

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

ЖС 306

P11-87-722

Т.Жанлав, И.В.Пузынин

ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ
В МЕТОДЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

1987

I. Введение

В настоящей работе рассматривается построение вычислительных схем для решения нелинейного параболического уравнения относительно функции $u(x, t)$, $0 < x < l$, $0 < t < \infty$

$$u_t = u_{xx} - f(x, u, u_x) \quad (I.1)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (I.2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(0) = u_0(l) = 0. \quad (I.3)$$

Для вывода вычислительных схем используется метод сплайн-коллокации^{/1/}.

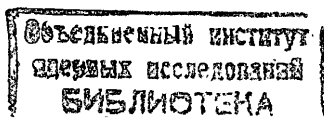
Задача (I.1)-(I.3) в методах инвариантного погружения является сопутствующей^{/2/} для стационарной граничной задачи относительно функции $y(x)$, $0 < x < l$

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (I.4)$$

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (I.5)$$

При определенных условиях (например, ^{/3/}) решение задачи (I.1)-(I.3) стабилизируется ($u_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) и сходится ($u(x, t) \rightarrow y(x)$ при $t \rightarrow \infty$) к решению стационарной задачи (I.4)-(I.5). В данном случае метод решения эволюционной задачи (I.1)-(I.3) становится одновременно и методом решения стационарной граничной задачи. Метод стабилизации (установления) широко применяется при численном решении стационарных задач^{/2, 4/}. В этом подходе зачастую удается преодолеть трудности, связанные с нелинейностью задач, за счет применения подходящих вычислительных схем, приводящих к линейным задачам. Для линейных же задач дискретная аппроксимация развита достаточно хорошо.

Задачи (I.1)-(I.3) и (I.4)-(I.5) имеют самостоятельное значение в различных математических моделях физики (например, ^{/5, 6/}). Интересно отметить связь этих задач, проявляющуюся через ограничения общего вида на нелинейные части уравнений, которые обеспечивают как суму стабилизацию решения задачи (I.1)-(I.3), так и существование и един-



ственность решений рассматриваемых задач. Так, следуя работам^{/3/}, можно показать, что при непрерывности функции $f(x, u, v)$ и ее производных f_u и f_v в области $R = \{0 \leq x \leq \ell, -\infty < u, v < \infty\}$ условие

$$\inf_R (f_u) \geq \delta > 0 \quad (I.6)$$

достаточно для стабилизации решения задачи (I.1)–(I.3). С другой стороны, известно,^{/7/} что эти же условия обеспечивают существование единственного решения граничной задачи (I.4)–(I.5). В дальнейших теоретических рассуждениях будет использоваться предположение о существовании и единственности решений изучаемых задач.

Одним из возможных подходов к решению граничной задачи (I.4)–(I.5) является использование непрерывного аналога метода Ньютона^{/6/}. В то же время этот же процесс можно осуществить и в методе стабилизации при решении нелинейных задач, возникающих на каждом временном слое. При этом следует ожидать расширения возможностей полученных неявных вычислительных схем по сравнению с явными, где линейаризация достигается за счет отнесения нелинейности на предыдущий временной слой. Кроме того, возникает связь между ньютоновской итерационной схемой решения стационарной задачи (I.4)–(I.5)^{/6/} и схемой решения задачи (I.1)–(I.3) с использованием непрерывного аналога метода Ньютона в случае стабилизации. Эти вопросы также изучаются в данной работе. Здесь рассматриваются простейшие однородные граничные условия (I.2) и (I.5). Однако полученные результаты легко распространить и на общий случай линейных граничных условий.

2. Численные схемы

В полуполосе $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t < \infty\}$ введем сетку $\Delta = \Delta_N \times \Delta_\tau$, $\Delta_\tau : t_n = n\tau, \tau > 0, n = 0, 1, \dots$,

$$\Delta_N : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \ell, h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Приближенное решение задачи (I.1)–(I.3) при каждом фиксированном t ищется в виде кубического сплайна $S(x, t)$ класса $C^2[0, \ell]$ по переменной x с узлами на сетке Δ_N . Нами будет использовано B -представление сплайнов, для чего сетка Δ_N дополняется узлами

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0, x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}.$$

Их можно выбрать следующим образом:

$$x_{-i} = x_0 - ih_0, x_{N+i} = x_N + ih_{N-1}, i = 1, 2, 3.$$

Сплайн $S(x, t)$ представляется в виде

$$S(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j(t) \cdot B_j(x), \quad (2.1)$$

где $B_j(x)$ – нормализованные кубические B -сплайны^{/1/}. После дискретизации по t рассматриваются две схемы

$$\frac{S^{n+1} - S^n}{\tau} = S^{n+1} - f(x, S^n, S'^n), \quad (2.2)$$

$$\frac{S^{n+1} - S^n}{\tau} = S^{n+1} - f(x, S^{n+1}, S'^{n+1}) \quad (2.3)$$

с соответствующими краевыми и начальными условиями

$$S_0^n = S_N^n = 0, \quad (2.4)$$

$$S'_k(x) \approx u_0(x). \quad (2.5)$$

Обе схемы имеют одинаковый по t порядок аппроксимации $O(\tau)$. Схема (2.2) линейна относительно S^{n+1} . Значения функции S^{n+1} находятся по известным значениям S^n, S'^n после выбора точек коллокации относительно аргумента с помощью метода прогонки. Обычно в качестве точек коллокации берутся узлы сплайна. В этом случае нетрудно видеть, что прогонка устойчива, если

$$1 - \frac{6\tau}{h_i^2} \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.6)$$

Схема (2.3) нелинейна относительно S^{n+1} , и для нахождения ее решения можно использовать непрерывный аналог метода Ньютона^{/6/}. На каждом временном шаге получаем следующий итерационный процесс:

$$U_k^n - f_{u_1}(x, S_k^n, S_k'^{n+1}) U_k^n - \left(\frac{1}{\tau} + f_u(x, S_k^n, S_k'^{n+1})\right) U_k^n = \varrho_k^{n+1}, \quad (2.7)$$

$$\varrho_k^n = (S_k^n - S^n)/\tau - S_k^n + f(x, S_k^n, S_k'^{n+1}),$$

$$S_{k+1}^{n+1} = S_k^{n+1} + \bar{b}_k U_k^n, \quad S_0^{n+1} = S^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.8)$$

где \bar{b}_k – итерационные параметры, k – номер итерации. Очевидно, что U_k^n – тоже кубический сплайн класса $C^2[0, \ell]$. Пусть $0 < \bar{b}_k < 1$. Задача (2.7) с краевыми условиями

$$U_k^n(0) = U_k^n(\ell) = 0 \quad (2.9)$$

после выбора точек коллокации (обычно они совпадают с узлами сплайна) решается методом прогонки. После определения итерационной поправки U_k^n следующее приближение найдется по формуле (2.8). Очевидно, что в силу (2.9), все S_k^{n+1} удовлетворяют краевым условиям (2.4). Итерации прекращаются при выполнении условия

$$\max_{0 \leq i \leq N} |U_k^n(\bar{x}_i)| \leq \bar{\varepsilon}, \quad (2.10)$$

где $\bar{\varepsilon} > 0$ — достаточно малое число, \bar{x}_i — точки коллокации. При переходе от данного слоя к следующему в качестве начального условия итерации берется вычисленное значение S^n . В качестве начальной функции S^0 можно взять либо интерполяционный кубический сплайн, либо локально-аппроксимационный кубический сплайн, удовлетворяющий условиям

$$S^0(x_i) = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, N-1, N.$$

В случае, когда речь идет о приближенном нахождении стабилизирующего решения задачи (I.1)–(I.2), процесс вычисления по времени прекращается при выполнении условия

$$\max_{0 \leq i \leq N} \frac{|S_i^{n+1} - S_i^n|}{\tau} \leq \varepsilon, \quad (2.11)$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Применение непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) для задачи (I.4)–(I.5) дает последовательность итераций

$$u_k'' - f_{u''}(x, y_k, y_k') u_k' - f_u(x, y_k, y_k') u_k = -[y_k'' - f(x, y_k, y_k')], \quad (2.12)$$

$$y_{k+1} = y_k + \tau u_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

В то же время уравнение (2.7) можно представить в виде

$$u_k'' - f_{u''}(x, S_k^{n+1}, S_k^{n+1}') u_k' - f_u(x, S_k^{n+1}, S_k^{n+1}') u_k = -[S_k^{n+1} - f(x, S_k^{n+1}, S_k^{n+1}')] + \left(\frac{1}{\tau} u_k + \frac{S_k^{n+1} - S_k^n}{\tau}\right),$$

которое отличается от первого уравнения системы (2.12) лишь последним слагаемым в правой части. В случае сходимости итерационного процесса и стабилизации решений оно является достаточно малым в силу условий (2.10) и (2.11). Таким образом, в этом случае НАМН для задач (I.1)–(I.3) и (I.4)–(I.5) дает асимптотически ($t \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$) одинаковые результаты. Однако итерационную схему НАМН для задачи (I.1)–(I.3) можно рассматривать и как самостоятельный алгоритм решения нелинейных параболических задач. С этой точки зрения проявляется преимущество нашего подхода перед схемой типа (2.12).

3. Сходимость приближенного решения

Сходимость итераций (2.7)–(2.8), как показано ниже, имеет место при некоторых ограничениях относительно функции $f(x, y, y')$.

А именно справедлива

Теорема I. Пусть функция $f(x, y, y')$ имеет непрерывные производные по всем аргументам до второго порядка включительно. Предположим, что выполнены условия:

I. Краевая задача

$$v'' - f_{y''}(x, y, y') v' - (c + f_y(x, y, y')) v = 0, \quad v(0) = v(1) = 0 \quad (3.1)$$

имеет только тривиальное решение для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$, удовлетворяющей краевому условию (I.2). Здесь c — любое положительное число.

$$2. \left. \begin{aligned} f_{uu} \cdot f_{u'u'} - (f_{uu'})^2 &\geq 0, \\ f_{uu} + f_{u'u'} &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Тогда функциональная последовательность $\{S_k^{n+1}\}$, определяемая формулой (2.8), при каждом фиксированном n равномерно сходится к решению задачи (2.3)–(2.5). Скорость сходимости итераций (2.7), (2.8) характеризуется соотношением

$$|S_k^{n+1} - S_k^n| \leq M \cdot q_k \cdot |S_k^n - f(x, S_k^n, S_k^{n'})|, \quad (3.3)$$

$$0 < M < \infty, \quad q_k = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \sigma_i).$$

Доказательство. Уравнение (2.7), используя (2.8) и обозначение

$$z_k^{n+1} = (S_k^{n+1} - S_k^n) / \tau - S_k^{n+1} + f(x, S_k^{n+1}, S_k^{n+1}'),$$

можно записать в виде

$$z_k^{n+1} = (1 - \sigma_{k-1}) z_{k-1}^{n+1} + \frac{\sigma_{k-1}^2}{2} \{ \tilde{f}_{uu} \cdot u_{k-1}^2 + 2 \tilde{f}_{u'u'} u_{k-1}' + \tilde{f}_{u'u'} \cdot u_{k-1}'^2 \}, \quad (3.4)$$

Если ввести матрицу F_{nk} и вектор w_k формулами

$$F_{nk} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{uu} & \tilde{f}_{u'u'} \\ \tilde{f}_{u'u'} & \tilde{f}_{u'u'} \end{pmatrix}, \quad w_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_k' \end{pmatrix},$$

то (3.4) записывается в виде

$$z_k^{n+1} = (1 - \sigma_{k-1}) z_{k-1}^{n+1} + \frac{\sigma_{k-1}^2}{2} (F_{nk} w_{k-1}, w_{k-1}). \quad (3.5)$$

В силу условий (3.2) собственные значения симметричной матрицы F_{nk} неположительны, и, следовательно, матрица F_{nk} неположительна, т.е. для любого вектора w имеем $(F_{nk} w, w) \leq 0$. Следовательно, из (3.5) непосредственно вытекает неравенство

$$z_k^{n+1} \leq q_k \cdot z_0^{n+1}. \quad (3.6)$$

Отсюда ясно, что $\hat{\varepsilon}_k^n \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$|\hat{\varepsilon}_m^{n+1}| \leq \varepsilon \quad \text{для всех } m \geq N.$$

Для натурального числа $p = 1, 2$, рассмотрим разность

$$S_{m+p}^{n+1} - S_m^{n+1}. \quad \text{Нетрудно видеть, что она удовлетворяет уравнению}$$

$$(S_{m+p}^{n+1} - S_m^{n+1}) - \tilde{f}_{u'}(S_{m+p}^{n+1} - S_m^{n+1}) - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \tilde{f}_u\right)(S_{m+p}^{n+1} - S_m^{n+1}) = \hat{\varepsilon}_m^{n+1} - \hat{\varepsilon}_{m+p}^{n+1} \quad (3.7)$$

с однородными краевыми условиями. Здесь $\tilde{f}_{u'}$, \tilde{f}_u - значения функций $f_{u'}$, f_u в некоторой промежуточной точке. Согласно первому условию теоремы задача (3.7) имеет единственное решение и для него верна оценка

$$|S_{m+p}^{n+1} - S_m^{n+1}| \leq M(|\hat{\varepsilon}_{m+p}^{n+1}| + |\hat{\varepsilon}_m^{n+1}|) \leq \tilde{\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Ясно, что для всех $m \geq N$ величина $\tilde{\varepsilon}$ является сколь угодно малой. Значит, по критерию Коши последовательность $\{S_k^{n+1}\}$ равномерно сходится, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^{n+1} = S_*^{n+1}.$$

С другой стороны, обозначим разность $S^{n+1} - S_k^{n+1}$ через Ω_k . Тогда нетрудно проверить, что Ω_k удовлетворяет условиям

$$\Omega_k'' - \tilde{f}_{u'} \Omega_k' - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \tilde{f}_u\right) \Omega_k = \hat{\varepsilon}_k^{n+1}$$

$$\Omega_k(0) = \Omega_k(e) = 0.$$

Отсюда, как и выше, получаем оценку

$$|\Omega_k| = |S^{n+1} - S_k^{n+1}| \leq M \cdot |\hat{\varepsilon}_k^{n+1}| \leq M \cdot q_k \cdot |S'' - f(x, S^n, S'^n)|,$$

т.е. $S_k^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ при $k \rightarrow \infty$.

В силу единственности предела имеем $S_*^{n+1} = S^{n+1}$.

Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Первое условие теоремы I выполнено, если имеет место (I.6). Более точно, оно выполнено, если $c + f_u \geq 0$. Поскольку для итерации (2.7), $c = 1/\tau$, то задача (3.1) разрешима и имеет только тривиальное решение хотя бы для достаточно малого τ . Если функция $f(x, y, y')$ не зависит от производной (решения y), то второе условие теоремы I выполнено при ограничении $f_{uu} < 0$ ($f_{u'u'} < 0$).

Замечание 2. Из оценки (3.3) видно, что в случае стабилизации по мере убывания величины $S'' - f(x, S^n, S'^n)$ сокращается число итераций K с ростом n .

Замечание 3. Используя условия теоремы I и неравенство (3.6), можно получить неравенство

$$|U_k^n| \leq M \cdot q_k \cdot |S'' - f(x, S^n, S'^n)|$$

для оценки необходимого числа итераций при достижении заданной точности (2.10).

Предположим, что решение задачи (I.4)-(I.5) принадлежит $C^2 W_\infty^4[0, e]$. Скорость стабилизации приближенного решения S^n характеризует следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (I.6) и итерационный процесс (2.7)-(2.8) сходится при любом фиксированном n . Тогда скорость стабилизации приближенного решения характеризуется соотношением

$$\|S^n - y\|_{C(\Delta_n)} \leq q^n \|S^0 - y\|_{C(\Delta_n)} + O(h^2), \quad (3.9)$$

где

$$q = \frac{1}{1 + \tau \delta} < 1, \quad \|y\|_{C(\Delta_n)} = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|, \quad y_i = y(x_i).$$

Доказательство. Пусть \bar{S} - интерполяционный кубический сплайн для решения y , удовлетворяющий одному из краевых условий типа I-IV/I. Используем неравенство

$$\|S^n - y\| \leq \|S^n - \bar{S}\| + \|\bar{S} - y\|. \quad (3.10)$$

Так как по предположению $y \in C^2 W_\infty^4[0, e]$, то справедливы соотношения

$$\bar{S} - y = O(h^4) \quad (3.11)$$

$$\bar{S}'' - f(x, \bar{S}, \bar{S}') = O(h^2), \quad h = \max h_i, \quad (3.12)$$

которые верны для всех $x \in [0, e]$. Поэтому из (3.10) ясно, что достаточно оценить величину $\theta^n = S^n - \bar{S}$. Используя (2.3) и (3.12), легко показать, что θ^n удовлетворяет уравнению

$$\theta''^{n+1} - \tilde{f}_{u'} \theta'^{n+1} - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \tilde{f}_u\right) \theta^{n+1} = -\frac{1}{\varepsilon} \theta^n + O(h^2) \quad (3.13)$$

с краевым условием

$$\theta_0^n = \theta_N^n = 0. \quad (3.14)$$

Чтобы найти решение задачи (3.13)-(3.14), принадлежащее $C^2 W_\infty^4[0, e]$, достаточно рассматривать уравнение (3.13) в узлах сетки Δ_n . При этом решение ищется в виде

$$\theta^n = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j^n B_j(x). \quad (3.15)$$

После подстановки (3.15) в уравнение (3.13) получаем уравнения для коэффициентов α_j^{n+1}

$$A_i \alpha_{i-1}^{n+1} - C_i \alpha_i^{n+1} + B_i \alpha_{i+1}^{n+1} = -\frac{h_i + h_{i-1}}{6\tau} \theta_i^n + O(h^3), \quad (3.16)$$

$$i = 0, 1, \dots, N,$$

$$A_i = \frac{1}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i} \left[1 + \frac{h_i}{2} \tilde{f}'_{u'} - \frac{h_i^2}{6} \cdot \frac{1 + \tau \tilde{f}'_{u'}}{\tau} \right],$$

$$B_i = \frac{1}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} \left[1 - \frac{h_{i-1}}{2} \tilde{f}'_{u'} - \frac{h_{i-1}^2}{6} \cdot \frac{1 + \tau \tilde{f}'_{u'}}{\tau} \right],$$

$$C_i = A_i + B_i + \frac{h_i + h_{i-1}}{6} \cdot \frac{1 + \tau \tilde{f}'_{u'}}{\tau}.$$

(3.17)

С помощью краевых условий (3.14) исключаются α_{-1}^{n+1} , α_{N+1}^{n+1} из уравнений (3.16) соответственно при $i=0$ и $i=N$. В результате имеем систему

$$\tilde{C}_0 \alpha_0^{n+1} + \tilde{B}_0 \alpha_1^{n+1} = O(h^4),$$

(3.18)

$$A_i \alpha_{i-1}^{n+1} - C_i \alpha_i^{n+1} + B_i \alpha_{i+1}^{n+1} = -\frac{h_i + h_{i-1}}{6\tau} \beta_i^n + O(h^3), i=1, \dots, N-1,$$

$$\tilde{A}_N \alpha_{N-1}^{n+1} + \tilde{C}_N \alpha_N^{n+1} = O(h^4),$$

где

$$\tilde{C}_0 = \frac{2(2h_0 + h_1)}{h_0} + (h_0 + h_1) \tilde{f}'_{u'}, \quad \tilde{B}_0 = h_0 \tilde{f}'_{u'},$$

(3.19)

$$\tilde{A}_N = -h_{N-1} \tilde{f}'_{u'}, \quad \tilde{C}_N = \frac{2(2h_{N-1} + h_{N-2})}{h_{N-1}} - (h_{N-1} + h_{N-2}) \tilde{f}'_{u'}.$$

Матрица системы (3.18) обладает диагональным преобладанием при условиях

$$1 + \frac{h_i}{2} \tilde{f}'_{u'} - \frac{h_i^2}{6} \cdot \frac{1 + \tau \tilde{f}'_{u'}}{\tau} \geq 0, \quad 1 - \frac{h_{i-1}}{2} \tilde{f}'_{u'} - \frac{h_{i-1}^2}{6} \cdot \frac{1 + \tau \tilde{f}'_{u'}}{\tau} \geq 0,$$

(3.20)

которые имеют место для достаточно малого h и $h^2 \ll \tau$. Применяя известную технику оценки решения [1] для системы (3.18), получаем оценку

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\alpha_i^n| \leq q^n \cdot \max_{0 \leq i \leq N} |\alpha_i^0| + O(h^2).$$

(3.21)

Если учесть, что

$$\alpha_i^0 = S_i^0 - \bar{S}_i - \frac{h_i h_{i-1}}{6} (S_i^{n0} - \bar{S}^n)_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} (S_i^0 - \bar{S}^1)_i,$$

$$|S^n - \bar{S}| \leq \max_{0 \leq i \leq N} |\alpha_i^n|, \quad x \in [x_1, x_{N-1}],$$

то из (3.21) легко переходим к оценке

$$\|S^n - \bar{S}\|_{C(\Delta_N)} \leq q^n \cdot \|S^0 - y\|_{C(\Delta_N)} + O(h^2).$$

(3.22)

Окончательная оценка (3.9) следует из неравенства (3.10) с учетом оценок (3.11) и (3.22). Теорема доказана.

Замечание 4. Оценка (3.9) получена в сеточной норме $C(\Delta_N)$.

Если использовать кусочно-многочленное представление сплайна θ^n , то легко получается оценка

$$\|\theta^n\|_C \leq \|\theta^n\|_{C(\Delta_N)} + O(h^2),$$

и тем самым имеем

$$\|S^n - y\|_C \leq q^n \cdot \|S^0 - y\|_C + O(h^2),$$

(3.23)

где

$$\|y\|_C = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|.$$

Замечание 5. Выше рассматривалось только первое (однородное)

краевое условие. Однако нетрудно видеть, что все утверждения остаются в силе не только для неоднородного первого краевого условия, но и для краевых условий общего вида

$$\alpha_1 y(a) - \beta_1 y'(a) = \gamma_1,$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 \geq 0,$$

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, \quad i = 1, 2.$$

Для U_k ставятся аналогичные краевые условия с $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Выше мы заметили, что схему (2.3) можно рассматривать как приближенный метод решения параболических задач. Теперь ее рассмотрим с этой точки зрения. Прежде всего, отметим, что в этом случае алгоритм (2.7)-(2.8) остается в силе. Единственным отличием является то, что в параболических задачах обычно задаются условия

$$u(0, t) = \gamma_1(t), \quad u(b, t) = \gamma_2(t).$$

(3.24)

Тогда изменятся краевые условия и для итерационных поправок. Для того чтобы S_{k+1}^{n+1} удовлетворял краевому условию (3.24), достаточно требовать, чтобы

$$U_0^n(0, t) = \frac{\gamma_1(t_{n+1}) - \gamma_1(t_n)}{\sigma_0}, \quad U_0^n(b, t) = \frac{\gamma_2(t_{n+1}) - \gamma_2(t_n)}{\sigma_0},$$

$$U_k^n(0, t) = U_k^n(b, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

(3.25)

Кроме этого, снимается условие (2.11). Предположим, что при фиксированных t решение параболической задачи принадлежит классу $C^2 W_{\infty}^m [0, b]$ и имеет ограниченные производные по t до второго порядка включительно.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (1.6), (3.20) и итерационный процесс (2.7)-(2.8) сходится при любом фиксированном n . Тогда имеет место

$$\|S^n - u^n\|_C = O(\tau + h^2),$$

(3.26)

где

$$u^n = u(x, t_n), \quad t_n = n\tau.$$

Доказательство. Пусть \bar{S}^n - интерполяционный кубический сплайн для решения u^n , удовлетворяющий одному из краевых условий типа I-IV/I. Тогда легко можно показать, что

$$(\bar{S}^{n+1} - \bar{S}^n) / \tau = \bar{S}^{n+1} f(x, \bar{S}^{n+1}, \bar{S}^{n+1}) + O(\tau + h^2).$$

Если обозначить через θ^n разность $S^n - \bar{S}^n$, то повторяется доказательство теоремы 2 с единственным отличием, что вместо величин $O(h^4)$ будут стоять величины $O(\tau + h^2)$. Таким образом, получаем оценку

$$\|S^n - u^n\|_C \leq \varrho^n \cdot \|S^0 - u_0\|_C + O(\tau + h^2). \quad (3.27)$$

В параболических задачах задается начальное условие (I.6), поэтому в качестве S^0 можно взять интерполяционный кубический сплайн или локальный сплайн для u_0^0 , и поэтому для достаточно гладкой начальной функции имеет место оценка

$$\|S^0 - u_0\|_C = O(h^4).$$

Следовательно, из оценки (3.27) следует (3.26).

4. Численные эксперименты

Рассматривается несколько примеров, для которых были сделаны численные расчеты. В первых двух примерах дается сравнение эффективности схем (2.2) и (2.3). На третьем примере детально опробована схема (2.3). Параболические задачи, соответствующие примерам I и 3, решены с помощью схемы (2.3) или (2.7)-(2.8). Все теоретические выводы относительно порядка сходимости приближенного решения подтверждаются численными расчетами. В качестве алгоритма численного решения схем (2.2) и (2.3) был взят метод сплайн-коллокации^{I/}. Итерационные параметры b_k в схеме (2.7)-(2.8) выбраны $b_k = 1$. Ниже в таблицах I-5 используются обозначения

$$\varepsilon_1^z = \max_{0 \leq i \leq N} |S_i^{n(z)} - y_i^{(z)}|, \quad y_i = y(x_i), \quad z = 0, 1, 2,$$

n - число слоев, на котором вычислены все величины $\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_1''$,
 k - общее количество итераций для схемы (2.7)-(2.8). Вычисления прекращаются, когда выполнены условия (2.I0) и (2.II), в которых полагались $\bar{\varepsilon} = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Пример I.

$$y'' = \frac{y^2 - y'^2}{2(1-x)e^{x(x-1)} + (x-1)^2 + 1} + (4x^2 - 6x + 3)e^{x(x-1)} - x^2 - 2x, \quad (4.1)$$

$$(y - y')_{x=0} = 4, \quad y'(1) = 3.$$

Точное решение задачи (4.1) суть $y(x) = e^{x(x-1)} + x^2 + 2$. В качестве начальной функции была взята $u_0(x) = 3x^2 - 3x + 1$. В таблицах I и 2 приведены результаты, полученные по схемам (2.2) и (2.7)-(2.8) соответственно для задачи (4.1).

Из таблицы I видно, что схема (2.2) сильно чувствительна к шагу τ . Схема (2.3) является абсолютно устойчивой и не зависит от выбора τ , как это следует из таблицы 2. Отметим, что итерации по k делаются только на первом слое в схеме (2.7)-(2.8), и в дальнейшем задача (2.7) решается один-два раза. Для стабилизации решения нас интересует более крупный шаг τ по сравнению с шагом h . С этой точки зрения, как видно из таблицы 2, предпочтительней схема (2.7)-(2.8).

Таблица I

h	τ	n	ε_1	ε_1'	ε_1''
0,1	0,1	27	0,266740-02*	0,242058-02	0,199189-01
0,05			0,669014-03	0,608511-03	0,502150-02
0,025			0,167561-03	0,152379-03	0,125815-02
0,0125			0,419408-04	0,381480-04	0,314795-03
0,1	0,5	16	0,266734-02	0,242053-02	0,199173-01
0,05			0,669332-03	0,608426-03	0,502120-02
0,025			0,167460-03	0,152293-03	0,125838-02
0,0125			0,419611-04	0,381477-04	0,318276-03
0,1	0,8	234	0,266711-02	0,242035-02	0,199210-01
0,05			0,669135-03	0,608274-03	0,502371-02
0,025			0,167735-03	0,152498-03	0,125584-02
0,0125			0,416439-04	0,379109-04	0,317020-03

Пример 2.

$$y'' + A e^{\alpha y} = 0, \quad A > 0, \alpha > 0, \quad (4.2)$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Задача (4.2) имеет два решения, если $A\alpha \leq 3,5$. При выборе начального приближения $u_0(x) = \Delta \cdot \sin \pi x$, метод стабилизации с помощью уравнения (I.1) с условиями (I.2)-(I.3) позволяет в зависимости от вычислительной схемы найти только нижнее решение или оба решения. Параметры выбраны $A = 1,5$, $\alpha = 2$. Численные эксперименты показывают, что приближенное решение, полученное по явной схеме (2.2),

* 0,266740-02 = 0,266740 · 10⁻²

стабилизируется лишь к нижнему решению при значениях Δ , удовлетворяющих условию $0 \leq \Delta \leq 0,9$. А при $\Delta \geq 1$ имеет место $S^n \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$. Зависимость $n = n(\Delta)$ изображена на рис. I. При значении $\Delta = 0,3$ требуется наименьшее количество временных слоев для выполнения условия (2.II), в котором $\varepsilon = 10^{-6}$. Численные результаты приведены в таблице 3.

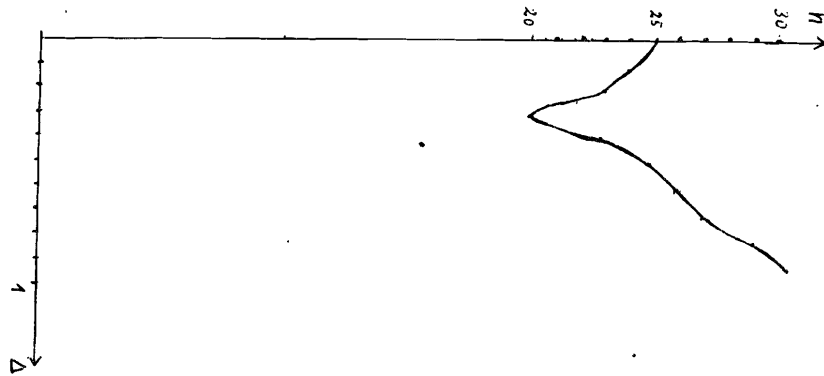


Рис. I.

Таблица 2

h	τ	n	k	ε_1	ε_1'	ε_1''
0,1				0,266749-02	0,242065-02	0,199192-01
0,05				0,669523-03	0,608585-03	0,502174-02
0,025	0,1	43	68	0,167654-03	0,152453-03	0,125839-02
0,0125				0,420344-04	0,382221-04	0,315036-03
0,1				0,266748-02	0,242064-02	0,199191-01
0,05				0,669510-03	0,608573-03	0,502171-02
0,025	0,5	14	25	0,167640-03	0,152441-03	0,125836-02
0,0125				0,420202-04	0,382099-04	0,315002-03
0,1				0,266730-02	0,242049-02	0,199187-01
0,05				0,669331-03	0,608419-03	0,502128-02
0,025	0,8	11	19	0,167462-03	0,152287-03	0,125793-02
0,0125				0,418423-04	0,380561-04	0,314570-03
0,1				0,266724-02	0,242044-02	0,199186-01
0,05				0,669275-03	0,608370-03	0,502114-02
0,025	1,0	10	19	0,167405-03	0,152238-03	0,125779-02
0,0125				0,417853-04	0,380069-04	0,314432-03

Таблица 3

h	τ	n	ε_1	ε_1'	ε_1''
0,1			0,232229-02	0,657699-02	0,131866-01
0,05			0,589391-03	0,166264-02	0,335523-02
0,025	0,5	20	0,148428-03	0,418341-03	0,848059-03
0,0125			0,376954-04	0,106265-03	0,218124-03

В отличие от (2.2), схема (2.3) или (2.7)-(2.8) дает нижнее решение при $0 \leq \Delta \leq 0,7$ и верхнее решение при значениях $0,8 \leq \Delta \leq 1,63$. При этом $n(k)$ изменяется от 3(2) до 4(9) и их зависимости от Δ незначительны. В таблицах 4 и 5 приводятся результаты, полученные по схеме (2.7)-(2.8) при $\Delta = 1,0$ и $\Delta = 0,5$ соответственно.

Таблица 4

h	τ	n	k	ε_1	ε_1'	ε_1''
0,1		7	9	0,899338-02	0,399502-01	0,196247-00
0,05		7	10	0,226152-02	0,100244-01	0,490179-01
0,025	1,0	7	10	0,566198-03	0,250821-02	0,122517-01
0,0125		7	10	0,141565-03	0,627099-03	0,306227-02

Таблица 5

h	τ	n	k	ε_1	ε_1'	ε_1''
0,1		8	12	0,232185-02	0,657571-02	0,131818-01
0,05		8	12	0,588765-03	0,166082-02	0,334854-02
0,025	1,0	8	12	0,147747-03	0,416364-03	0,840796-03
0,0125		8	12	0,370004-04	0,104246-03	0,210713-03

В этом примере наблюдается стабилизация решения, хотя не выполняется условие (1.6). Условие (1.6) является лишь достаточным условием стабилизации решения задачи (1.1)-(1.3) к решению задачи (1.4)-(1.5). Как отмечено в^{19/}, в случае установления стационарное решение не зависит от шага по времени. Следовательно, в силу абсолютной устойчивости схемы (2.3)^{10/}, можно использовать крупные шаги по времени, что уменьшает объем вычислений.

Из таблиц 1-5 видно, что сходимость приближенного решения и его первых двух производных имеет порядок $O(h^2)$.

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу^{18/}

$$y'' = y(1 - y^2/x^2), \quad (4.3)$$

$$y(0) = y(e) = 0. \quad (4.4)$$

Она имеет счетное множество решений. Легко можно проверить, что для сопутствующей к (4.3)-(4.4) параболической задачи не выполняется достаточное условие (I.6) стабилизации решения. Однако при определенном выборе начальной функции и шага τ приближенное решение стабилизировалось к различным решениям задачи (4.3)-(4.4). Из-за сингулярности точки $x=0$ оказалось невозможным непосредственное применение численной схемы (2.3) для задачи на отрезке $[0, e]$. Поэтому была сформулирована краевая задача на отрезке $[\varepsilon, e]$, где $\varepsilon > 0$ малое число. Решение задачи (4.3)-(4.4) аналитично в окрестности сингулярной точки $x=0$, т.е. имеет место разложение $\frac{1}{II}$

$$y(0) = y(\varepsilon) - \varepsilon y'(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} y''(\varepsilon) + \dots,$$

где ε - малое положительное число. В силу ограниченности второй производной решения при $x \neq 0$, краевое условие на левом конце можно заметить условием

$$y(\varepsilon) - \varepsilon y'(\varepsilon) = 0,$$

погрешность которого имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Таким образом, вместо задачи (4.3)-(4.4) можно рассматривать уравнение (4.3) с краевым условием

$$y(\varepsilon) - \varepsilon y'(\varepsilon) = 0, \quad y(e) = 0.$$

За начальные приближения $u_0(x)$, как в работе^{18/}, брались функции вида

$$u_0(x) = \Delta \cdot \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Численные расчеты показывают, что наша схема дает положительное решение задачи (4.3)-(4.4) при значениях $\ell=2$, $1,5 \leq \Delta \leq 1,8$ и $0,5 \leq \tau \leq 1,0$. В таблицах 6,7 приведены значения приближенного решения и его производной, в случае $h = 0,0975$ и $\varepsilon = 0,05$. В их последних столбцах приведены значения γ , показывающие их квадратичную сходимость. Из уравнения (4.3) видно, что квадратичная сходимость должна быть и для второй производной.

Отметим, что если $y(x)$ - решение задачи (4.3)-(4.4), то $-y(x)$ тоже является решением. Результаты расчета при $\Delta = 1,1$ и $\tau = 0,5$ приведены в таблице 6. В зависимости от выбора начальной функции $u_0(x)$ можно получить решения, имеющие различное число нулей на рассматриваемом отрезке. При задании начальной функции

$$u_0(x) = \begin{cases} \Delta \cdot \sin 2\pi x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ -2,5 \cdot \sin \frac{2\pi}{3}(x - 1/2), & 1/2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

и граничного условия

$$(y - 0,05y')_{x=0,05} = 0$$

Таблица 6

X	S(x)			γ
	h	h/2	h/4	
0,050	0,2315103	0,235330	0,236364	3,7
0,245	0,9616526	0,967222	0,968669	3,8
0,440	1,226364	1,216861	1,214253	3,5
0,635	1,172406	1,153826	1,148926	3,7
0,830	0,998377	0,978810	0,973716	3,8
1,025	0,801104	0,784139	0,779746	3,8
1,220	0,613351	0,599981	0,596526	3,8
1,415	0,442246	0,432507	0,429993	3,8
1,610	0,286080	0,279760	0,278129	3,8
1,805	0,140390	0,137286	0,136486	3,8
2,000	0	0	0	-

Таблица 7

x	S'(x)			γ
	h	h/2	h/4	
0,05	4,630206	4,706595	4,727290	3,7
0,245	2,561951	2,502418	2,485941	3,6
0,440	0,333532	0,261015	0,242307	3,8
0,635	-0,708960	-0,730684	-0,735921	4,1
0,830	-0,998661	-0,991195	-0,989065	3,5
1,025	-1,000030	-0,982787	-0,978260	3,8
1,220	-0,920871	-0,901930	-0,897016	3,7
1,415	-0,835978	-0,817835	-0,813145	3,8
1,610	-0,769701	-0,752741	-0,748362	3,8
1,805	-0,729019	-0,712908	-0,708750	3,8
2,000	-0,715413	-0,699602	-0,695520	3,8

численное решение стабилизируется к решению с одним нулем при значениях Δ от 1,44 до 1,53 с шагом 0,01 и τ от 0,5 до 1,0 с шагом 0,1. При этом стабилизация происходит довольно быстро. В таблице 8 приведены значения $S^{(k)}(x_i, t_n)$, $i=0,1,2$ при различных t_n в случае, когда $(\Delta, \tau, h) = (1,5; 1,0; 0,0122)$. На десятом временном слое выполняется условие (2.II) с $\varepsilon = 10^{-6}$. Из этой таблицы видно, что за счет "внутренних" итераций (K - число итераций) уже на первом временном слое получается довольно хорошее приближение для решения, а значения первой и второй производных стабилизировались начиная с пятого слоя.

Отметим, что при малых τ (например, $\Delta = 1,53, \tau = 0,2; 0,1$) имеет место стабилизация решения. Однако в этом случае для выполнения условия (2.II) требуется много временных слоев расчета, что невыгодно с точки зрения стабилизации. В окрестности особой точки $x=0$ решение задачи (4.3)-(4.4) имеет сравнительно большой градиент (см. таблицу 8), чем в точках остальной части отрезка $[0;2]$. В таких случаях для получения более точного приближения используются неравномерные сетки, однако здесь они не применяются. В таблице 9 приведены значения приближенного решения в случае $(\Delta, \tau, t) = (1,5; 1,0; 10)$ на сетках с шагами $h, h/2, h/4, h/8, h/16$ где $h = 0,195$. В ней δ относится только к трем последним сеткам. На сетках с шагами $(h, h/2, h/4)$ и $(h/2, h/4, h/8)$ не устанавливается квадратичная сходимость, что, по-видимому, вызывается недостаточным количеством узлов сетки.

Как отмечено в [1], кубический сплайн может не удовлетворять требованиям качественного характера решения. Однако из уравнения (4.3) видно, что приближенное решение отражает качественное поведение искомой функции. Численный расчет показывает, что, например, в случае $(\Delta, \tau, t, h) = (1,5; 1,0; 10, 0,0122)$ точки перегиба приближенного решения суть: $M_1(0,33; 0,339)$, $M_2(0,391; -0,035)$, $M_3(0,464; -0,484)$ и $M_4(1,512; -1,497)$. Действительно, решение задачи (4.3)-(4.4) переходит от выпуклости к вогнутости или наоборот в тех точках, где решение пересекается с прямыми $y=x$, $y=0$ и $y=-x$.

Пример 4.

$$u_t = u_{xx} - \frac{u^2 - u_x^2}{2(1-x)e^{x(x-1)} + (x-1)^2 + 1} - (4x^2 - 6x + 3)e^{x(x-1)} + x^2 + 2x,$$

$$(u - u_x)_{x=0} = 4, \quad u_x(1, t) = 3 + e^{1-t}$$

Точное решение задачи имеет вид $u(x, t) = \exp(x-t) + \exp(x(x-1)) + x^2 + 2$. С целью проверки порядков сходимости приближенного решения по h и τ , полученных по схеме (2.3), приведены соответственно в таблицах II и II.

Таблица 8

x	$n=0$			$n=1 (k=6)$			$n=5 (k=1)$			$n=10 (k=1)$		
	$S(x)$	$S'(x)$	$S''(x)$	$S(x)$	$S'(x)$	$S''(x)$	$S(x)$	$S'(x)$	$S''(x)$	$S(x)$	$S'(x)$	$S''(x)$
0,05	0,46237	0,71365	14,27698	-144,54011	0,73539	14,70789	-158,34657	0,73543	14,70859	-158,36918		
0,245	1,49926	0,90158	-5,53497	-11,90530	0,88730	-5,88735	-9,64004	0,88723	-5,88795	-9,63719		
0,44	0,55219	-0,24871	-6,02380	-0,97014	-0,33454	-6,14252	-0,14181	-0,33470	-6,14292	-0,14103		
0,635	0,69748	-1,42191	-5,81635	4,98339	-1,50956	-5,67223	7,02074	-1,50977	-5,67216	7,02485		
0,83	-1,59356	-2,38383	-3,66305	16,48991	-2,40365	-3,13680	17,75442	-2,40376	-3,13591	17,75747		
1,025	-2,22752	-2,65961	-0,18697	16,71132	-2,66996	0,32448	15,44650	-2,66986	0,32545	15,44439		
1,22	-2,49507	-2,52846	2,27739	8,29861	-2,36959	2,46192	6,57048	-2,36936	2,46230	6,56728		
1,415	-2,35220	-1,97217	3,23105	2,23893	-1,80650	3,13733	1,13887	-1,80625	3,13720	1,13696		
1,61	-1,82242	-1,31797	3,40943	0,06970	-1,18797	3,15312	-0,54042	-1,18778	3,15273	-0,54129		
1,805	-0,99287	-0,65537	3,37744	-0,23147	-0,58479	3,03452	-0,52301	-0,58470	3,03402	-0,52334		
2,0	0,00000	0,00000	3,35203	0,00000	0,00000	2,98058	0,00000	0,00000	2,98005	0,00000		

Таблица 9

x	S(x)						δ
	h	h/2	h/4	h/8	h/16		
0,05	0,611419	0,654568	0,707751	0,729166	0,735429		3,5
0,245	1,498845	1,136922	0,936412	0,874007	0,857229		3,7
0,440	0,426826	-0,685466	-0,268394	-0,320928	-0,334698		3,7
0,635	-0,981912	-1,341457	-1,465864	-1,500655	-1,509769		3,9
0,830	-2,263522	-2,384779	-2,402385	-2,403721	-2,403760		32,5
1,025	-3,020082	-2,820292	-2,713794	-2,679293	-2,669865		3,7
1,220	-3,000241	-2,594983	-2,431169	-2,382386	-2,369362		3,7
1,415	-2,419949	-2,010507	-1,860944	-1,817703	-1,806251		3,7
1,610	-1,625401	-1,329312	-1,225382	-1,195639	-1,187783		3,8
1,805	-0,804628	-0,655186	-0,603378	-0,588593	-0,584691		3,8
2,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000		-

Таблица II ($\tau = 0.001$)

η	$h = 0,1$			$h = 0,05$		
	ε_1	ε_1'	ε_1''	ε_1	ε_1'	ε_1''
5	0,83341-04	0,27999-03	0,26144-01	0,18426-04	0,32671-04	0,53929-02
10	0,13282-03	0,13114-03	0,21063-01	0,35580-04	0,62374-04	0,49964-02
15	0,20639-03	0,20639-03	0,19834-01	0,50328-04	0,73503-04	0,48866-02
20	0,27732-03	0,29703-03	0,19352-01	0,63624-04	0,10487-03	0,48409-02

Таблица 12 ($\varepsilon = 1, h = 0,025$)

τ	0,2	0,1	0,05
ε_1	0,14921-01	0,72529-02	0,35117-02
ε_1'	0,12054-01	0,58691-02	0,28324-02
ε_1''	0,27732-01	0,14075-01	0,71687-02

Из этих таблиц видно, что теоретические выводы о порядке сходимости приближенного решения (теорема 3) подтверждаются численными расчетами.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.А. Методы сплайн-функций. Наука, М., 1980.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. Мир, М., 1968.
3. Friedman A. J. Math. and Mech., 1958, 7, p.793; J. Math. and Mech., 1959, 8, p.57; J. Math. and Mech., 1959, 8, p.387.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. I. Наука, М., 1976.
5. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. Под ред. А.Н.Тихонова. Наука, М., 1982.
6. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, I, с.127.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Наука, М., 1976.
8. Жидков Е.П., Пузынин И.В. ЖВМ и МФ, 1967, 7, с. 1984.
9. Самарский А.А. и др. ЖВМ и МФ, 1963, 3, с.702.
10. Самарский А.А. и др. ЖВМ и МФ, 1962, 2, с.25.
11. Гласко Б.В. и др. ЖЭТФ, 1958, 35, с.452.
Пузынин И.В. ОИЯИ, Р-1549, Дубна, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 октября 1987 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р.55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р.00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р.50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р.30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р.50 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р.50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р.75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.00 к.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р.80 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р.75 к.
D3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р.50 к.
-	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. /2 тома/	13 р.50 к.
D1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. /2 тома/	7 р.35 к.
D9-87-105	Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1986. /2 тома/	13 р.45 к.
D7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна, 1986	7 р.10 к.
D2-87-123	Труды Совещания "Ренормгруппа-86". Дубна, 1986	4 р.45 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Жанлав Т., Пузынин И.В.

P11-87-722

Численные схемы в методе стабилизации для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

Используется метод стабилизации для решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Приведено достаточное условие стабилизации решения. Предлагается вычислительная схема, основанная на непрерывном аналоге метода Ньютона и методе сплайн-коллокации. Доказана сходимость итерационного процесса и приближенного решения. Эффективность построенного алгоритма иллюстрируется численными примерами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Zhanlav T., Puzynin I.V.

P11-87-722

Numerical Schemes in the Stabilization Method for Nonlinear Differential Equations of Second Order

The stabilization method is used for solving nonlinear differential equations of second order. One sufficient condition of a solution is given. Computational scheme is based on the continuous analog of the Newton method and spline-collocation method. The convergence of iterative procedure and of approximate solution are proved. The efficiency of the constructed algorithm is illustrated by numerical examples.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987