объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-87-623

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

О МНОЖЕСТВАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ (ИХ СВОЙСТВАХ) КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ (ИМ ОБРАТНЫХ) МАТРИЦ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

*ИЯФ АН УзССР, Ташкент

1987

I. Введение

Настоящая работа является продолжением серии работ [I÷6] по изучению свойств квазитрехдиагональных операторов (матриц) и им обратных. При этом основное внимание уделяется построению множеств всевозможных четырех-квазивекторных представлений операторов (матриц), обратных к квазитрехдиагональным, а также множеств представлений для самих квазитрехдиагональных матриц в случае всех отличных от нуля главных угловых квазиминоров. На актуальность настоящей серии работ для вычислительной математики вообще, а также для решения конкретных задач (в частности, при обработке экспериментальных данных в физике высоких энергий) уже неоднократно указывалось в более ранних работах (например, [I÷4]) этой серии. В указанных работах можно найти также многочисленную библиографию (конечно же, не претендующую на полноту) по оригинальным результатам других авторов, исследовавших указанную проблему.

Итак, пусть $\mathcal{C}$ -неособенная квазитрехдиагональная матрица (оператор) общего вида[x)]

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & z_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & z_4 & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & z_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \qquad \text{где} \tag{I.I}$$

$\{q_i\}_{i=1}^{m}$ - неособенные квадратные (разных размерностей) диагональные элементы-блоки $\mathcal{C}(1.1)$, $\{z_i, p_i\}_{i=2}^{m}$ - прямоугольные внедиагональные элементы-подматрицы $\mathcal{C}(1.1)$, минимальные размерности которых совпадают с размерностями $\{q_i\}_{i=1}^{m}$. Матрицу $\mathcal{C}(1.1)$ представим в виде[xx)] [6]

$$\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} E_1 & \tilde{z}_2 & & & & \\ \tilde{p}_2 & E_2 & \tilde{z}_3 & & & \\ & \tilde{p}_3 & E_3 & \tilde{z}_4 & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & \tilde{p}_{m-1} & E_{m-1} & \tilde{z}_m \\ & & & & \tilde{p}_m & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \qquad \text{где} \tag{I.2}$$

$\left\{ \tilde{z}_k = z_k \cdot q_k^{-1};\ \tilde{p}_k = p_k \cdot q_{k-1}^{-1} \right\}_{k=2}^{m}$ - прямоугольные подматрицы (внедиа-

x) Напомним, что под оператором $\mathcal{C}(1.1)$ общего вида, имеется в виду случай $\{(q_k \neq q_{k'}) \neq (z_k \neq z_{k'}) \neq (p_k \neq p_{k'})$, при $k \neq k'\}_{k=2}^{m}$.

xx) Здесь, как и в [5,6], и всюду далее рассматривается именно правая факторизация $\mathcal{C}(1.1)$.

гональные элементы-блоки) матрицы $\widetilde{\mathcal{C}}$, размерности которых совпадают с размерностями $\{r_k \text{ и } p_k\}_{k=2}^{m}$ и $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ – единичные матрицы, размерности которых совпадают с размерностями $\{q_i\}_{i=1}^{m}$.

Для случая, когда все главные угловые квазиминоры[x)] $\mathcal{C}(1.2)$ отличны от нуля, в [6] были получены (теорема 7 и теорема 6) следующие <u>факторизованные</u> представления[xx)], как для самих операторов $\mathcal{C}(1.2)$, так и для им обратных[xxx)] $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$.

<u>Представление 5′(5)</u> <u>Представление 6′(6)</u>

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & \\ & \Lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & (-c_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & \\ & \Lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\widetilde{\beta}_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\widetilde{\beta}_m) & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & (-c_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \quad \text{где} \tag{I.3}$$

$$\begin{cases} \beta_{k+1} = -(\widetilde{p}_{k+1} \cdot \Lambda_{k+1}^{-1}), \\ c_{k+1} = -(\Lambda_{k+1}^{-1} \cdot \widetilde{r}_{k+1}), \\ \widetilde{\beta}_{k+1} = -(\Lambda_{k+2}^{-1} \cdot \widetilde{p}_{k+1}), \ k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \Lambda_{k+1} = E_k - \widetilde{p}_k \cdot \Lambda_k^{-1} \cdot \widetilde{r}_k, \ k = 2, \ldots, m; \ \Lambda_2 \equiv E_1. \end{cases} \tag{I.4}$$

<u>Представление 7′(7)</u> <u>Представление 8′(8)</u>

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat{\beta}_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & (-\hat{\beta}_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_0 & & & \\ & G_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat{c}_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\hat{c}_m) & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} G_0 & & & \\ & G_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & (-\widetilde{\widetilde{\beta}}_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & (-\widetilde{\widetilde{\beta}}_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat{c}_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\hat{c}_m) & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}; \quad \text{где} \tag{I.5}$$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{k+1} = -(\widetilde{r}_{k+1} \cdot G_k^{-1}), & \widetilde{\widetilde{\beta}}_{k+1} = -(G_{k-1}^{-1} \cdot \widetilde{r}_{k+1}), \ k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \hat{c}_{k+1} = -(G_k^{-1} \cdot \widetilde{p}_{k+1}); & G_{k-1} = E_k - \widetilde{r}_{k+1} \cdot G_k^{-1} \cdot \widetilde{p}_{k+1}, \ k = m-1, \ldots, 1; \ G_{m-1} \equiv E_m \end{cases} \tag{I.5$'$}$$

---

x) Под главными угловыми квазиминорами, как и в [5,6], понимаются определители матриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно.

xx) Отметим, что мы не приводим здесь все полученные в [5,6] множества представлений, а ограничиваемся лишь некоторыми из них.

xxx) Напомним также, что в [5,6] была введена отдельная нумерация представлений как для самих операторов $\mathcal{C}$, так и для им обратных $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$.

<u>Представление 7′(7)</u> <u>Представление 8′(8)</u>

$$(\mathcal{B}_{ij} = q_i^{-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ij}) = q_i^{-1} \begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod\limits_{s=j+1}^{i} \beta_s, & 1 \le j \le i \le m, \\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j} c_\mu \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}, & 1 \le i \le j \le m; \end{cases} \qquad (\mathcal{B}_{ij} = q_i^{-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ij}) = q_i^{-1} \begin{cases} \prod\limits_{\mu=j+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}, & 1 \le j \le i \le m, \\ \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod\limits_{s=i+1}^{j} \hat{\beta}_s, & 1 \le i \le j \le m. \end{cases} \tag{I.6}$$

<u>Представление 9′(9)</u> <u>Представление 10′(10)</u>

$$(\mathcal{B}_{ij} = q_i^{-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ij}) = q_i^{-1} \begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod\limits_{s=j+1}^{i} \beta_s, & 1 \le j \le i \le m, \\ \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod\limits_{s=i+1}^{j} \hat{\beta}_s, & 1 \le i \le j \le m; \end{cases} \qquad (\mathcal{B}_{ij} = q_i^{-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ij}) = q_i^{-1} \begin{cases} \prod\limits_{\mu=j+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}, & 1 \le j \le i \le m, \\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j} c_\mu \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}, & 1 \le i \le j \le m. \end{cases} \tag{I.7}$$

Здесь $\widetilde{\mathcal{B}}_{kk}$ – квадратные <u>неособенные</u> диагональные элементы – блоки оператора $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{C}}^{-1}$ для $\widetilde{\mathcal{C}}(1.2)$, единственным образом представимые в виде

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}}_{kk} = [\Lambda_{k+1} + G_{k-1} - E_k]^{-1}, \ k = 1, 2, \ldots, m, \ \text{где} \\ \Lambda_{k+1} = E_k - \widetilde{p}_k \cdot \Lambda_k^{-1} \cdot \widetilde{r}_k; \ \Lambda_2 \equiv E_1, \ k = 2, 3, \ldots, m \\ G_{k-1} = E_k - \widetilde{r}_{k+1} \cdot G_k^{-1} \cdot \widetilde{p}_{k+1}; \ G_{m-1} \equiv E_m, \ k = m-1, m-2, \ldots, 1 \end{cases} \tag{I.8}$$

При этом $\{\det(\Lambda_k) \neq 0 \neq \det(G_k)\}_{k=1}^{m}$ и прямоугольные операторы $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$ выражаются через операторы $\{\Lambda \text{ и } G\}$ (I.8) в виде

$$\begin{cases} \beta_{k+1} = -(\widetilde{p}_{k+1} \cdot \Lambda_{k+1}^{-1}), \\ c_{k+1} = -(\Lambda_{k+1}^{-1} \cdot \widetilde{r}_{k+1}), \\ \hat{\beta}_{k+1} = -(\widetilde{r}_{k+1} \cdot G_k^{-1}), \\ \hat{c}_{k+1} = -(G_k^{-1} \cdot \widetilde{p}_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1; \end{cases} \tag{I.9}$$

где справедливы следующие порядки умножения для структурных последовательностей операторов

$$\prod_{\mu=q+1}^{p} c_\mu = \begin{cases} c_{q+1} \cdot c_{q+2} \cdots c_p, & \text{если } p > q, \\ E, & \text{если } p \le q; \end{cases} \qquad \prod_{\mu=q+1}^{p} \beta_\mu = \begin{cases} \beta_p \cdot \beta_{p-1} \cdots \beta_{q+1}, & \text{если } p > q \\ E, & \text{если } p \le q; \end{cases} \tag{I.10}$$

$$\prod_{\mu=q+1}^{p} \hat{\beta}_\mu = \begin{cases} \hat{\beta}_{q+1} \cdot \hat{\beta}_{q+2} \cdots \hat{\beta}_p, & \text{если } p > q, \\ E, & \text{если } p \le q; \end{cases} \qquad \prod_{\mu=q+1}^{p} \hat{c}_\mu = \begin{cases} \hat{c}_p \cdot \hat{c}_{p-1} \cdots \hat{c}_{q+1}, & \text{если } p > q \\ E, & \text{если } p \le q. \end{cases} \tag{I.11}$$

Для $\widetilde{\mathcal{B}}_{kk}$ и структурных последовательностей из матриц $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$ имели место также следующие "коммутационные" соотношения

$$\begin{cases} \prod\limits_{s=i+1}^{j} c_s \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj} = \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod\limits_{s=i+1}^{j} \hat{\beta}_s, & \text{для любых } 1 \le i < j \le m, \\ \prod\limits_{s=j+1}^{i} \hat{c}_s \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj} = \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod\limits_{s=j+1}^{i} \beta_s, & \text{для любых } 1 \le j < i \le m. \end{cases} \tag{I.12}$$

$$\begin{cases} (E_i - G_{i-1})\cdot \widetilde{B}_{ii}\cdot \Lambda_{i+1} = \Lambda_{i+1}\cdot \widetilde{B}_{ii}\cdot (E_i - G_{i-1}), \\ G_{i-1}\cdot \widetilde{B}_{ii}\cdot (E_i - \Lambda_{i+1}) = (E_i - \Lambda_{i+1})\cdot \widetilde{B}_{ii}\cdot G_{i-1}, \quad \text{для всех } 1 \le i \le m. \end{cases} \tag{I.13}$$

Кроме того, были получены [5] следующие обратимые итерационные процессы

$$\begin{cases} \begin{cases} \widetilde{B}_{ii} = \hat{C}_{i+1}^{-1}\cdot \widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot \beta_{i+1}, & 1 \le i \le m-1, \\ \widetilde{B}_{ii} = \hat{C}_i \cdot \widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot \beta_i^{-1}, & 2 \le i \le m, \end{cases} \\ \begin{cases} \widetilde{B}_{ii} = C_{i+1}\cdot \widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot \hat{\beta}_{i+1}^{-1}, & 1 \le i \le m-1, \\ \widetilde{B}_{ii} = C_i^{-1}\cdot \widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot \hat{\beta}_i, & 2 \le i \le m, \end{cases} \end{cases} \tag{I.14}$$

в случае, когда все $\{q_i\}_{i=1}^{m}$ – одинаковых размерностей, и общие равенства [6]

$$\begin{cases} \begin{cases} \hat{C}_{i+1}\cdot \widetilde{B}_{ii} = \widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot \beta_{i+1}, & 1 \le i \le m-1, \\ \widetilde{B}_{ii}\cdot \beta_i = \hat{C}_i \cdot \widetilde{B}_{i-1\,i-1}, & 2 \le i \le m, \end{cases} \\ \begin{cases} \widetilde{B}_{ii}\cdot \hat{\beta}_{i+1} = C_{i+1}\cdot \widetilde{B}_{i+1\,i+1}, & 1 \le i \le m-1, \\ C_i \cdot \widetilde{B}_{ii} = \widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot \hat{\beta}_i, & 2 \le i \le m, \end{cases} \end{cases} \tag{I.15}$$

являющиеся обобщением (I.14) в случае, когда $\{q_i\}_{i=1}^{m}$ – разных размерностей.

Замечание I. Анализируя представления 7′(7)÷I0′(I0) для $B = \mathcal{C}^{-1}$, а также представления 5′(5)÷8′(8) для $\mathcal{C}$ мы наблюдаем своеобразную "аннигиляцию" связи (в виде $\widetilde{B}_{ii}$ $(I.8)_{1}$) между процессами $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ $(I.8)_2$, и $(I.8)_3$) при переходе от B к $\mathcal{C}$.

Отмеченный процесс "аннигиляции" как бы обусловливает существование двух независимых представлений 5′ и 7′ для $\mathcal{C}$ (Теорема 7 [6]). С другой стороны, если не использовать представления (I.14) для $\widetilde{B}_{ii}$ и равенства (I.15), которые (как было показано в [6]) по сути отражают двойственные представления для над(под)диагональных блоков у $B = \mathcal{C}^{-1}$, то построение множества представлений для B, рассмотренного в [5,6], становится практически затруднительным.

Следовательно, помимо независимых факторизованных представлений 5′ и 7′ для $\mathcal{C}$ должны существовать и другие представления алгебраического типа, в которых "аннигиляции" связи между $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ не происходит. К рассмотрению этого вопроса мы вернемся в третьем параграфе, а сейчас обратимся к изучению следствий из двух пар обратимых представлений (I.14) для диагональных блоков $\widetilde{B}_{ii}$.

2. Мультипликативные четырех-квазивекторные представления операторов, обратных к неособенным квазитрехдиагональным с неособенными квадратными[x)] элементами-блоками в случае всех отличных от нуля главных угловых квазиминоров

Пусть теперь $\mathcal{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.2) с неособенными квадратными элементами-блоками $\{q_1; q_i, \widetilde{r}_i, \widetilde{p}_i\}_{i=2}^{m}$. Пусть также все главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ отличны от нуля. Для этого случая [5] нами было получено множество факторизованных представлений I÷5 для $B = \mathcal{C}^{-1}$, основанное на аддитивно-мультипликативной процедуре вычисления квазидиагональных блоков $\widetilde{B}_{kk}$, а также множество факторизованных представлений 7÷I0 для $B = \mathcal{C}^{-1}$, основанное на аддитивной процедуре получения $\widetilde{B}_{kk}$ из элементов последовательностей $\{\Lambda, G\}$.

Естественно при этом возникают вопросы:

- о существовании мультипликативных способов определения $\widetilde{B}_{ii}$ с использованием $\{\Lambda, G\}$; а также
- позволяют ли эти способы представлять $B = \mathcal{C}^{-1}$ на основе трех $(\{\widetilde{B}_{ii}, \Pi\beta_i, \Pi C_i\}$ или(и) $\{\widetilde{B}_{ii}, \Pi\hat{C}_i, \Pi\hat{\beta}_i\})$ информативных квазивекторов.

Определение I. Следуя [I,3], будем понимать под четырехквазивекторным представлением оператора $B = \mathcal{C}^{-1}$ запись (представление) его элементов – блоков в виде

$$B_{ij} = \begin{cases} R_i \cdot W_j, & \text{если } 1 \le j \le i \le m, \\ F_i \cdot V_j, & \text{если } 1 \le i \le j \le m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\{R_k, W_k; F_k, V_k\}_{k=1}^{m}$ – матрицы, являющиеся элементами последовательностей ($\equiv$ квазивекторов)

$$\begin{cases} V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}, & R = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}, \\ W = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}, & F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Таким образом, элементы-блоки B_{ij} оператора $B = \mathcal{C}^{-1}$ являются (формально) функцией только от i-го и j-го элементов-блоков квазивекторов (2.2). Справедлива следующая[xx)].

Теорема 8. Трех-квазивекторные факторизованные (алгебраические) представления (7÷I0) для $B = \mathcal{C}^{-1}$ являются генераторами ($\equiv$ "базисом") – I6 различных четырех-квазивекторных факторизованных (алгебраических)

x) Представлений указанного типа (в смысле даваемого ниже определения I) в случае прямоугольных внедиагональных блоков у $\mathcal{C}(1.1)$ не существует.

xx) Напомним, что в этой серии работ принята единая нумерация теорем и лемм.

представлений вида (2.I) на основе единственного аддитивного представления квазидиагональных блоков

$$\widetilde{B}_{ii} = (\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E_i)^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \qquad \text{а также} \tag{2.3}$$

– 256 различных мультипликативных факторизованных (алгебраических), представлений вида (2.I) на основе следующих четырех различных мультипликативных представлений для квазидиагональных блоков

$$\begin{cases} \begin{cases} \widetilde{B}_{ii} = \left(\prod\limits_{k=2}^{i} c_k\right)^{-1} \cdot [\widetilde{B}_{11} = G_0^{-1}] \cdot \left(\prod\limits_{k=2}^{i} \hat{\beta}_k\right), \\ \widetilde{B}_{ii} = \left(\prod\limits_{k=2}^{i} \hat{c}_k\right) \cdot [\widetilde{B}_{11} = G_0^{-1}] \cdot \left(\prod\limits_{k=2}^{i} \beta_k\right)^{-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, m; \end{cases} \\ \begin{cases} \widetilde{B}_{ii} = \left(\prod\limits_{k=i+1}^{m} c_k\right) \cdot [\widetilde{B}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1}] \cdot \left(\prod\limits_{k=i+1}^{m} \hat{\beta}_k\right)^{-1}, \\ \widetilde{B}_{ii} = \left(\prod\limits_{k=i+1}^{m} \hat{c}_k\right)^{-1} \cdot [\widetilde{B}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1}] \cdot \left(\prod\limits_{k=i+1}^{m} \beta_k\right), \quad i = m-1, m-2, \ldots, 1, \end{cases} \end{cases} \tag{2.4}$$

где элементы $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$ и $\{\Lambda, G\}$ – структурных последовательностей (I.IO), (I.II) определены в (I.8)+(I.9) и для них справедливы указанные порядки умножения.

Доказательство. Сначала, исходя из представлений 7+IO, покажем справедливость I6-ти четырех-квазивекторных представлений при условии $\widetilde{B}_{kk}$(2.3). При условиях (I.IO) и (I.II), произведения $\left\{ \prod\limits_{\gamma=j+1}^{i} \beta_\gamma; \ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j} c_\mu; \ \prod\limits_{\mu=j+1}^{i} \hat{c}_\mu; \ \prod\limits_{\gamma=i+1}^{j} \hat{\beta}_\gamma \right\}$ единственным образом представимы в виде

$$\prod_{\gamma=j+1}^{i} \beta_\gamma \stackrel{j \le i}{=\!=} \begin{cases} \left(\prod\limits_{\gamma=i+1}^{m} \beta_\gamma\right)^{-1} \cdot \prod\limits_{\gamma=j+1}^{m} \beta_\gamma, \\ \prod\limits_{\gamma=2}^{i} \beta_\gamma \cdot \left(\prod\limits_{\gamma=2}^{j} \beta_\gamma\right)^{-1}; \end{cases} \qquad \prod_{\mu=i+1}^{j} c_\mu \stackrel{i \le j}{=\!=} \begin{cases} \left(\prod\limits_{\mu=2}^{i} c_\mu\right)^{-1} \cdot \prod\limits_{\mu=2}^{j} c_\mu, \\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{m} c_\mu \cdot \left(\prod\limits_{\mu=j+1}^{m} c_\mu\right)^{-1}; \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\prod_{\mu=j+1}^{i} \hat{c}_\mu \stackrel{j \le i}{=\!=} \begin{cases} \left(\prod\limits_{\mu=i+1}^{m} \hat{c}_\mu\right)^{-1} \cdot \prod\limits_{\mu=j+1}^{m} \hat{c}_\mu, \\ \prod\limits_{\mu=2}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \left(\prod\limits_{\mu=2}^{j} \hat{c}_\mu\right)^{-1}; \end{cases} \qquad \prod_{\gamma=i+1}^{j} \hat{\beta}_\gamma \stackrel{i \le j}{=\!=} \begin{cases} \left(\prod\limits_{\gamma=2}^{i} \hat{\beta}_\gamma\right)^{-1} \cdot \prod\limits_{\gamma=2}^{j} \hat{\beta}_\gamma, \\ \prod\limits_{\gamma=i+1}^{m} \hat{\beta}_\gamma \cdot \left(\prod\limits_{\gamma=j+1}^{m} \hat{\beta}_\gamma\right)^{-1}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Теперь, подставив (2.5) и (2.6) в представления 7,8, получаем[x)]

$$B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} \begin{cases} \left[\widetilde{B}_{ii} \cdot \left(\prod\limits_{k=i+1}^{m} \beta_k\right)^{-1}\right] \cdot \prod\limits_{k=j+1}^{m} \beta_k, \ \text{либо} \\ \left[\widetilde{B}_{ii} \cdot \prod\limits_{k=2}^{i} \beta_k\right] \cdot \left(\prod\limits_{k=2}^{j} \beta_k\right)^{-1}; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_{11}, \ \text{либо} \\ A_{12}, \ \text{если } 1 \le j \le i \le m \end{cases} \end{cases} \tag{2.7}$$

x) В дальнейшем для сокращения записей будем пользоваться вместо B_{ij} (2.7), (2.8) обозначениями:
$\{A_{ik}\}_{i,k=1}^{2}$ – (k – е выражение) в A_i -представлении (2.7). Например, $A_{21} = \left(\prod\limits_{k=2}^{i} c_k\right)^{-1} \cdot \left[\prod\limits_{k=2}^{j} c_k \cdot \widetilde{B}_{jj}\right]$, аналогично $\{B_{jl}\}_{j,l=1}^{2}$ – – (l – е выражение) в B_j -представлении (2.8). Например, $B_{12} = \prod\limits_{k=2}^{i} \hat{c}_k \cdot \left[\left(\prod\limits_{k=2}^{j} \hat{c}_k\right)^{-1} \cdot \widetilde{B}_{jj}\right]$.

$$B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} \left(\prod\limits_{k=2}^{i} c_k\right)^{-1} \cdot \left[\prod\limits_{k=2}^{j} c_k \cdot \widetilde{B}_{jj}\right], \ \text{либо} \\ \prod\limits_{k=i+1}^{m} c_k \cdot \left[\left(\prod\limits_{k=j+1}^{m} c_k\right)^{-1} \cdot \widetilde{B}_{jj}\right]; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_{21}, \ \text{либо} \\ A_{22}; \ \text{если } 1 \le i \le j \le m. \end{cases}$$

$$B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} \begin{cases} \left(\prod\limits_{k=i+1}^{m} \hat{c}_k\right)^{-1} \cdot \left[\prod\limits_{k=j+1}^{m} \hat{c}_k \cdot \widetilde{B}_{jj}\right], \ \text{либо} \\ \prod\limits_{k=2}^{i} \hat{c}_k \cdot \left[\left(\prod\limits_{k=2}^{j} \hat{c}_k\right)^{-1} \cdot \widetilde{B}_{jj}\right]; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B_{11}, \ \text{либо} \\ B_{12}, \ \text{если } 1 \le j \le i \le m, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\widetilde{B}_{ii} \cdot \left(\prod\limits_{k=2}^{i} \hat{\beta}_k\right)^{-1}\right] \cdot \prod\limits_{k=2}^{j} \hat{\beta}_k, \ \text{либо} \\ \left[\widetilde{B}_{ii} \cdot \prod\limits_{k=i+1}^{m} \hat{\beta}_k\right] \cdot \left(\prod\limits_{k=j+1}^{m} \hat{\beta}_k\right)^{-1}; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B_{21}, \ \text{либо} \\ B_{22}, \ \text{если } 1 \le i \le j \le m. \end{cases} \end{cases} \tag{2.8}$$

А также вместо представлений 9 и IO, воспользовавшись (2.5), (2.6) и введенными выше обозначениями (в соответствии с теоремой 6 [6]), получаем

$$B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} \begin{cases} A_{11}, \ \text{либо} \\ A_{21}, \ \text{если } 1 \le j \le i \le m, \end{cases} \\ \begin{cases} B_{21}, \ \text{либо} \\ B_{22}, \ \text{если } 1 \le i \le j \le m; \end{cases} \end{cases} \qquad B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} \begin{cases} B_{11}, \ \text{либо} \\ B_{12}, \ \text{если } 1 \le j \le i \le m, \end{cases} \\ \begin{cases} A_{21}, \ \text{либо} \\ A_{22}, \ \text{если } 1 \le i \le j \le m. \end{cases} \end{cases} \tag{2.9}$$

Далее строим множество всевозможных представлений для B_{ij}, сначала рассматривая все комбинации в каждом из представлений (2.7)+(2.9). Итак, имеем

$$B_{ij}(2.7) = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} (A_{11}, A_{21}); (A_{11}, A_{22}); (A_{12}, A_{21}); (A_{12}, A_{22}); \\ (A_{21}, A_{11}); (A_{21}, A_{12}); (A_{22}, A_{11}); (A_{22}, A_{12}). \end{cases} \tag{2.IO}$$

$$B_{ij}(2.8) = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} (B_{11}, B_{21}); (B_{11}, B_{22}); (B_{12}, B_{21}); (B_{12}, B_{22}); \\ (B_{21}, B_{11}); (B_{21}, B_{12}); (B_{22}, B_{11}); (B_{22}, B_{12}). \end{cases} \tag{2.II}$$

$$B_{ij}(2.9)_{1)} = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} (A_{11}, B_{21}); (A_{11}, B_{22}); (A_{12}, B_{21}); (A_{12}, B_{22}); \\ (B_{21}, A_{11}); (B_{21}, A_{12}); (B_{22}, A_{11}); (B_{22}, A_{12}). \end{cases} \tag{2.I2}$$

$$B_{ij}(2.9)_{2)} = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} (B_{11}, A_{21}); (B_{11}, A_{22}); (B_{12}, A_{21}); (B_{12}, A_{22}); \\ (A_{21}, B_{11}); (A_{21}, B_{12}); (A_{22}, B_{11}); (A_{22}, B_{12}). \end{cases} \tag{2.I3}$$

Как видим, в каждом из множеств (2.IO)+(2.I3) остается (в соответствии с определением I) лишь по четыре различных представления. В итоге получаем I6 различных представлений для $B = C^{-1}$, т.е.

$$B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} (A_{11}, A_{21}); (A_{11}, A_{22}); (A_{12}, A_{21}); (A_{12}, A_{22}); \\ (B_{11}, B_{21}); (B_{11}, B_{22}); (B_{12}, B_{21}); (B_{12}, B_{22}); \\ (A_{11}, B_{21}); (A_{11}, B_{22}); (A_{12}, B_{21}); (A_{12}, B_{22}); \\ (B_{11}, A_{21}); (B_{11}, A_{22}); (B_{12}, A_{21}); (B_{12}, A_{22}), \quad \text{где} \end{cases} \tag{2.I4}$$

$\widetilde{B}_{ii}$ имеет вид (2.3) и $\{c_k, \hat{c}_k; \beta_k, \hat{\beta}_k; \Lambda_k, G_k\}_{k=2}^{m}$ – определены в (I.8) и (I.9). В итоге получили I6 независимых единственных факторизованных (алгебраических) представлений (2.I4) для $B = \mathcal{C}^{-1}$ и тем самым доказали справедливость первой части теоремы. Докажем теперь вторую часть теоремы, начав его с доказательства справедливости процессов (2.4).

Если в равенствах (I.I4) воспользоваться [5] граничными условиями $\widetilde{B}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1}$ и $G_0^{-1} = \widetilde{B}_{11}$, а также выполнить свертки в соответствии с методом полной математической индукции, то (с учетом порядков умножения операторов $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$ (I.I0) и (I.II)) получим четыре различные представления для $\widetilde{B}_{ii}$ в виде (2.4).

Замечание 2. Прежде чем продолжить доказательство теоремы, отметим следующее. В работах [5,6] представления 7÷I0 для элементов-блоков $B = \mathcal{C}^{-1}$ (в случае задания $\widetilde{B}_{ii}$ в виде аддитивной скобки (I.8)) нами были названы трех-квазивекторными (в отличие от четырех-квазивекторных, данных в определении I). При этом (как видим) квазидиагональные матрицы – $quasidiag(\widetilde{B}_{ii})$, а также нижнетреугольные – ($\prod_{k=j+1}^{i}\beta_k$ и $\prod_{k=j+1}^{i}\hat{c}_k$) и соответственно верхнетругольные – ($\prod_{k=i+1}^{j}c_k$ и $\prod_{k=i+1}^{j}\hat{\beta}_k$) матрицы (для сохранения общности терминологии) нами были названы квазивекторами (либо структурными последовательностями). Исходя из введенных таким образом определений, проанализируем следующие записи представлений $\widetilde{B}_{ij}$ (2.I4) (например, для (A_{11}, B_{21}) и (B_{12}, B_{21}))

$$\widetilde{B}_{ii}\cdot\begin{cases}\Big[\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\Big]^{-1}\cdot\prod_{k=j+1}^{m}\beta_k, & 1\le j\le i\le m,\\ \Big[\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\Big]^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k, & 1\le i\le j\le m;\end{cases} = (A_{11}, B_{21}) = \begin{cases}\Big[\widetilde{B}_{ii}\cdot\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\Big)^{-1}\Big]\cdot\prod_{k=j+1}^{m}\beta_k, & 1\le j\le i\le m,\\ \Big[\widetilde{B}_{ii}\cdot\Big(\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\Big)^{-1}\Big]\cdot\prod_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k, & 1\le i\le j\le m;\end{cases} \qquad (2.I4)'$$

$$\widetilde{B}_{ii}\cdot\begin{cases}\Big[\widetilde{B}_{ii}^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{i}\hat{c}_k\Big]\cdot\Big[\Big(\prod_{k=2}^{j}\hat{c}_k\Big)^{-1}\cdot\widetilde{B}_{jj}\Big], & j\le i,\\ \Big(\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\Big)^{-1}\cdot\Big(\prod_{k=2}^{j}\beta_k\Big), & i\le j;\end{cases} = (B_{12}, B_{21}) = \left.\begin{cases}\prod_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\Big[\prod_{k=2}^{j}\hat{c}_k\Big]^{-1}, & j\le i,\\ \Big[\widetilde{B}_{ii}\cdot\Big(\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\Big)^{-1}\Big]\Big[\prod_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k\cdot\widetilde{B}_{jj}^{-1}\Big], & i\le j\end{cases}\right\}\cdot\widetilde{B}_{jj} \qquad (2.I4)''$$

$$(B_{12}, B_{21}) = \begin{cases}\Big(\prod_{k=2}^{i}\hat{c}_k\Big)\cdot\Big[\prod_{k=2}^{j}\hat{c}_k\cdot\widetilde{B}_{jj}\Big], & 1\le j\le i\le m,\\ \Big[\widetilde{B}_{ii}\cdot\Big(\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\Big)^{-1}\Big]\cdot\Big(\prod_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k\Big), & 1\le i\le j\le m.\end{cases} \qquad (2.I4)'''$$

Как видим, представление элементов-блоков матрицы (A_{11}, B_{21}) в виде левой и правой частей в (2.I4)′ теоретически и (численно) дают одни и те же значения. Однако если представление (A_{11}, B_{21}) в виде правой части в (2.I4)′ удовлетворяет формально определению I четырех-квазивекторного представления для $B = \mathcal{C}^{-1}$, то представление в виде левой части в (2.I4)′ этому определению (в строгом смысле), вообще говоря, не соответствуют, поскольку i -компоненты оказываются, в свою очередь, факторизованными. С точки зрения вычислений на ЭВМ левое представление в (2.I4)′ фактически означало бы запоминание B в памяти ЭВМ в виде пяти-квазивекторов – $\Big\{\widetilde{B}_{ii}, \Big[\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\Big]^{-1}, \prod_{k=j+1}^{m}\beta_k, \Big[\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\Big]^{-1}$ и $\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\Big\}$ вместо четырех-квазивекторов – $\Big\{\widetilde{B}_{ii}\cdot\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\Big)^{-1}, \prod_{k=j+1}^{m}\beta_k$ и $\widetilde{B}_{ii}\cdot\Big(\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\Big)^{-1}, \prod_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k\Big\}$. Аналогичная же ситуация возникает при анализе представлений (B_{12}, B_{21}) в виде (2.I4)″ и (2.I4)‴. Подобные рассуждения можно выполнить для любого из различных представлений (2.I4). Поэтому дальше мы будем анализировать только четырех-квазивекторные представления в смысле определения I.

Учитывая четыре представления (2.4) для $\widetilde{B}_{kk}$, выражения для нижнетреугольных $\{A_{11}, A_{12}; B_{11}, B_{12}\}$ и верхнетреугольных $\{A_{21}, A_{22}; B_{21}, B_{22}\}$ операторов (одновременно вводя сокращенные обозначения для произведений операторов как функций от индексов i и j в соответствии с определением I) запишем как

$$\begin{cases} A_{11} = \begin{cases}\Big[\Big(\prod_{k=2}^{i}c_k\Big)^{-1}\cdot\widetilde{B}_{11}\cdot\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\cdot\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\Big)^{-1}\Big]\cdot\prod_{k=j+1}^{m}\beta_k,\\ \Big[\prod_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\widetilde{B}_{11}\cdot\Big(\prod_{k=2}^{i}\beta_k\Big)^{-1}\cdot\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\Big)^{-1}\Big]\cdot\prod_{k=j+1}^{m}\beta_k,\\ \Big[\prod_{k=i+1}^{m}c_k\cdot\widetilde{B}_{mm}\cdot\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\Big)^{-1}\cdot\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\Big)^{-1}\Big]\cdot\prod_{k=j+1}^{m}\beta_k,\\ \Big[\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k\Big)^{-1}\cdot\widetilde{B}_{mm}\cdot\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\cdot\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\Big)^{-1}\Big]\cdot\prod_{k=j+1}^{m}\beta_k;\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}R_1\cdot W_1,\\ R_2\cdot W_1,\\ R_3\cdot W_1,\\ R_4\cdot W_1;\end{cases}\\ A_{12} = \begin{cases}\Big[\Big(\prod_{k=2}^{i}c_k\Big)^{-1}\cdot\widetilde{B}_{11}\cdot\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\cdot\prod_{k=2}^{i}\beta_k\Big]\cdot\Big(\prod_{k=2}^{j}\beta_k\Big)^{-1},\\ \Big[\prod_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\widetilde{B}_{11}\cdot\Big(\prod_{k=2}^{i}\beta_k\Big)^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{i}\beta_k\Big]\cdot\Big(\prod_{k=2}^{j}\beta_k\Big)^{-1},\\ \Big[\prod_{k=i+1}^{m}c_k\cdot\widetilde{B}_{mm}\cdot\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\Big)^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{i}\beta_k\Big]\cdot\Big(\prod_{k=2}^{j}\beta_k\Big)^{-1},\\ \Big[\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k\Big)^{-1}\cdot\widetilde{B}_{mm}\cdot\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k\cdot\prod_{k=2}^{i}\beta_k\Big]\cdot\Big(\prod_{k=2}^{j}\beta_k\Big)^{-1};\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\hat{R}_1\cdot\hat{W}_1,\\ \hat{R}_2\cdot\hat{W}_1,\\ \hat{R}_3\cdot\hat{W}_1,\\ \hat{R}_4\cdot\hat{W}_1;\end{cases}\\ \text{для всех } 1\le j\le i\le m.\end{cases} \qquad (2.I5)$$

$$B_{11} = \begin{cases}\Big(\prod_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k\Big)^{-1}\cdot\Big[\prod_{k=j+1}^{m}\hat{c}_k\cdot\Big(\prod_{k=2}^{j}c_k\Big)^{-1}\cdot\widetilde{B}_{11}\cdot\prod_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k\Big],\\ \Big(\prod_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k\Big)^{-1}\cdot\Big[\prod_{k=j+1}^{m}\hat{c}_k\cdot\prod_{k=2}^{j}\hat{c}_k\cdot\widetilde{B}_{11}\cdot\Big(\prod_{k=2}^{j}\beta_k\Big)^{-1}\Big],\\ \Big(\prod_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k\Big)^{-1}\cdot\Big[\prod_{k=j+1}^{m}\hat{c}_k\cdot\prod_{k=j+1}^{m}c_k\cdot\widetilde{B}_{mm}\cdot\Big(\prod_{k=j+1}^{m}\hat{\beta}_k\Big)^{-1}\Big],\\ \Big(\prod_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k\Big)^{-1}\cdot\Big[\prod_{k=j+1}^{m}\hat{c}_k\cdot\Big(\prod_{k=j+1}^{m}\hat{c}_k\Big)^{-1}\cdot\widetilde{B}_{mm}\cdot\prod_{k=j+1}^{m}\beta_k\Big];\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\widetilde{R}_1\cdot\widetilde{W}_1,\\ \widetilde{R}_1\cdot\widetilde{W}_2,\\ \widetilde{R}_1\cdot\widetilde{W}_3,\\ \widetilde{R}_1\cdot\widetilde{W}_4;\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
B_{12}=\begin{cases}
\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\Big[\big(\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{c}_k\big)^{-1}\big(\prod\limits_{k=2}^{j}c_k\big)^{-1}\tilde{B}_{11}\cdot\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k\Big], \\
\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\Big[\big(\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{c}_k\big)^{-1}\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{c}_k\cdot\tilde{B}_{11}\cdot\big(\prod\limits_{k=2}^{j}\beta_k\big)^{-1}\Big], \\
\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\Big[\big(\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{c}_k\big)^{-1}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{m}c_k\cdot\tilde{B}_{mm}\cdot\big(\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\big)^{-1}\Big], \\
\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\Big[\big(\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{c}_k\big)^{-1}\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\hat{c}_k\big)^{-1}\tilde{B}_{mm}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{m}\beta_k\Big];
\end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases}
\hat{\tilde{R}}_1\cdot\hat{\tilde{W}}_1, \\
\hat{\tilde{R}}_1\cdot\hat{\tilde{W}}_2, \\
\hat{\tilde{R}}_1\cdot\hat{\tilde{W}}_3, \\
\hat{\tilde{R}}_1\cdot\hat{\tilde{W}}_4;
\end{cases} \\
\text{для всех } 1\le j\le i\le m.
\end{cases}
\qquad (2.16)
$$

$$
\begin{cases}
A_{21}=\begin{cases}
\big(\prod\limits_{k=2}^{i}c_k\big)^{-1}\Big[\prod\limits_{k=2}^{j}c_k\cdot\big(\prod\limits_{k=2}^{j}c_k\big)^{-1}\tilde{B}_{11}\cdot\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k\Big], \\
\big(\prod\limits_{k=2}^{i}c_k\big)^{-1}\Big[\prod\limits_{k=2}^{j}c_k\cdot\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{c}_k\cdot\tilde{B}_{11}\cdot\big(\prod\limits_{k=2}^{j}\beta_k\big)^{-1}\Big], \\
\big(\prod\limits_{k=2}^{i}c_k\big)^{-1}\Big[\prod\limits_{k=2}^{j}c_k\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{m}c_k\cdot\tilde{B}_{mm}\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\hat{\beta}_k\big)^{-1}\Big], \\
\big(\prod\limits_{k=2}^{i}c_k\big)^{-1}\Big[\prod\limits_{k=2}^{j}c_k\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\hat{c}_k\big)^{-1}\tilde{B}_{mm}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{m}\beta_k\Big];
\end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases}
F_1\cdot V_1, \\
F_1\cdot V_2, \\
F_1\cdot V_3, \\
F_1\cdot V_4;
\end{cases} \\
A_{22}=\begin{cases}
\prod\limits_{k=i+1}^{m}c_k\cdot\Big[\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}c_k\big)^{-1}\big(\prod\limits_{k=2}^{j}c_k\big)^{-1}\tilde{B}_{11}\cdot\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k\Big], \\
\prod\limits_{k=i+1}^{m}c_k\cdot\Big[\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}c_k\big)^{-1}\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{c}_k\cdot\tilde{B}_{11}\cdot\big(\prod\limits_{k=2}^{j}\beta_k\big)^{-1}\Big], \\
\prod\limits_{k=i+1}^{m}c_k\cdot\Big[\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}c_k\big)^{-1}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{m}c_k\cdot\tilde{B}_{mm}\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\hat{\beta}_k\big)\Big], \\
\prod\limits_{k=i+1}^{m}c_k\cdot\Big[\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}c_k\big)^{-1}\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\hat{c}_k\big)^{-1}\tilde{B}_{mm}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{m}\beta_k\Big];
\end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases}
\hat{F}_1\cdot\hat{V}_1, \\
\hat{F}_1\cdot\hat{V}_2, \\
\hat{F}_1\cdot\hat{V}_3, \\
\hat{F}_1\cdot\hat{V}_4;
\end{cases} \\
\text{для всех } 1\le i\le j\le m.
\end{cases}
\qquad (2.17)
$$

$$
\begin{cases}
B_{21}=\begin{cases}
\Big[\big(\prod\limits_{k=2}^{i}c_k\big)^{-1}\tilde{B}_{11}\cdot\prod\limits_{k=2}^{i}\beta_k\cdot\big(\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\big)^{-1}\Big]\cdot\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k, \\
\Big[\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\tilde{B}_{11}\cdot\big(\prod\limits_{k=2}^{i}\beta_k\big)^{-1}\big(\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\big)^{-1}\Big]\cdot\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k, \\
\Big[\prod\limits_{k=i+1}^{m}c_k\cdot\tilde{B}_{mm}\cdot\big(\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\big)^{-1}\big(\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\big)^{-1}\Big]\cdot\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k, \\
\Big[\big(\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k\big)^{-1}\cdot\tilde{B}_{mm}\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{m}\beta_k\cdot\big(\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k\big)^{-1}\Big]\cdot\prod\limits_{k=2}^{j}\hat{\beta}_k;
\end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases}
\tilde{F}_1\cdot\tilde{V}_1, \\
\tilde{F}_2\cdot\tilde{V}_1, \\
\tilde{F}_3\cdot\tilde{V}_1, \\
\tilde{F}_4\cdot\tilde{V}_1;
\end{cases} \\
B_{22}=\begin{cases}
\Big[\big(\prod\limits_{k=2}^{i}c_k\big)^{-1}\tilde{B}_{11}\cdot\prod\limits_{k=2}^{i}\beta_k\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\Big]\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\beta_k\big)^{-1}, \\
\Big[\prod\limits_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot\tilde{B}_{11}\big(\prod\limits_{k=2}^{i}\beta_k\big)^{-1}\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\Big]\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\beta_k\big)^{-1}, \\
\Big[\prod\limits_{k=i+1}^{m}c_k\cdot\tilde{B}_{mm}\cdot\big(\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\big)^{-1}\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\Big]\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\beta_k\big)^{-1}, \\
\Big[\big(\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k\big)^{-1}\tilde{B}_{mm}\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{m}\beta_k\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{m}\hat{\beta}_k\Big]\cdot\big(\prod\limits_{k=j+1}^{m}\beta_k\big)^{-1};
\end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases}
\hat{\tilde{F}}_1\cdot\hat{\tilde{V}}_1, \\
\hat{\tilde{F}}_2\cdot\hat{\tilde{V}}_1, \\
\hat{\tilde{F}}_3\cdot\hat{\tilde{V}}_1, \\
\hat{\tilde{F}}_4\cdot\hat{\tilde{V}}_1;
\end{cases} \\
\text{для всех } 1\le i\le j\le m.
\end{cases}
\qquad (2.18)
$$

А также в (2.15)÷(2.18) $\tilde{B}_{11}$ и $\tilde{B}_{mm}$ определены в виде $\tilde{B}_{11}=G_0^{-1}$; $\tilde{B}_{mm}=\Lambda_{m+1}^{-1}$. Теперь, учитывая обозначения правых частей в (2.15)÷(2.18), построим множества представлений для B(2.14).

Например, множество мультипликативных четырех-квазивекторных представлений для $B=C^{-1}$, соответствующих первому представлению $B_{ij}=q_i^{-1}\cdot(A_{11},A_{21})$ в (2.14), порождается всевозможными комбинациями из следующих четырех представлений для нижнего (верхнего) матричных треугольников соответственно

$$
B_{ij}(A_{11},A_{21})=q_i^{-1}
\begin{cases}
\begin{cases}
R_1\cdot W_1, \\
R_2\cdot W_1, \\
R_3\cdot W_1, \\
R_4\cdot W_1, \text{ если } 1\le j\le i\le m;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
F_1\cdot V_1, \\
F_1\cdot V_2, \\
F_1\cdot V_3, \\
F_1\cdot V_4, \text{ если } 1\le i\le j\le m.
\end{cases}
\end{cases}
\qquad (2.19)
$$

В итоге получаем шестнадцать следующих различных представлений[x)]

$$
B_{ij}(A_{11},A_{21})=q_i^{-1}
\begin{cases}
(R_1\cdot W_1,F_1\cdot V_1);\ (R_1\cdot W_1,F_1\cdot V_2);\ (R_1\cdot W_1,F_1\cdot V_3);\ (R_1\cdot W_1,F_1\cdot V_4); \\
(R_2\cdot W_1,F_1\cdot V_1);\ (R_2\cdot W_1,F_1\cdot V_2);\ (R_2\cdot W_1,F_1\cdot V_3);\ (R_2\cdot W_1,F_1\cdot V_4); \\
(R_3\cdot W_1,F_1\cdot V_1);\ (R_3\cdot W_1,F_1\cdot V_2);\ (R_3\cdot W_1,F_1\cdot V_3);\ (R_3\cdot W_1,F_1\cdot V_4); \\
(R_4\cdot W_1,F_1\cdot V_1);\ (R_4\cdot W_1,F_1\cdot V_2);\ (R_4\cdot W_1,F_1\cdot V_3);\ (R_4\cdot W_1,F_1\cdot V_4).
\end{cases}
\qquad (2.20)
$$

Аналогично получаем по шестнадцать различных представлений для каждого из других элементов генератора (2.14). В результате множество представлений B (2.20) пополняется следующими представлениями, которые вместе с (2.20) образуют по сути систематический каталог (таблицу) всевозможных различных мультипликативных четырех-квазивекторных представлений для $B=C^{-1}$.

$$
B_{ij}(A_{11},A_{21})=q_i^{-1}
\begin{cases}
(R_1\cdot W_1,F_1\cdot V_1);\ (R_1\cdot W_1,F_1\cdot V_2);\ (R_1\cdot W_1,F_1\cdot V_3);\ (R_1\cdot W_1,F_1\cdot V_4); \\
(R_2\cdot W_1,F_1\cdot V_1);\ (R_2\cdot W_1,F_1\cdot V_2);\ (R_2\cdot W_1,F_1\cdot V_3);\ (R_2\cdot W_1,F_1\cdot V_4); \\
(R_3\cdot W_1,F_1\cdot V_1);\ (R_3\cdot W_1,F_1\cdot V_2);\ (R_3\cdot W_1,F_1\cdot V_3);\ (R_3\cdot W_1,F_1\cdot V_4); \\
(R_4\cdot W_1,F_1\cdot V_1);\ (R_4\cdot W_1,F_1\cdot V_2);\ (R_4\cdot W_1,F_1\cdot V_3);\ (R_4\cdot W_1,F_1\cdot V_4).
\end{cases}
\qquad (2.21)_{1}
$$

---

x) Отметим, что в каждом представлении (в круглых скобках), входящем в множество (2.20), на первом месте (до запятой), в соответствии с определением I, стоят нижнетреугольные матрицы (например, $R_1\cdot W_1$) и соответственно на втором месте (после запятой) стоят верхнетреугольные матрицы (например, $F_1\cdot V_1$), из которых складывается матрица $B=C^{-1}$. Такой же порядок записи сохраняется ниже и для множеств представлений B, генерируемых любым другим из представлений (2.14).

$$B_{ij}(A_{11},A_{22}) = q_i^{-1}\begin{cases} (R_1\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (R_1 W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (R_1\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (R_1 W_1,\ \hat F_1\hat V_4);\\ (R_2\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (R_2\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (R_2 W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (R_2 W_1,\ \hat F_1\hat V_4);\\ (R_3\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (R_3\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (R_3 W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (R_3 W_1,\ \hat F_1\hat V_4);\\ (R_4\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (R_4\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (R_4\cdot W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (R_4 W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_4). \end{cases} \qquad (2.21)_2$$

$$B_{ij}(A_{12},A_{21}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ F_1\cdot V_1);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ F_1\cdot V_2);\ (\hat R_1\hat W_1,\ F_1\cdot V_3);\ (\hat R_1\hat W_1,\ F_1\cdot V_4);\\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ F_1\cdot V_1);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ F_1\cdot V_2);\ (\hat R_2\hat W_1,\ F_1\cdot V_3);\ (\hat R_2\hat W_1,\ F_1\cdot V_4);\\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ F_1\cdot V_1);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ F_1\cdot V_2);\ (\hat R_3\hat W_1,\ F_1\cdot V_3);\ (\hat R_3\hat W_1,\ F_1\cdot V_4);\\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ F_1\cdot V_1);\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ F_1\cdot V_2);\ (\hat R_4\hat W_1,\ F_1\cdot V_3);\ (\hat R_4\hat W_1,\ F_1\cdot V_4). \end{cases} \qquad (2.21)_3$$

$$B_{ij}(A_{12},A_{22}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\hat R_1\hat W_1,\ \hat F_1\hat V_4);\\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\hat R_2\hat W_1,\ \hat F_1\hat V_4);\\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\hat R_3\hat W_1,\ \hat F_1\hat V_4);\\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\hat R_4\hat W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\hat R_4\hat W_1,\ \hat F_1\hat V_4). \end{cases} \qquad (2.21)_4$$

$$B_{ij}(B_{11},B_{21}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \tilde F_3\tilde V_1);\ (\tilde R_1\tilde W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \tilde F_1\tilde V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \tilde F_3\tilde V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \tilde F_4\tilde V_1);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\tilde R_1\tilde W_3,\ \tilde F_3\tilde V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \tilde F_4\tilde V_1);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\tilde R_1\tilde W_4,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\tilde R_1\tilde W_4,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1). \end{cases} \qquad (2.21)_5$$

$$B_{ij}(B_{11},B_{22}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\tilde R_1\,\tilde W_1,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\tilde W_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (\tilde R_1\,\tilde W_2,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\tilde W_2,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\tilde W_3,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1). \end{cases} \qquad (2.21)_6$$

$$B_{ij}(B_{12},B_{21}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\,\hat{\hat W}_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \tilde F_4\tilde V_1);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \tilde F_1\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1). \end{cases} \qquad (2.21)_7$$

$$B_{ij}(B_{12},B_{22}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\,\hat{\hat W}_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2),\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \hat{\hat F}_4\hat{\hat V}_1);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1). \end{cases} \qquad (2.21)_8$$

$$B_{ij}(A_{11},B_{21}) = q_i^{-1}\begin{cases} (R_1\cdot W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (R_1\cdot W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (R_1\cdot W_1,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (R_1\cdot W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (R_2\cdot W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (R_2\cdot W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (R_2\cdot W_1,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (R_2\cdot W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (R_3\cdot W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_2);\ (R_3\cdot W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (R_3\cdot W_1,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (R_3\cdot W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (R_4\cdot W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_2);\ (R_4\cdot W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (R_4\cdot W_1,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (R_4\cdot W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1). \end{cases} \qquad (2.21)_9$$

$$B_{ij}(A_{11},B_{22}) = q_i^{-1}\begin{cases} (R_1\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_1\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_1\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_1\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (R_2\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_2\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_2\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_2\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (R_3\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_3\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_3\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_3\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (R_4\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_4\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_4\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (R_4\cdot W_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1). \end{cases} \qquad (2.21)_{10}$$

$$B_{ij}(A_{12},B_{21}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \tilde F_3\tilde V_1);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1);\\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \tilde F_1\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \tilde F_2\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \tilde F_3\cdot\tilde V_1);\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \tilde F_4\cdot\tilde V_1). \end{cases} \qquad (2.21)_{11}$$

$$B_{ij}(A_{12},B_{22}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_1\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_1\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_4\hat{\hat V}_1);\\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_1\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_3\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_2\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_1\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_3\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_3\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1);\\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_1\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_2\cdot\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_3\hat{\hat V}_1);\ (\hat R_4\cdot\hat W_1,\ \hat{\hat F}_4\cdot\hat{\hat V}_1). \end{cases} \qquad (2.21)_{12}$$

$$B_{ij}(B_{11},A_{21}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ F_1\cdot V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ F_1\cdot V_2);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ F_1\cdot V_3);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ F_1\cdot V_4);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ F_1\cdot V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ F_1\cdot V_2);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ F_1\cdot V_3);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ F_1\cdot V_4);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ F_1\cdot V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ F_1\cdot V_2);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ F_1\cdot V_3);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ F_1\cdot V_4);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ F_1\cdot V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ F_1\cdot V_2);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ F_1\cdot V_3);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ F_1\cdot V_4). \end{cases} \qquad (2.21)_{13}$$

$$B_{ij}(B_{11},A_{22}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_4);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_2,\ \hat F_1\cdot\hat V_4);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_3,\ \hat F_1\cdot\hat V_4);\\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\tilde R_1\cdot\tilde W_4,\ \hat F_1\cdot\hat V_4). \end{cases} \qquad (2.21)_{14}$$

$$B_{ij}(B_{12},A_{21}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ F_1\cdot V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ F_1\cdot V_2);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ F_1\cdot V_3);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ F_1\cdot V_4);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ F_1\cdot V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ F_1\cdot V_2);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ F_1\cdot V_3);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ F_1\cdot V_4);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ F_1\cdot V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ F_1\cdot V_2);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ F_1\cdot V_3);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ F_1\cdot V_4);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ F_1\cdot V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ F_1\cdot V_2);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ F_1\cdot V_3);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ F_1\cdot V_4). \end{cases} \qquad (2.21)_{15}$$

$$B_{ij}(B_{12},A_{22}) = q_i^{-1}\begin{cases} (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_1,\ \hat F_1\cdot\hat V_4);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_2,\ \hat F_1\cdot\hat V_4);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_3,\ \hat F_1\cdot\hat V_4);\\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \hat F_1\cdot\hat V_1);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \hat F_1\cdot\hat V_2);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \hat F_1\cdot\hat V_3);\ (\hat{\hat R}_1\cdot\hat{\hat W}_4,\ \hat F_1\cdot\hat V_4). \end{cases} \qquad (2.21)_{16}$$

Итак, сравнивая представления из полученного выше каталога $(2.21)_1 \div (2.21)_{16})$, убеждаемся, что ни одно из них не повторяется (поскольку эти представления получены из различных представлений в (2.14)), что и доказывает вторую часть теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3. Каждое представление из множества представлений для $B = C^{-1}$, полученных в теореме 8, является единственным и по сути дает способ (метод) обращения $C(1.1)$. Известные нам представления, например полученные ранее в работах [1÷4,7,8] принадлежит таблице (каталогу) представлений $(2.21)_1 \div (2.21)_{16})$. При идентификации известных уже методов с методами (представлениями) таблицы $(2.21)_1 \div (2.22)_{16})$ следует помнить, что они получены в предположении отличия от нуля главных угловых квазиминоров и квадратности всех подматриц матрицы $C(1.1)$. При проверке каждого из представлений каталога

$(2.21)_{1}\div(2.21)_{16}$), исходя из $B\cdot C=E=C\cdot B$, следует также учитывать четыре различных представления (2.4) для $\widetilde{B}_{ii}$ и равенства (I.I4).

Замечание 4. Особый интерес вызывают шестнадцать различных четырех- -квазивекторных представлений (2.I4) оператора $B=C^{-1}$, основанные на включении "как целого" квазидиагональных блоков $\{\widetilde{B}_{ii}\}$ в выражения для B_{ij}. В частности, представления (2.I4) будут играть большую роль при получении и использовании результатов обратных теорем. Обсуждению этого вопроса посвящен следующий параграф в этой статье.

3. Обратные теоремы и множество алгебраических представлений квазитрехдиагональных операторов (матриц), в случае всех отличных от нуля главных угловых квазиминоров.

Как указывалось уже выше в замечании I, всевозможные представления квазитрехдиагональных матриц $C(1.1)$ не могут ограничиваться лишь множествами факторизованных представлений, генераторами которых являются два представления 5'(5) и 7'(7), основанные на (независимых?) последовательностях $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ соответственно. Из дальнейшего станет ясно, что сохранение связи между последовательностями $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ в виде аддитивной скобки $B_{ii}=q_i^{-1}[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i]^{-1}$ позволяет построить более широкое множество различных представлений (алгебраического типа) для $C=B^{-1}$. При этом будет показано, что представления 5'(5) и 7'(7) являются элементами этого (более широкого) множества представлений. Кроме того, в приложениях (например, [9,I0]) бывает известен не $C(1.1)$, а наоборот $B=C^{-1}$. И при этом возникает необходимость решения как бы обратной задачи, т.е. поиска $C=B^{-1}$. Перечисленные выше представления, вообще говоря, решают эту задачу. Однако на некоторые особенности перечисленных выше результатов при этом следует обратить особое внимание. Итак, справедлива следующая

Теорема 9. Пусть блочный оператор $B=\|B_{ij}\|$ имеет вид (2.I)÷(2.2) т.е.

$$B_{ij}=\begin{cases} R_i\cdot W_j\,, & \text{если}\quad 1\le j\le i\le m\,,\\ F_i\cdot V_j\,, & \text{если}\quad 1\le i\le j\le m\,,\end{cases} \tag{3.1}$$

где все операторы (матрицы) $\{V_k, R_k, F_k, W_k\}_{k=1}^{m}$ - квадратные и неособенные

$$\det\{[(R_i\cdot W_i)=B_{ii}=(F_i\cdot V_i)]\neq 0\}_{i=1}^{m}\,, \tag{3.2}$$

либо блочный оператор $B=\|B_{ij}\|$ представлен одним из способов

$$B_{ij}=\begin{cases} B_{ii}\cdot\prod\limits_{\mathfrak{z}=j+1}^{i}\beta_{\mathfrak{z}}\,, & 1\le j\le i\le m\,,\\ B_{ii}\cdot\prod\limits_{\mathfrak{z}=i+1}^{j}\hat{\beta}_{\mathfrak{z}}\,, & 1\le i\le j\le m\,;\end{cases}\qquad B_{ij}=\begin{cases} \prod\limits_{\mu=j+1}^{i}\check{c}_{\mu}\cdot B_{jj}\,, & 1\le j\le i\le m\,,\\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j}\widetilde{c}_{\mu}\cdot B_{jj}\,, & 1\le i\le j\le m\,;\end{cases} \tag{3.3}$$

$$B_{ij}=\begin{cases} B_{ii}\cdot\prod\limits_{\mathfrak{z}=j+1}^{i}\beta_{\mathfrak{z}}\,, & 1\le j\le i\le m\,,\\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j}\widetilde{c}_{\mu}\cdot B_{jj}\,, & 1\le i\le j\le m\,;\end{cases}\qquad B_{ij}=\begin{cases} \prod\limits_{\mu=j+1}^{i}\check{c}_{\mu}\cdot B_{jj}\,, & 1\le j\le i\le m\,,\\ B_{ii}\cdot\prod\limits_{\mathfrak{z}=i+1}^{j}\hat{\beta}_{\mathfrak{z}}\,, & 1\le i\le j\le m\,,\ \text{где}\end{cases} \tag{3.4}$$

квадратные квазидиагональные (возможно, различных размерностей) операторы B_{kk} являются неособенными, т.е. $\{\det B_{kk}\neq 0\}_{k=1}^{m}$. Тогда оператор, обратный к B, т.е. $B^{-1}=C$, является квазитрехдиагональным вида $C(1.1)$, для элементов-блоков $\{q_1;\, q_i,\, z_i,\, p_i\}_{i=2}^{m}$ которого имеют место I и II (два) различных нерекуррентных представления:

I°. Представления 9'(9)

$$\begin{cases} q_i=[B_{ii}-B_{ii-1}\cdot B_{i-1i-1}^{-1}\cdot B_{i-1i}]^{-1}-(\hat{\beta}_{i+1}\cdot p_{i+1}=z_{i+1}\cdot\check{c}_{i+1}),\ i=m,m-1,\dots,1;\\ \qquad p_{m+1}=0;\ z_{m+1}=0,\\ z_i=(-\hat{\beta}_i)\cdot[B_{ii}-B_{ii-1}\cdot B_{i-1i-1}^{-1}\cdot B_{i-1i}]^{-1},\\ p_i=[B_{ii}-B_{ii-1}\cdot B_{i-1i-1}^{-1}\cdot B_{i-1i}]^{-1}(-\check{c}_i),\ i=m,m-1,\dots,2.\end{cases} \tag{3.5}$$

Либо эквивалентные ему нерекуррентные представления

Представления II'(II)

$$\begin{cases} q_i=[B_{ii}^{-1}-p_i\cdot\widetilde{c}_i]-(\hat{\beta}_{i+1}\cdot p_{i+1}=z_{i+1}\cdot\check{c}_{i+1}),\\ \qquad i=m,\dots,1;\ p_{m+1}=0;\ z_{m+1}=0,\\ z_i=(-\hat{\beta}_i)\cdot[B_{ii}^{-1}-p_i\cdot\widetilde{c}_i]\,,\\ \begin{cases} p_i=[B_{ii}^{-1}-p_i\cdot\widetilde{c}_i]\cdot(-\check{c}_i)\ \text{или}\\ p_i=-B_{ii}^{-1}\cdot\check{c}_i\cdot[E_{i-1}-\widetilde{c}_i\cdot\check{c}_i]^{-1},\ i=m,\dots,2;\end{cases}\end{cases}$$

Представления I2'(I2)

$$\begin{cases} q_i=[B_{ii}^{-1}-\beta_i\cdot z_i]-(\hat{\beta}_{i+1}\cdot p_{i+1}=z_{i+1}\cdot\check{c}_{i+1}),\\ \qquad i=m,\dots,1;\ p_{m+1}=0;\ z_{m+1}=0,\\ \begin{cases} z_i=(-\hat{\beta}_i)\cdot[B_{ii}^{-1}-\beta_i\cdot z_i]\ \text{или}\\ z_i=-[E_{i-1}-\hat{\beta}_i\cdot\beta_i]^{-1}\hat{\beta}_i\cdot B_{ii}^{-1},\end{cases}\\ p_i=[B_{ii}^{-1}-\beta_i\cdot z_i]\cdot(-\check{c}_i),\ i=m,\dots,2.\end{cases} \tag{3.6}$$

II°. Представления I3'(I3)

$$\begin{cases} q_i=[B_{ii}-B_{ii+1}\cdot B_{i+1i+1}^{-1}\cdot B_{i+1i}]^{-1}-(\beta_i\cdot z_i=p_i\cdot\widetilde{c}_i),\ i=1,2,\dots,m;\\ \qquad p_1=0;\ z_1=0,\\ z_i=[B_{i-1i-1}-B_{i-1i}\cdot B_{ii}^{-1}\cdot B_{ii-1}]^{-1}(-\widetilde{c}_i),\\ p_i=(-\beta_i)\cdot[B_{i-1i-1}-B_{i-1i}\cdot B_{ii}^{-1}\cdot B_{ii-1}]^{-1},\ i=2,3,\dots,m.\end{cases} \tag{3.7}$$

Либо эквивалентные ему нерекуррентные представления

Представления I4'(I4)

$$\begin{cases} q_i=[B_{ii}^{-1}-\hat{\beta}_{i+1}\cdot p_{i+1}]-(\beta_i\cdot z_i=p_i\cdot\widetilde{c}_i),\\ \qquad i=1,2,\dots,m;\ z_1=0,\ p_1=0,\\ z_i=[B_{i-1i-1}^{-1}-\hat{\beta}_i\cdot p_i]\cdot(-\widetilde{c}_i),\\ \begin{cases} p_i=(-\beta_i)\cdot[B_{i-1i-1}^{-1}-\hat{\beta}_i\cdot p_i]\ \text{или}\\ p_i=-[E_i-\beta_i\cdot\hat{\beta}_i]^{-1}\beta_i\cdot B_{i-1i-1}^{-1},\ i=2,3,\dots,m;\end{cases}\end{cases}$$

Представления I5'(I5)

$$\begin{cases} q_i=[B_{ii}^{-1}-z_{i+1}\cdot\check{c}_{i+1}]-(\beta_i\cdot z_i=p_i\cdot\widetilde{c}_i),\\ \qquad i=1,2,\dots,m;\ z_1=0;\ p_1=0,\\ \begin{cases} z_i=[B_{i-1i-1}^{-1}-z_i\cdot\check{c}_i]\cdot(-\widetilde{c}_i)\ \text{или}\\ z_i=-B_{i-1i-1}^{-1}\cdot\widetilde{c}_i\cdot[E_i-\check{c}_i\cdot\widetilde{c}_i]^{-1},\end{cases}\\ p_i=(-\beta_i)\cdot[B_{i-1i-1}^{-1}-z_i\cdot\check{c}_i],\ i=2,\dots,m,\end{cases} \tag{3.8}$$

где матрицы $\{\hat{c}_k,\check{c}_k;\,\hat{\beta}_k,\beta_k\}_{k=2}^{m}$ — определены в виде

$$\begin{cases} B_{KK-1}\cdot B_{K-1K-1}^{-1}=\check{C}_K=-q_K^{-1}\cdot G_{K-1}^{-1}\cdot P_K, \\ B_{K-1K}\cdot B_{KK}^{-1}=\tilde{C}_K=-q_{K-1}^{-1}\cdot\Lambda_K^{-1}\cdot z_K; \end{cases}\quad \begin{cases} B_{K-1K-1}^{-1}\cdot B_{K-1K}=\hat{\beta}_K=-(z_K\cdot q_K^{-1})\cdot G_{K-1}^{-1}, \\ B_{KK}^{-1}\cdot B_{KK-1}=\beta_K=-(P_K\cdot q_{K-1}^{-1})\cdot\Lambda_K^{-1}, K=2,\dots,m. \end{cases} \tag{3.9}$$

При этом для последовательностей $\{B_{KK}, \Lambda_{K+1}, G_{K-1}\}$ – имеют место процессы

$$\begin{cases} \Lambda_{K+1}=E_K-(P_K\cdot q_{K-1}^{-1})\cdot\Lambda_K^{-1}\cdot(z_K\cdot q_K^{-1}); \Lambda_2\equiv E_1,\ K=1,2,\dots,m; \\ G_{K-1}=E_K-(z_{K+1}\cdot q_{K+1}^{-1})\cdot G_K^{-1}\cdot(P_{K+1}\cdot q_K^{-1}); G_{m-1}\equiv E_m,\ K=m-1,\dots,1, \\ B_{KK}=q_K^{-1}\cdot[\Lambda_{K+1}+G_{K-1}-E_K]^{-1},\ K=1,2,\dots,m. \end{cases} \tag{3.10}$$

<u>Доказательство</u> начнем с установления соответствия между представлениями (3.3)÷(3.4) и (3.I) при условиях (3.2), что позволит нам в дальнейшем ограничиться доказательством теоремы лишь для представлений (3.3) и (3.4). Итак, как нетрудно проверить, если выполняются условия (3.2), то представление вида (3.I) (с учетом порядков умножения операторов (I.I0), (I.II)) отображается единственным образом на четыре представления вида (3.3), (3.4). А именно,

$$B_{ij}=\begin{cases} \check{B}_{ii}\cdot[W_i^{-1}\cdot W_j=\prod_{z=j+1}^{i}(W_z^{-1}\cdot W_{z-1}=\beta_z)],\ j\le i, \\ \hat{B}_{ii}\cdot[V_i^{-1}\cdot V_j=\prod_{z=i+1}^{j}(V_{z-1}^{-1}\cdot V_z=\hat{\beta}_z)],\ i\le j; \end{cases}\quad B_{ij}=\begin{cases} [R_i\cdot R_j^{-1}=\prod_{m=j+1}^{i}(R_m^{-1}\cdot R_{m-1}=\check{C}_m)]\cdot\check{B}_{jj},\ j\le i, \\ [F_i\cdot F_j^{-1}=\prod_{m=i+1}^{j}(F_{m-1}\cdot F_m^{-1}=\tilde{C}_m)]\cdot\hat{B}_{jj},\ i\le j; \end{cases} \tag{3.11}$$

$$B_{ij}=\begin{cases} \check{B}_{ii}\cdot[W_i^{-1}\cdot W_j=\prod_{z=j+1}^{i}(W_z^{-1}\cdot W_{z-1}=\beta_z)],\ j\le i, \\ [F_i\cdot F_j^{-1}=\prod_{m=i+1}^{j}(F_{m-1}\cdot F_m^{-1}=\tilde{C}_m)]\cdot\hat{B}_{jj},\ i\le j; \end{cases}\quad B_{ij}=\begin{cases} [R_i\cdot R_j^{-1}=\prod_{m=j+1}^{i}(R_m^{-1}\cdot R_{m-1}=\check{C}_m)]\cdot\check{B}_{jj},\ j\le i, \\ \hat{B}_{ii}\cdot[V_i^{-1}\cdot V_j=\prod_{z=i+1}^{j}(V_{z-1}^{-1}\cdot V_z=\hat{\beta}_z)],\ i\le j, \end{cases} \tag{3.12}$$

где

$$[\hat{B}_{KK}=F_K\cdot V_K]=B_{KK}=[\check{B}_{KK}=R_K\cdot W_K],\ K=1,2,\dots,m. \tag{3.13}$$

В представлениях (3.II) и (3.I2) квазидиагональные операторы $\{\hat{B}_{KK}$ и $\check{B}_{KK}\}$ (в соответствии с (3.I3)) являются различными представлениями для одних и тех же операторов $diag(B_{KK})$. Поэтому, подставив B_{KK} вместо $\check{B}_{KK}$ и $\hat{B}_{KK}$ в (3.II) и (3.I2), получаем представления (3.3) и (3.4).

<u>Замечание 5</u>. Проделанный выше формальный переход от четырех - квазивекторных (в соответствии с определением I) представлений вида (3.I) к трех-квазивекторным (в соответствии с [5,6] и замечанием 2 настоящей работы) еще раз убеждает в справедливости введенной терминологии. А именно, как следует из (3.II) и (3.I2), представления (3.3) и (3.4) действительно строятся на трех последовательностях квазивекторов $\{B_{ii}, (W_i^{-1}W_j)$ и $(V_i^{-1}V_j)\}$, $\{(R_i\cdot R_j^{-1}), (F_i\cdot F_j^{-1})$ и $B_{jj}\}$.

Итак, дальше ограничимся лишь рассмотрением представлений вида (3.3) и (3.4) при доказательстве (3.5)÷(3.I0). Как следует из (3.3) и

(3.4) (при $\{det(B_{KK})\neq 0\}_{K=1}^{m}$), матрицы $\{\check{C}_K, \tilde{C}_K; \hat{\beta}_K$ и $\beta_K\}$ определяются через диагональные $\{B_{KK}\}$, наддиагональные $\{B_{KK+1}\}$ и поддиагональные $\{B_{K-1K}\}$ матрицы оператора B в виде левых частей в равенствах (3.9). Операторы, обратные к B (3.3) и (3.4) (в соответствии с теоремой 7 [6]), являются квазитрехдиагональными. При этом элементы-блоки получаемых квазитрехдиагональных операторов (матриц) могут быть записаны лишь двумя различными способами (в виде (3.5) и (3.7), т.е. в виде представлений 9′(9) и I3′(I3)), если[x)] воспользоваться (2.48) и (2.49) (с учетом (2.46) и (2.52)) в [6], а также равенств $\{\hat{C}_K=q_K\cdot\check{C}_K\cdot q_{K-1}^{-1};\ C_K=q_{K-1}\cdot\tilde{C}_K\cdot q_K^{-1}$ и $q_K^{-1}\cdot\tilde{B}_{KK}=B_{KK}\}$). Далее проверим справедливость правых частей (3.9). Для этого покажем, что при их выполнении равенства в (3.5) и (3.7) обращаются в тождества. На самом деле

$$q_i=[E_i-\beta_i\cdot\hat{\beta}_i]^{-1}\cdot B_{ii}^{-1}-(\hat{\beta}_{i+1}\cdot P_{i+1}=z_{i+1}\cdot\check{C}_{i+1})=[E_i-(P_i\cdot q_{i-1}^{-1})\cdot\Lambda_i^{-1}\cdot(z_i\cdot q_i^{-1})\cdot G_{i-1}^{-1}]^{-1}\cdot B_{ii}^{-1}-$$

$$-[(z_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1})\cdot G_i^{-1}\cdot P_{i+1}=(z_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1})\cdot G_i^{-1}\cdot P_{i+1}]=G_{i-1}\cdot[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i]^{-1}\cdot B_{ii}^{-1}+[(E_i-G_{i-1})]\cdot q_i=$$

$$\equiv G_{i-1}\cdot[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i]^{-1}\cdot[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i]\cdot q_i+[(E_i-G_{i-1})]\cdot q_i\equiv$$

$$\equiv[G_{i-1}+(E_i-G_{i-1})]\,q_i\equiv q_i,\ \text{для всех}\ 1\le i\le m.$$

$$z_i=(-\hat{\beta}_i)\cdot[B_{ii}-B_{ii-1}\cdot B_{i-1i-1}^{-1}\cdot B_{i-1i}]^{-1}=(-\hat{\beta}_i)\cdot[E_i-\beta_i\cdot\hat{\beta}_i]^{-1}\cdot B_{ii}^{-1}=$$

$$=(z_i\cdot q_i^{-1})\cdot G_{i-1}^{-1}\cdot[E_i-(P_i\cdot q_{i-1}^{-1})\cdot\Lambda_i^{-1}\cdot(z_i\cdot q_i^{-1})\cdot G_{i-1}^{-1}]^{-1}\cdot B_{ii}^{-1}\equiv$$

$$\equiv(z_i\cdot q_i^{-1})\cdot[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i]^{-1}\cdot[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i]\cdot q_i\equiv z_i,\ \text{для всех}\ 1\le i\le m.$$

$$P_i=[B_{ii}-B_{ii-1}\cdot B_{i-1i-1}^{-1}\cdot B_{i-1i}]^{-1}\cdot(-\check{C}_i)=[E_i-\beta_i\cdot\hat{\beta}_i]^{-1}\cdot B_{ii}^{-1}(-\check{C}_i)=$$

$$=[E_i-(P_i\cdot q_{i-1}^{-1})\cdot\Lambda_i^{-1}\cdot(z_i\cdot q_i^{-1})\cdot G_{i-1}^{-1}]\cdot B_{ii}^{-1}(-\check{C}_i)\equiv$$

$$\equiv G_{i-1}\cdot[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i]^{-1}\cdot[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i]\cdot(q_i^{-1}\cdot G_{i-1}^{-1}\cdot P_i)\equiv P_i,\ \text{для всех}\ 2\le i\le m.$$

Аналогично тому, как поступили выше, проверяются правые части (3.9) и для представления I3′(I3). Нам осталось показать лишь справедливость представлений II′(II), I2′(I2) и I4′(I4), I5′(I5). Для этого воспользуемся следующим результатом.

<u>Лемма 6</u>. Пусть квазидиагональные блоки-матрицы $\{B_{KK}\}_{K=1}^{m}$ оператора B (заданного в виде представлений (3.I) либо (3.3)÷(3.4)) не вырождены, т.е. $\{det(B_{KK})\neq 0\}_{K=1}^{m}$. Пусть также отличны от нуля все главные угловые квазиминоры оператора B. Тогда операторы (матрицы) $[B_{KK}-B_{KK-1}\cdot B_{K-1K-1}^{-1}\cdot B_{K-1K}]$ и $[B_{KK}-B_{KK+1}\cdot B_{K+1K+1}^{-1}\cdot B_{K+1K}]$ <u>не вырождены и имеют</u> место следующие представления и равенства

x) При доказательстве этой теоремы (в настоящей работе) мы не приводим технику всего доказательства, а ограничиваемся лишь основными моментами с учетом теоремы 7 [6].

с (3.9)), например,

$$\beta_k \hat{\beta}_k = [(\rho_k \cdot q_{k-1}^{-1}) \cdot \Lambda_k^{-1} \cdot (z_k \cdot q_k^{-1})] \cdot G_{k-1}^{-1} = (E_k - \Lambda_{k+1}) \cdot G_{k-1}^{-1},$$
$$\check{c}_k \cdot \tilde{c}_k = q_k^{-1} \cdot G_{k-1}^{-1} \cdot [(\rho_k \cdot q_{k-1}^{-1}) \cdot \Lambda_k^{-1} \cdot (z_k \cdot q_k^{-1})] \cdot q_k = q_k^{-1} \cdot G_{k-1}^{-1} \cdot (E_k - \Lambda_{k+1}) \cdot q_k .$$

Откуда следует, что в общем случае $\beta_k \cdot \hat{\beta}_k \neq \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k$. Если бы даже $(E_k - \Lambda_{k+1})$ коммутировал с G_{k-1}^{-1}, то равенство $\beta_k \cdot \hat{\beta}_k = \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k$ было бы возможно только при условии $G_{k-1}^{-1} \cdot (E_k - \Lambda_{k+1}) = E_k$. В соответствии со сказанным выше в настоящем замечании, левые представления операторов $[B_{kk} - B_{kk-1} \cdot B_{k-1k-1}^{-1} \cdot B_{k-1k}]^{-1}$ и $[B_{kk} - B_{kk+1} \cdot B_{k+1k+1}^{-1} \cdot B_{k+1k}]^{-1}$ в (3.I4) действительно являются различными. При этом, как нетрудно видеть, операторы $(\beta_k \cdot \hat{\beta}_k)$ и $(\hat{\beta}_k \cdot \beta_k)$ представляют собой произведения $(\tilde{B}_{kk-1} \cdot \tilde{B}_{k-1k})$ и $(\tilde{B}_{k-1k} \cdot \tilde{B}_{kk-1})$ "нормированных" элементов-блоков оператора $\tilde{B} = diag(B_{kk}^{-1}) \cdot B$, а также $(\tilde{\tilde{B}}_{kk-1} \cdot \tilde{\tilde{B}}_{k-1k})$ и $(\tilde{\tilde{B}}_{k-1k} \cdot \tilde{\tilde{B}}_{kk-1})$ оператора $\tilde{\tilde{B}} = B \cdot diag(B_{kk}^{-1})$.

Далее, воспользовавшись леммой 6, замечанием 5 и правымичастямив (3.9), покажем справедливость представлений II$'$(II), I2$'$(I2) и I4$'$(I4), I5$'$(I5). Для этого достаточно доказать справедливость следующих равенств

$$\left.\begin{aligned} &(E_k - \hat{\beta}_{k+1} \cdot \beta_{k+1})^{-1} = E_k - z_{k+1} \cdot \check{c}_{k+1} \cdot B_{kk}; \quad (E_k - \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k)^{-1} = E_k - B_{kk} \cdot \beta_k \cdot z_k, \\ &(E_k - \beta_k \cdot \hat{\beta}_k)^{-1} = E_k - \rho_k \cdot \tilde{c}_k \cdot B_{kk}; \quad (E_k - \tilde{c}_{k+1} \cdot \check{c}_{k+1})^{-1} = E_k - B_{kk} \cdot \hat{\beta}_{k+1} \cdot \rho_{k+1} \end{aligned}\right\}. \tag{3.I7}$$

При доказательстве леммы 6 мы уже фактически получали равенства

$$\left.\begin{aligned} &(E_k - \hat{\beta}_{k+1} \cdot \beta_{k+1})^{-1} = \Lambda_{k+1} \cdot q_k \cdot B_{kk}; \quad (E_k - \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k)^{-1} = B_{kk} \cdot G_{k-1} \cdot q_k, \\ &(E_k - \beta_k \cdot \hat{\beta}_k)^{-1} = G_{k-1} q_k \cdot B_{kk}; \quad (E_k - \tilde{c}_{k+1} \cdot \check{c}_{k+1})^{-1} = B_{kk} \cdot \Lambda_{k+1} q_k \end{aligned}\right\}. \tag{3.I8}$$

Воспользовавшись теперь (3.9), для правых частей в (3.I7) также получим соответствующие правые части в (3.I8). Например, для $E_k - B_{kk} \cdot \hat{\beta}_{k+1} \cdot \rho_{k+1}$ получаем

$$E_k - B_{kk} \cdot \hat{\beta}_{k+1} \cdot \rho_{k+1} = E_k - B_{kk} \cdot [-(z_{k+1} \cdot q_{k+1}^{-1}) \cdot G_k^{-1} \cdot (\rho_{k+1} \cdot q_k^{-1})] \cdot q_k =$$
$$= E_k + B_{kk} \cdot [E_k - G_{k-1}] q_k = B_{kk} \cdot [B_{kk}^{-1} \cdot q_k^{-1} + E_k - G_{k-1}] \cdot q_k =$$
$$= B_{kk} [\Lambda_{k+1} + G_{k-1} - E_k + E_k - G_{k-1}] \cdot q_k = B_{kk} \cdot \Lambda_{k+1} \cdot q_k ,$$

что вместе с $(3.I8)_{4)}$ доказывает справедливость $(3.I7)_{4)}$. Аналогично доказывается справедливость остальных равенств в (3.I7). Далее, воспользовавшись (3.I7) и леммой 6, получаем представления (3.6) и (3.8), что и завершает доказательство теоремы 9.

Следствие (Теорема I0). Пусть любой невырожденный квазитрехдиагональный оператор $\mathbb{C}(1.1)$ имеет невырожденные (в общем случае разных размерностей) квазидиагональные матрицы - блоки $\{q_i\}$. Тогда для определения ему обратного оператора $B = \mathbb{C}^{-1}$ достаточно задать (определить) лишь его три главные квазидиагонали - $\{B_{i-1i}, B_{ii}, B_{ii+1}\}_{i=1}^{m}$.

Верно и обратное утверждение, т.е. если блочный оператор B имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &G_{k-1} \cdot q_k = \left\{(E_k - \beta_k \cdot \hat{\beta}_k)^{-1} \cdot B_{kk}^{-1} = [B_{kk} - B_{kk-1} \cdot B_{k-1k-1}^{-1} \cdot B_{k-1k}]^{-1} = B_{kk}^{-1} \cdot (E_k - \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k)^{-1}\right\} = G_{k-1} \cdot q_k, \\ &\Lambda_{k+1} \cdot q_k = \left\{(E_k - \hat{\beta}_{k+1} \beta_{k+1})^{-1} \cdot B_{kk}^{-1} = [B_{kk} - B_{kk+1} \cdot B_{k+1k+1}^{-1} \cdot B_{k+1k}]^{-1} = B_{kk}^{-1} \cdot (E_k - \tilde{c}_{k+1} \check{c}_{k+1})^{-1}\right\} = \Lambda_{k+1} \cdot q_k, \end{aligned}\right. \tag{3.I4}$$

где $\{\check{c}_k, \tilde{c}_k; \beta_k, \hat{\beta}_k\}$ - определены в виде (3.9).

Доказательство. Воспользовавшись неособенностью B_{kk} (т.е. $\{det(B_{kk}) \neq 0\}_{k=1}^{m}$, а также учитывая (3.9) для последовательностей $(\check{c}, \tilde{c}; \beta, \hat{\beta})$ и (3.I0) для $(B_{kk}, \Lambda_{k+1}, G_{k-1})$, имеем

$$[B_{kk} - B_{kk-1} \cdot B_{k-1k-1}^{-1} \cdot B_{k-1k}]^{-1} = [(E_k - B_{kk-1} \cdot B_{k-1k-1}^{-1} \cdot B_{k-1k} \cdot B_{kk}^{-1}) \cdot B_{kk}]^{-1} =$$
$$= B_{kk}^{-1} \cdot (E_k - \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k)^{-1} = B_{kk}^{-1} \cdot [E_k - q_k^{-1} \cdot G_{k-1}^{-1} \cdot (\rho_k q_{k-1}^{-1}) \cdot \Lambda_k^{-1} \cdot (z_k \cdot q_k^{-1}) \cdot q_k]^{-1} =$$
$$= B_{kk}^{-1} \cdot q_k^{-1} \cdot [\Lambda_{k+1} + G_{k-1} - E_k]^{-1} \cdot G_{k-1} \cdot q_k = G_{k-1} \cdot q_k, \text{ для всех } 1 \leq k \leq m. \tag{3.I5}$$

С другой стороны, также имеем

$$[B_{kk} - B_{kk-1} \cdot B_{k-1k-1}^{-1} \cdot B_{k-1k}]^{-1} = [B_{kk}(E_k - B_{kk}^{-1} \cdot B_{kk-1} \cdot B_{k-1k-1}^{-1} \cdot B_{k-1k})]^{-1} =$$
$$= (E_k - \beta_k \cdot \hat{\beta}_k)^{-1} \cdot B_{kk}^{-1} = [E_k - (\rho_k \cdot q_{k-1}^{-1}) \cdot \Lambda_k^{-1} \cdot (z_k \cdot q_k^{-1}) \cdot G_{k-1}^{-1}]^{-1} \cdot B_{kk}^{-1} = \tag{3.I5$'$}$$
$$= G_{k-1} \cdot [\Lambda_{k+1} + G_{k-1} - E_k]^{-1} \cdot B_{kk}^{-1} = G_{k-1} \cdot q_k, \text{ для всех } 1 \leq k \leq m.$$

Аналогично поступая с матрицами $[B_{kk} - B_{kk+1} \cdot B_{k+1k+1}^{-1} \cdot B_{k+1k}]^{-1}$, имеем

$$[B_{kk} - B_{kk+1} \cdot B_{k+1k+1}^{-1} \cdot B_{k+1k}]^{-1} = [B_{kk} \cdot (E_k - B_{kk}^{-1} \cdot B_{kk+1} \cdot B_{k+1k+1}^{-1} \cdot B_{k+1k})]^{-1} =$$
$$= (E_k - \hat{\beta}_{k+1} \cdot \beta_{k+1})^{-1} \cdot B_{kk}^{-1} = [E_k - (z_{k+1} q_{k+1}^{-1}) \cdot G_k^{-1} \cdot (\rho_{k+1} \cdot q_k^{-1}) \cdot \Lambda_{k+1}^{-1}]^{-1} \cdot B_{kk}^{-1} = \tag{3.I6}$$
$$= \Lambda_{k+1} \cdot [\Lambda_{k+1} + G_{k-1} - E_k]^{-1} \cdot B_{kk}^{-1} = \Lambda_{k+1} q_k, \text{ для всех } 1 \leq k \leq m.$$

$$[B_{kk} - B_{kk+1} \cdot B_{k+1k+1}^{-1} \cdot B_{k+1k}]^{-1} = [(E_k - B_{kk+1} \cdot B_{k+1k+1}^{-1} \cdot B_{k+1k} \cdot B_{kk}^{-1}) \cdot B_{kk}]^{-1} =$$
$$= B_{kk}^{-1} (E_k - \tilde{c}_{k+1} \cdot \check{c}_{k+1})^{-1} = [E_k - q_k^{-1} \Lambda_{k+1}^{-1} \cdot (z_{k+1} \cdot q_{k+1}^{-1}) \cdot G_k^{-1} \cdot (\rho_{k+1} \cdot q_k^{-1}) \cdot q_k]^{-1} = \tag{3.I6$'$}$$
$$= B_{kk}^{-1} \cdot q_k^{-1} \cdot [\Lambda_{k+1} + G_{i-1} - E_i]^{-1} \cdot \Lambda_{k+1} \cdot q_k = \Lambda_{k+1} \cdot q_k, \text{ для всех } 1 \leq k \leq m.$$

Итак, мы показали справедливость представлений (равенств в фигурных скобках в (3.I4)), а также равенств (за фигурными скобками) (3.I4). Для завершения доказательства леммы нам осталось показать невырожденность матриц $[B_{kk} - B_{kk-1} \cdot B_{k-1k-1}^{-1} \cdot B_{k-1k}]$ и $[B_{kk} - B_{kk+1} \cdot B_{k+1k+1}^{-1} \cdot B_{k+1k}]$. Это следует непосредственно из полученных выше равенств в (3.I5)÷(3.I6)$'$ в силу неособенности матриц $\{B_{kk}, \Lambda_{k+1}, G_{k-1}\}$ и требования леммы об отличии от нуля всех главных угловых квазиминоров. Лемма доказана.

Замечание 5. Как следует из доказанной выше леммы,

$$det(E_k - \beta_k \cdot \hat{\beta}_k) \neq 0, \; det(E_k - \hat{\beta}_{k+1} \cdot \beta_{k+1}) \neq 0; \; det(E_k - \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k) \neq 0, \; det(E_k - \tilde{c}_{k+1} \check{c}_{k+1}) \neq 0.$$

А также в общем случае $\beta_k \cdot \hat{\beta}_k \neq \hat{\beta}_k \cdot \beta_k$, $\check{c}_k \cdot \tilde{c}_k \neq \tilde{c}_k \cdot \check{c}_k$. Кроме того, $\beta_k \cdot \hat{\beta}_k \neq \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k \Longleftrightarrow \check{c}_k \cdot \tilde{c}_k \neq \tilde{c}_k \cdot \check{c}_k$, поскольку (в соответствии

(3.1) либо (3.3)÷(3.4), то ему обратный оператор $\mathcal{C}=\mathcal{B}^{-1}$ является квазитрехдиагональным вида (3.5)$\Longleftrightarrow$(3.6) либо (3.7)$\Longleftrightarrow$(3.8) при условиях $\{\det(B_{kk})\neq 0\}_{k=1}^{m}$ и $\{\det(q_k)\neq 0\}_{k=1}^{m}$.

Доказательство теоремы является прямым следствием теоремы 6 [6] и теоремы 9 доказанной выше, поэтому мы на нем не останавливаемся.

Замечание 6. Итак, выше (в теореме 9) нами получено множество из из восьми различных алгебраических представлений (3.6), (3.8) (с учетом двойственного представления аддитивной добавки в круглых скобках для q_i) операторов $\mathcal{C}=\mathcal{B}^{-1}$, основанное на использовании явного вида трех главных квазидиагоналей – $\{B_{i-1i}, B_{ii}, B_{ii+1}\}$ оператора $\mathcal{B}$. Нетрудно проверить (с учетом равенств (3.14) леммы 6), что введение параметрической зависимости $B_{ii}=B_{ii}(\Lambda,G)$, $B_{i-1i}=B_{i-1i}(\Lambda,G)$ и $B_{ii+1}=B_{ii+1}(\Lambda,G)$ сводит восемь указанных представлений (3.6), (3.8) к двум независимым (факторизованным) представлениям, полученным ранее в теореме 7 [6]. Следовательно, утеря ("аннигиляция") связи (в виде $B_{kk}=q_k^{-1}\cdot[\Lambda_{k+1}+G_{k-1}-E_k]^{-1}$) между последовательностями $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$, о которой нами упоминалось в § 2 настоящей работы, приводит к сужению множества различных представлений $\mathcal{C}=\mathcal{B}^{-1}$.

Заключение

Получены дальнейшие обобщения результатов [1÷6]. При этом построены:

1. Множества (Теорема 8) всевозможных (алгебраических) четырех-квазивекторных представлений матриц, обратных к квазитрехдиагональным в случае всех квадратных элементов-блоков.

2. Множество алгебраических представлений (Теорема 9) квазитрехдиагональных операторов, включающее в себя известные ранее факторизованные представления.

Авторы признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящей серии работ и предоставленную возможность работы над ней.

Литература

1. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, Р11-73-6933, Дубна, 1973.
2. Emelyanenko G.A. JINR, E11-83-71, Dubna, 1983.
3. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, Р11-85-489, Дубна, 1985.
4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, Р11-86-504, Дубна, 1986.
5. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, Р11-87-524, Дубна, 1987.
6. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, Р11-87-533, Дубна, 1987.
7. Rizvi S.A.H. Inverses of quasitridiagonal matrices "Linear Algebra and Appl.", 56, p. 177-184, 1984.
8. Mattheij R.M.M. The stability of LU-decompositions of block tridiagonal matrices. "Bull. Austral. Math. Soc.", 29, N 2, p. 177-205, 1984.
9. Бартон Г. Дисперсионные методы в теории поля. М., "Атомиздат", 1968.
10. Pascand C., Morellet P. LAL Rapport No. 1227, Orsay, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 августа 1987 года.

Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Р11-87-623
О множествах представлений /их свойствах/ квазитрехдиагональных /им обратных/ матриц

Обобщены результаты предыдущей серии работ. Получены множества всевозможных четырех-квазивекторных представлений матриц, обратных к квазитрехдиагональным, а также множества представлений для самих квазитрехдиагональных матриц, главные угловые квазиминоры которых отличны от нуля.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Rakhmonov T.T. P11-87-623
On the Multiplicities of Representations (Their Properties) of Quasitridiagonal (Inverse to Them) Matrices

The results of a series of previous papers are generalized. The multiplicities of different four-quasivector representations of the matrices inverse to quasitridiagonal and the multiplicities of the representations for quasitridiagonal matrices themselves in the case of all nonzero quasiminors are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987