limits_{S_k} g_j(\vec{x})\, dS_{\vec{x}}, \tag{18}$$

где $\vec{Z}_k = \nabla f_i(\vec{x}) \Big|_{\vec{x} \in S_k}$.

Из (I8) следует высказанное утверждение. Практически это означает, что φ_i необходимо знать только на границе и в серединах внутренних ребер, что позволяет существенно сократить вычисления.

Для решения нелинейной дискретизованной системы использовался следующий итерационный процесс[3]:

$$[C]\,\hat{B}_{k+1} = \hat{H}^s + ([A] + [C])\hat{M}_k ,$$

$$k=0,1,2,\ldots\ldots;\hat{B}_0 = \hat{H}^s .$$

Процесс считается завершенным, если относительная невязка $R_k = \frac{\|\hat{B}^{k+1}-\hat{B}^k\|}{\|\hat{B}^{k+1}\|}$ становится меньше наперед заданной величины.

На основе данной методики создан комплекс программ расчета двумерных магнитостатических полей, в котором используется кусочно-линейная аппроксимация намагниченности. Тестирование комплекса проводилось на примере задачи, имеющей точное аналитическое решение: бесконечный цилиндр с $\mu =$ const в поперечном однородном магнитном поле. При этом полученные результаты находятся в согласии с теоретическими с относительной ошибкой 10^{-4} при использовании сетки из I5 элементов. Время, затраченное на формирование матрицы, решение итерационного процесса и пересчет поля в 20-ти точках, составило 7 секунд центрального процессора CDC-6500 .

Для проверки работы комплекса в реальных условиях нелинейности ферромагнетика был произведен расчет основной гармоники поля в дипольном магните нуклотрона СПИН [5]. Приведенные в таблице значения основной гармоники показывают удовлетворительное согласие с результатом, полученным с помощью комплекса из[4] и равным Ø.2753 Тл.

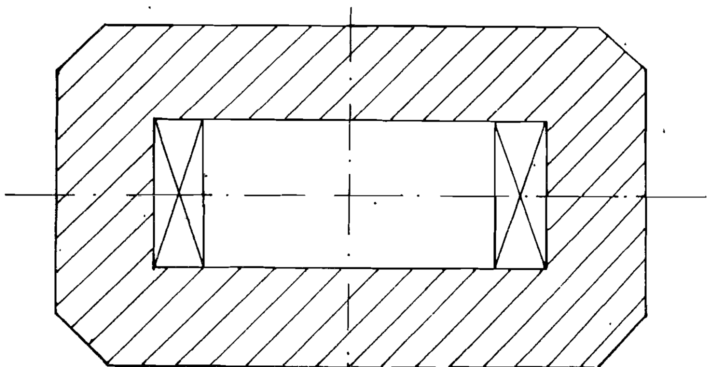


Рис.2

Дипольный магнит нуклотрона СПИН.

Таблица

Число элементов	c_1 (Тесла)	CPTIME (c.)
I0	.2748	2I.6
40	.2745	I20.
I60	.2758	842.4

Литература

I. Trowbridge G.W. et al. GFUN3D User Guide, RL-76-029/A .

2. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, II-83-427, Дубна, I983.

3. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, PII-84-799, Дубна, I984.

4. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. ОИЯИ, PII-86-534, Дубна, I986.

5. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, PII-86-80, Дубна, I986.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 октября I987 года.

Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д.

P11-87-732

Решение двумерных интегральных уравнений магнитостатики в случае линейной аппроксимации намагниченности

Рассматривается решение двумерных интегральных уравнений магнитостатики с использованием кусочно-линейной аппроксимации намагниченности. Предложен приближенный метод вычисления коэффициентов матрицы дискретизованных уравнений. Создан комплекс фортранных программ, реализующий данную методику. Приводятся результаты тестовых расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G., Zhidkov E.P., Kravtsov V.D.

P11-87-732

Solution of Two-Dimensional Integral Magnetostical Equations Using Linear Approximation of Magnetization

Solution of the two-dimensional integral magnetostatical equations with using the piecewise linear approximation is considered. The approximated method for calculating the matrix coefficients of the discretized equations is proposed. A set of FORTRAN programs realizing this method is created. The results of test calculations are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987