

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

П165

P11-87-721

Е.Ю.Панова, А.Б.Швачка

**РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
НЕОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

1987

При изучении различных моделей нелинейной оптики^{/1-5/}, а также некоторых моделей физики элементарных частиц и физики плазмы^{/6/} возникает задача о численном решении не одномерного уравнения Шредингера с нелинейностью вида $f(|u|)u$. Для решения такого рода уравнений используются конечно-разностные методы^{/7-15/}.

При численном решении не одномерного нелинейного уравнения Шредингера

$$iu_t + \Delta u + f(|u|)u = 0, \quad (I)$$

как и вообще при решении не одномерных задач конечно-разностными методами, особое значение имеет экономичность^{/16/} применяемого для решения задачи разностного метода. Экономичные схемы безусловно устойчивы и требуют на каждый узел сеток затрат числа арифметических операций, не зависящих от числа узлов.

Проанализируем кратко разностные методы, используемые для численного решения уравнения (I). Считаем, что $u = u(x_1, x_2, t)$,

$(x_1, x_2) \in G$, где G - конечная прямоугольная область с границей ∂G , $t \in [0, T]$. Присоединим к уравнению (I) начальное условие

$$u(x_1, x_2, t=0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G \quad (2)$$

и краевое условие

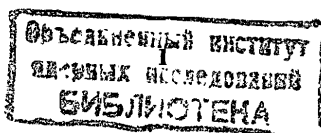
$$u|_{\partial G} = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Для решения задачи (I)-(3) введем равномерную сетку

$$\bar{\omega} = \{(x_{1n}, x_{2m}, t_j) ; x_{1n} = nh_1, x_{2m} = mh_2, \quad (4)$$

$$t_j = j\tau, \quad n = \overline{0, N_1}, \quad m = \overline{0, N_2}, \quad j = \overline{0, N},$$

$$h_1 = L_1/N_1, \quad h_2 = L_2/N, \quad \tau = T/N \}.$$



Введем линейное пространство L_{2h} сеточных функций

$$v = \left\{ v(x_{1n}, x_{2m}), \quad n=0, N_1, \quad m=0, N_2 \right\},$$

обращающиеся в нуль при $n=0$, $n=N_1$, $m=0$, $m=N_2$.

Скалярное произведение в пространстве L_{2h} имеет вид

$$(u, v) = \sum_{n=L}^{N_1-1} \sum_{m=1}^{N_2-1} h_1 h_2 u_{nm} v_{nm}^* \quad (5)$$

Оно порождает норму

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}. \quad (6)$$

Оператор Лапласа Δ аппроксимируем разностным оператором Λ :

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (7)$$

где

$$\Lambda_1 v_{nm} = \frac{v_{n+1,m} - 2v_{nm} + v_{n-1,m}}{h_1^2},$$

$$\Lambda_2 v_{nm} = \frac{v_{n,m+1} - 2v_{nm} + v_{n,m-1}}{h_2^2}.$$

Консервативность разностных схем будем рассматривать относительно закона сохранения мощности оптического пучка (или интеграла числа частиц в терминологии /6/)

$$I(t) = \iint_G |u(x_1, x_2, t)|^2 dx_1 dx_2. \quad (8)$$

В работе /II/ рассмотрена двухслойная консервативная разностная схема для решения задачи (I)-(3)

$$i \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} + \Lambda \left(\frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right) + f(|v^{n+1} + v^n|) \cdot \frac{v^{n+1} + v^n}{2} = 0. \quad (9)$$

Доказана безусловная устойчивость разностной схемы (9) по начальным данным. В работе /II/ обсуждается также вопрос о выборе итерационного метода решения системы нелинейных разностных уравнений (9), такого, чтобы не нарушалась консервативность схемы. В качестве такого итерационного процесса предлагается следующий:

$$i \frac{v_s^{n+1} - v^n}{\tau} + \Lambda \left(\frac{v_s^{n+1} + v^n}{2} \right) + f \left(\left| \frac{v_s + v^n}{2} \right| \right) \frac{v_s + v^n}{2} = 0, \quad (10)$$

где

v_s - s-я итерация для нахождения v^{n+1} .

В работе /II/ доказана сходимость численного алгоритма (9), (10) при следующих ограничениях на шаги сетки:

$$\tau = h^\alpha, \quad \alpha > 1/2, \quad (11)$$

$$h = \max(h_1, h_2).$$

Трехслойная разностная схема для решения задачи (I)-(3) приводится в работах /9, 13/. В этой работе показано, что схема вида

$$i \frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\tau} + \Lambda \left(\frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} \right) + f(|v^n|) v^n = 0 \quad (12)$$

является неконсервативной.

Разностный аналог закона сохранения (8) выполняется (то есть трехслойная схема консервативна), если она имеет вид

$$i \frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\tau} + \Lambda \left(\frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} \right) + f(|v^n|) \frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} = 0. \quad (13)$$

Все рассмотренные выше схемы, обладая рядом достоинств, не являются экономичными.

В работе /13/ приводится схема переменных направлений

$$i \frac{v^{n+1/2} - v^n}{0,5\tau} + (\Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^n) + f(|v^{n+1/2}|) v^{n+1/2} = 0,$$

$$i \frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{0,5\tau} + (\Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^{n+1}) + f(|v^{n+1/2}|) v^{n+1/2} = 0, \quad (I4)$$

которая является экономичной. Однако эта схема не является консервативной. К достоинствам схемы переменных направлений относится и то, что при реализации требуется только два двумерных массива, в которых от слоя к слою заносится решение. Все вспомогательные массивы — одномерные.

В работах [17, 18] для численного решения задачи (I)–(3) используется метод суммарной аппроксимации [16], который состоит в замене неодномерного дифференциального уравнения цепочкой одномерных дифференциальных уравнений и последующего их решения с помощью конечно-разностных методов.

Для рассмотрения этого метода перепишем уравнение (I) в виде

$$i u_t + \hat{A}u = 0, \quad (I5)$$

где оператор \hat{A} определяется по формуле

$$\hat{A}(u(x_1, x_2, t)) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - f(|u(x_1, x_2, t)|), \quad (I6)$$

Начально-краевую задачу (I6), (2), (3) заменим цепочкой одномерных уравнений

$$\frac{1}{3} i \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \hat{A}_\alpha v_\alpha = 0 \quad (I7)$$

при $t_{j+\frac{\alpha-1}{2}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha = 1, 2.$

Здесь

$$\hat{A}_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{1}{3} f(|v_\alpha(x_1, x_2, t)|), \quad \alpha = 1, 2. \quad (I8)$$

При этом, как нетрудно увидеть, выполняется условие

$$\hat{A}u + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2)u = 0(\tau). \quad (I9)$$

К (I7) присоединим начальные условия

$$v_1(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2),$$

$$v_2(x_1, x_2, t_{j+1/2}) = v_1(x_1, x_2, t_{j+1/2}), \quad (20)$$

$$v_1(x_1, x_2, t_{j+1}) = v_2(x_1, x_2, t_{j+1}).$$

При этом за приближенное решение при $t = t_{j+1}$ принимаем

$$v(x_1, x_2, t_{j+1}) = v_2(x_1, x_2, t_{j+1}). \quad (21)$$

Граничное условие примет вид

$$v_\alpha|_{\partial G_\alpha} = 0, \quad (22)$$

где ∂G_α состоит из граней $x_\alpha = 0, x_\alpha = L_\alpha, \alpha = 1, 2.$

Аппроксимируем каждое из уравнений (I7) с номером α на интервале $t_{j+\frac{\alpha-1}{2}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{2}}$ полунейвной разностной схемой

$$i \frac{y_\alpha^{j+\frac{\alpha}{2}} - y_\alpha^{j+\frac{\alpha-1}{2}}}{\tau} + \frac{1}{2} \hat{a}_\alpha (y_\alpha^{j+\frac{\alpha}{2}} + y_\alpha^{j+\frac{\alpha-1}{2}}) = 0, \quad (23)$$

$$\alpha = 1, 2,$$

где

$$\hat{a}_\alpha(y^j) = \Lambda_\alpha + \frac{1}{3} f(|y^j|). \quad (24)$$

К этому уравнению присоединим краевые условия

$$y^{j+\frac{\alpha}{2}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (25)$$

где узлы $x \in \gamma_{h,\alpha}$ лежат на ∂G_α , а также начальные условия

$$y_1(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2),$$

$$y_2^{j+1/2} = y_1^{j+1/2}, \quad (26)$$

$$y_1^{j+1} = y_2^{j+1}.$$

Полученная цепочка одномерных разностных уравнений называется локально-одномерной схемой (ЛОС).

Оценим погрешность аппроксимации ЛОС. Для погрешности метода $z^j = y^j - u^j$, где $u^j = u(t_j)$, имеем следующую задачу:

$$i \frac{z^{j+\alpha/2} - z^j}{\tau} + \frac{1}{2} \hat{a}_\alpha(u^j + z^j) (z^{j+\alpha/2} + z^j)^{j+\frac{\alpha-1}{2}} + \quad (27)$$

$$+ \frac{1}{2} [\hat{a}_\alpha(u^j + z^j) - \hat{a}_\alpha(u^j)] (u^{j+\alpha/2} + u^{j+(\alpha-1)/2}) + \psi_\alpha^j = 0,$$

где ψ_α^j — невязка, определяемая по формуле

$$\psi_\alpha^j = i \frac{u^{j+\alpha/2} - u^j}{\tau} + \frac{1}{2} \hat{a}_\alpha(u^j) (u^{j+\alpha/2} + u^j)^{j+\frac{\alpha-1}{2}} + \frac{1}{2} \hat{a}_\alpha(u^j) (u^{j+\alpha/2} + u^j)^{j+\frac{\alpha-1}{2}}, \quad (28)$$

граничное условие имеет вид

$$z^{j+\alpha/2} = 0, \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (29)$$

начальное условие

$$z(x, 0) = 0. \quad (30)$$

Следуя [16], представим невязку ψ_α^j в виде суммы

$$\psi_\alpha^j = \psi_\alpha^j + \psi_\alpha^j, \quad (31)$$

где

$$\psi_\alpha^j = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{3} i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{3} f(|u|^2) u \right)^{j+1/2}. \quad (32)$$

Для суммы $\sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^j$, учитывая (19), имеем

$$\sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^j = o(\tau). \quad (33)$$

Оценим невязку ψ_α^j :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^j &= \left\{ \frac{1}{2} \Lambda_\alpha (u^{j+\alpha/2} + u^j)^{j+\frac{\alpha-1}{2}} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \right)^{j+1/2} \right\} - \\ &- \left\{ \frac{1}{6} f(|u^j|) (u^{j+\alpha/2} + u^j)^{j+\frac{\alpha-1}{2}} - \frac{1}{3} f(|u^j|) u^{j+1/2} \right\} = \\ &= O(\tau + h_1^2 + h_2^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, суммарная аппроксимация ЛОС:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = (\psi_1 + \psi_2) + (\psi_1^* + \psi_2^*) = O(\tau + h_1^2 + h_2^2). \quad (35)$$

Докажем устойчивость ЛОС по начальным данным в пространстве

L_{2h} . Оператор

$$\hat{a}_\alpha(y^j) = \Lambda_\alpha + \frac{1}{3} f(|y^j|)$$

является самосопряженным, т.к. в пространстве L_{2h} оператор

$$\Lambda_\alpha - \text{самосопряженный (см., например, [19]).}$$

Умножим (23) справа и слева на $\frac{1}{2} (y^{j+\alpha/2} + y^j)^{j+\frac{\alpha-1}{2}}$

и вычтем полученные равенства одно из другого. Тогда получим

$$\|y^{j+\alpha/2}\| = \|y^{j+\frac{\alpha-1}{2}}\|. \quad (36)$$

Отсюда следует устойчивость по начальным данным в L_{2h} :

$$\|y^{j+1}\| = \|y^j\| = \dots = \|y^0\| = \|u_0\|. \quad (37)$$

Отсюда также следует и консервативность ЛОС относительно закона сохранения (8).

Для доказательства сходимости решения ЛОС к решению задачи (1)-(3) в пространстве L_{2h} линеаризуем уравнение (27) по z^j и разрешим относительно $z^{j+\alpha/2}$. Предполагая ограниченность функций $\frac{\partial f}{\partial |u|}$, $|u|$, [14] получим следующую оценку:

$$\|z^{j+\alpha/2}\| \leq \|\hat{b}\| \|z^{j+\frac{\alpha-1}{2}}\| + \frac{\tau}{2} c \cdot \|\hat{a}\| \|z^j\| + \tau \|\psi_\alpha^j\|, \quad (38)$$

где \hat{a}, \hat{b} — операторы, определяемые по формулам:

$$\hat{a} = \left[\hat{I} - i \frac{\tau \hat{a}(y^j)}{2} \right]^{-1},$$

$$\hat{b} = \left[\hat{I} + i \frac{\tau a^2(y^j)}{2} \right] \hat{a}, \quad (39)$$

$$c = \text{const}.$$

Здесь \hat{I} - тождественный оператор. Оператор \hat{b} является унитарным, поэтому $\|\hat{b}\| = 1$. Для нормы оператора \hat{a} нетрудно получить оценку

$$\|\hat{a}\| \leq 1 + O(\tau).$$

Поэтому (38) принимает вид

$$\|z^{j+\alpha/2}\| \leq \|z^{j+\frac{\alpha-1}{2}}\| + \frac{c\tau}{2} (1 + O(\tau)) \|z^j\| + \tau \|\psi_\alpha^j\|. \quad (40)$$

Суммируя (40) по $\alpha = 1, 2$, получим

$$\|z^{j+1}\| \leq (1 + O(\tau)) \|z^j\| + \tau (\|\psi_1^j\| + \|\psi_2^j\|). \quad (41)$$

Отсюда, следуя [16], получим оценку для точности метода:

$$\|z^j\| \leq m \cdot O(\tau + h_1^2 + h_2^2), \quad (42)$$

где

$$m = \text{const}.$$

Предложенный разностный метод решения задачи (1)-(3) является экономичным. При реализации ЛОС на ЭВМ достаточно одного двумерного массива, остальные массивы - одномерные.

В заключение мы приводим таблицу, в которой сравниваются такие параметры разностных схем, как число арифметических операций, относительная точность выполнения закона сохранения

$$I = \int |u|^2 dx_1 dx_2$$

и времени центрального процессора при счете на ЭВМ ЕС-1045 для двухслойной [11], трехслойной [9, 13] разностных схем, схемы переменных направлений [9, 13] и предложенной нами разностной схемы, основанной на применении метода суммарной аппроксимации. Разностные схемы при-

менены для численного интегрирования рассматриваемого уравнения Шредингера с логарифмической нелинейностью. Отметим, что решение системы разностных уравнений, полученных при использовании двухслойных и трехслойных схем, осуществлялось методом исключения Гаусса; решение системы разностных уравнений по схеме переменных направлений и по схеме, основанной на методе суммарной аппроксимации, осуществлялось с помощью метода прогонки.

Таблица

Схема	Число ариф. операций	Точность вычисления	Время центрального процессора	Примечание
Двухслойная [11]	$O(\frac{1}{h^4})$	10^{-8}	32'	Схема неэкономичная, но консервативная.
Трехслойная [9, 13]	$O(\frac{1}{h^4})$	10^{-8}	26'	Схема неэкономичная, но консервативная.
Схема переменных направлений [9, 13]	$O(\frac{1}{h^2})$	10^{-4}	17'	Схема экономичная, но неконсервативная.
Схема, основанная на методе суммарной аппроксимации	$O(\frac{1}{h^2})$	10^{-7}	18'	Схема экономичная и консервативная.

Литература

1. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.-УФН, 1967, 93, с.19.
2. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С.-ЖЭТФ, 1971, 60, с.136.
3. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А.-Изв.вузов. Радиофизика, 1973, 16, с.1020.
4. Douves E.L., Marburger J.H.-Phys. Rev. 1969, 179, p.862.
5. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С.-ПМТФ, 1972, № 1, с.92.
6. Маханьков В.Г.-ЭЧАЯ, 1983, т.14, вып.1, с.123.
7. Карамзин Ю.Н. Препринт ИПМ АН СССР, № 74, Москва, 1982.
8. Карамзин Ю.Н. Препринт ИПМ АН СССР, № 73, Москва, 1982.
9. Борисов А.А. О численном исследовании устойчивости самофокусировки

- оптических пучков. В сб. "Численный анализ на ФОРТРАНе. Практическое пособие по методам и программам решения задач волновой физики". М., изд-во МГУ, 1983, с.56.
10. Дышко А.Л.-ЖВМ и МФ, 1968, 8, с.238.
11. Дриц В.В. Разностные схемы для решения нелинейных уравнений Шредингеровского типа. В сб.: "Дифференциальные уравнения и их применение". Вып.33, с.67. Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, Вильнюс, 1983.
12. Абрашин В.Н. и др. Препринт ин-та физики АН БССР, № 244, Минск, 1981.
13. Борисов А.А. О сходимости разностных схем для решения нелинейного уравнения типа Шредингера. В сб. "Современные проблемы математического моделирования", Москва, Изд-во МГУ, 1984, с.70.
14. Швачка А.Б., Панова Е.Ю. ОИЯИ, PII-83-871, Дубна, 1983.
15. Карамзин Ю.Н., Цветкова И.Л. Препринт ИГиМ АН СССР, № II5, 1979.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
17. Швачка А.Б., Панова Е.Ю. ОИЯИ, PII-84-150, Дубна, 1984.
18. Makhankov V.G., Panova E.Yu., Shvachka A.B. JINR, E11-84-451, Dubna, 1984.
19. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
I октября 1987 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р.55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р.00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р.50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р.30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р.50 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программирования и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р.50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р.75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.00 к.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р.80 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р.75 к.
D3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р.50 к.
-	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. /2 тома/	13 р.50 к.
D1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. /2 тома/	7 р.35 к.
D9-87-105	Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1986. /2 тома/	13 р.45 к.
D7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна, 1986	7 р.10 к.
D2-87-123	Труды Совещания "Ренормгруппа-86". Дубна, 1986	4 р.45 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Панова Е.Ю., Швачка А.Б.
Разностные методы решения неоднородного
нелинейного уравнения Шредингера

P11-87-721

Приведен краткий обзор разностных методов, используемых для решения неоднородного нелинейного уравнения Шредингера. Отмечены достоинства и недостатки двух- и трехслойных разностных схем, в частности их неконсервативность. Исследованы свойства предложенной авторами локально-одномерной схемы и показано, что она является экономичной и консервативной. Эффективность рассмотренных схем проиллюстрирована на примере численного решения неоднородного уравнения Шредингера с логарифмической нелинейностью.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Panova E.Yu., Shvachka A.B.
Finite-Difference Methods for Solution
of the Many-Dimensional Nonlinear
Schroedinger Equation

P11-87-721

The brief review of the finite-difference methods used to solve the many-dimensional nonlinear Schroedinger equation is presented. The features of two- and three-point finite-difference schemes are discussed, including their nonconservation property. The properties of the local one-dimensional scheme proposed by the authors are investigated, and it is shown that the scheme is economical and conservative. To illustrate the efficiency of the schemes the results of the numerical investigation of the many-dimensional Schroedinger equation with logarithmic nonlinearity are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987