объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-87-556

М.Грегуш, Е.П.Жидков, Г.Е.Мазуркевич,
Б.Н.Хоромский

КОМБИНИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ

Направлено на Конференцию по численному
анализу, Прага, август, 1987 г.

1987

При решении краевых задач магнитостатики в неограниченной двух - или трехмерной области могут быть построены экономичные комбинированные алгоритмы, сочетающие дифференциальные уравнения для векторного либо скалярного потенциала и граничные интегральные уравнения (ГИУ) [I, 2]. Рассмотрим вопросы обоснования комбинированных методов в нелинейных задачах магнитостатики [3] без предварительной дискретизации уравнений. Основное внимание уделено пространственным задачам. С использованием аналога оператора Пуанкаре-Стеклова [4,5] для случая неограниченной области [3] установлено существование и единственность обобщенного решения (в пространствах Соболева) краевой задачи в комбинированной постановке. Далее приводим условия сходимости итерационных процессов метода декомпозиции неограниченной области с оператором перехода типа простой итерации и метода Ньютона. Могут быть использованы также методы, основанные на минимализации функционала.

В заключение приводим основные характеристики обсуждаемого алгоритма при решении нелинейной пространственной краевой задачи. Вычисления проводились с помощью модульного комплекса [3], предназначенного для расчета пространственных задач магнитостатики комбинированным методом (с использованием скалярного потенциала) на последовательности сгущающихся сеток.

I. Обобщенная формулировка краевой задачи в комбинированной постановке

Пусть $\Omega_1 \subset R^3$ - ограниченная область с липшицевой границей Γ_1 (соответствует нелинейной среде), а $\Omega_2 \supset \Omega_1$ - вспомогательная ограниченная область с гладкой границей Γ_2. Тогда стационарное уравнение Максвелла с использованием двух скалярных потенциалов сводится к краевой задаче вида (с нелокальным краевым условием в области Ω_2 [3])

$$E_\psi u \equiv -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,\omega) = 0,$$

$$\omega = \operatorname{grad} u, \qquad u \in D(E_\psi) \tag{I.1}$$

с естественной областью определения $M(E_\psi) = C^2(\bar\Omega_1) \cup C^2(\overline{\Omega_2 \setminus \Omega_1})$ и областью определения

$$D(E_\psi) = \Big\{ u \;\Big|\; u \in M(E_\psi),\ [u]_{\Gamma_1} = 0,\ \Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]_{\Gamma_1} = \psi(x),$$

$$\alpha G_1 u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \xi(x),\ x \in \Gamma_3,\ (u, g_0) = 0 \Big\}. \tag{I.2}$$

Здесь функции $a_i(x,\omega)$, $i = \overline{1,3}$, $\omega = (y_1, y_2, y_3)$ определены равенством

$$a_i(x,\omega) = \begin{cases} y_i, & x \in \Omega_2 \setminus \bar\Omega_1 \equiv \Omega_0, \\ \mu(x,|y|)\, y_i, & x \in \Omega_1, \end{cases} \tag{I.3}$$

где $|y| = \left(\sum_{i=1}^{3} y_i^2\right)^{1/2}$, числа α, $\beta \geqslant 0$, знак $[\cdot]$ определяет скачок соответствующей функции на границе Γ_1, G_1 - симметрический и положительно определенный в $L_2(\Gamma_2)$ оператор; $\psi(x), \xi(x)$ - заданные функции, свойства которых зависят от типа задачи. Задаче магнитостатики соответствует случай $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$,

$$G_1 = L^{-1}(E + K), \tag{I.4}$$

где интегральные операторы K и L определены равенствами

$$K u = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\cos(r_{PM}, n_P)}{|r_{MP}|^2}\, u(P)\, d\sigma_P ,$$

$$L v = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} |r_{MP}|^{-1} v(P)\, d\sigma_P , \tag{I.5}$$

а $|r_{MP}|$ - евклидова норма вектора r_{MP}, соединяющего точки $M, P \in \Gamma_2$, n_P - вектор внутренней нормали в точке P, E - тождественный оператор. Обозначаем через g_0 плотность потенциала Робена: $K^* g_0 = g_0$.

Задаче Неймана соответствуют $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\xi \in W_{2,1}^{-1/2}(\Gamma_2)$.

Пусть V - некоторое рефлексивное банахово пространство, V^* - сопряженное к нему, причем $V \subset H$ непрерывно и плотно вложено в некоторое гильбертово пространство H и $D(E_\psi) \subset V$, $R(E_\psi) \subset H$, Y - банахово пространство. Построим энергетическое расширение оператора E_ψ по формуле

$$A = T^* A_0 T, \qquad A \in (V \to V^*), \tag{I.6}$$

где $T \in (V \to Y)$ - непрерывный линейный оператор, такой что $\|Tu\|_Y = \|u\|_V$, $A_0 \in (Y \to Y^*)$ - нелинейный оператор, $T^* \in (Y^* \to V^*)$. Для этого используем пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(u, v) = \int_\Omega uv\, d\Omega$, пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|^2_{W^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(|\operatorname{grad} u|^2 + |u|^2\right) d\Omega \tag{I.7}$$

и его подпространство $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Определим также пространство $W^1_{2,g_0}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ функций, след $\gamma_0 u$ которых ортогонален g_0 на $\Gamma = \partial\Omega$, т.е. $(\gamma_0 u, g_0) = 0$. Используем также пространства Соболева порядка 1/2: $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ /7/ и сопряженное к нему пространство $W_2^{-1/2}(\Gamma_2) = (W_2^{1/2}(\Gamma_2))^*$. Аналогично определяем подпространство $W_{2,g_0}^{1/2}(\Gamma_2) \equiv X \subset W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ функций, ортогональных g_0 на Γ_3 : $(u, g_0) = 0$. В силу того, что $(g_0, 1) \neq 0$, можно считать, что $W_{2,1}^{-1/2}(\Gamma_2) \equiv (W_{2,g_0}^{1/2}(\Gamma_2))^* \subset W_2^{-1/2}(\Gamma_2)$ есть подпространство функций, ортогональных единице: $(u, 1) = 0$. Отношение двойственности между V и V^* обозначаем через $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Определим также оператор следа γ_{0,g_0} : $W_{2,g_0}^1(\Omega_2) \longrightarrow W_{2,g_0}^1(\Gamma_2)$, являющийся сужением оператора γ_0 на X, который является линейным непрерывным оператором [7].

Пусть линейный оператор $G_1 \in \mathcal{L}(X \to X^*)$ и есть самосопряженный и положительно определенный

$$\langle G_1 u, u \rangle \geq m_{G_1} \|u\|_X^2 , \quad \forall u \in X, \ m_{G_1} > 0 . \qquad (I.8)$$

Определим следующие пространства и операторы

$$H = L_2(\Omega_2); \ V = \{u \mid u \in W_{2,g_0}^1(\Omega_2)\};$$
$$\|u\|^2 = \left(\int_{\Omega_2} |\operatorname{grad} u|^2 dx + \int_{\Gamma_2} \bar{u}^2 d\sigma\right); \ \bar{u} = \gamma_{0,g_0} u; \quad Y = L_2^{(3)}(\Omega_2) \times W_{2,g_0}^{1/2}(\Gamma_2);$$
$$Y^* = L_2^{(3)}(\Omega_2) \times X^*; \quad T : u \longrightarrow \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \gamma_{0,g_0} u\right\}; \qquad (I.9)$$
$$A_{OK} : \{y, \varphi\} \longrightarrow \{a_1(x,y), a_2(x,y), a_3(x,y), G_1 y\} - \bar{g} \quad ; \varphi \in X,$$

где линейный функционал $\bar{g} \in Y^*$ есть продолжение, согласно теореме Хана - Банаха, на все $L_2^{(3)}(\Omega_2)$ линейного непрерывного функционала g,

$$g(Th) = \int_{\Gamma_1} \psi(s) \gamma_0 h(s) ds \ , \quad \forall h \in V, \qquad (I.10)$$

который, в свою очередь, определен на множестве значений оператора T для всякой функции $\psi \in W_2^{-1/2}(\Gamma_1)$.

Лемма I [3]. Пусть $G_1 \in \mathcal{L}(X \to X^*)$ удовлетворяет условию (8). Тогда операторы и пространства (9) задают энергетическое расширение $A_K = T^* A_{OK} T$ оператора (1), (2), (3).

Напомним, что операторное уравнение

$$A u = 0, \qquad u \in V, \qquad (I.11)$$

называется функционально-аналитической (или обобщенной) формулировкой краевой задачи (I), (2), если A является энергетическим расширением оператора $E\psi$.

Пусть для простоты $\mu(x, \xi) \in C(\Omega_1) \times C[0,\infty)$ и выполнены какие-либо из свойств (при $x \in \Omega_1$; $t, r \in [0,\infty)$):

$$\mu(x,t) \geq m_1 > 0 , \qquad (I.12)$$
$$\mu(x,t)t - \mu(x,r)r \geq m(t-r), \ t \geq r, \ m > 0, \qquad (I.13)$$
$$|\mu(x,t)t - \mu(x,r)r| \leq M|t-r| , \qquad (I.14)$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial t} \mu(x,t) t\right| \leq M , \quad \forall t \in [0,\infty) . \qquad (I.15)$$

Из результатов [6] о разрешимости нелинейных операторных уравнений следует

Теорема I. Пусть оператор $G_1 \in \mathcal{L}(X \to X^*)$ симметричен и положительно определен, а функция $\mu(x,t)$ удовлетворяет условиям (12) - (14). Тогда оператор A_K радиально непрерывен, коэрцитивен и строго монотонен, и значит существует единственное обобщенное решение $u \in V$ уравнения (II).

Замечание I. Аналогичная теорема справедлива для задачи (I), (2) с условиями Дирихле или Неймана на Γ_2 [3].

Далее установим, что оператор $G_1 = L^{-1}(E + K)$ удовлетворяет требованиям теоремы I и рассмотрим итерационные процессы решения уравнения (II) с использованием операторов Пуанкаре - Стеклова.

2. Операторы Пуанкаре - Стеклова и уравнения метода разделения области

Рассмотрим краевую задачу Неймана для уравнения (I) в обобщенной формулировке: найти функцию $u \in W_{2,g_0}^1(\Omega_2)$, удовлетворяющую для любых $\eta \in W_{2,g_0}^1(\Omega_2)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_2}\sum_{i=1}^{3} a_i(x,\omega)\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\,d\Omega_2 - \int\limits_{\Gamma_1} 4\,\gamma_0\eta\, ds = \langle g, \gamma_{0,g_0}\eta\rangle , \qquad (2.I)$$

где $g \in X^*$, функции $a_i(x,\omega)$ определены в (I.3), $\omega = \mathrm{grad}\, u$.

Согласно замечанию I существует единственное обобщенное решение уравнения (2.I), для которого однозначно определен след $\gamma_{0,g_0} u \in X$. Аналогично[5,3] определяем нелинейный оператор $S \in (X^* \to X)$, сопоставляющий функции $g \in X^*$ элемент $\gamma_{0,g_0} u \in X$ так, что справедливо равенство

$$\langle S(g), \eta\rangle = \langle \gamma_{0,g_0} u, \eta\rangle , \qquad \forall \eta \in X^* . \qquad (2.2)$$

Оператор S называем нелинейным оператором Пуанкаре - Стеклова, по аналогии с линейным случаем, который подробно изучен в[4,8].

Теорема 2. [3] При выполнении условий (I.I3), (I.I4) оператор S сильно монотонен, непрерывен и обладает обратным S^{-1}, который является липшиц-непрерывным и сильно монотонным, $S^{-1} \in (X \to X^*)$. При выполнении условия (I.I5) оператор S^{-1} дифференцируем по Гато, и справедлива оценка

$$\langle (S^{-1})'(v)u, u\rangle \leqq M_1 \|u\|_X^2 . \qquad (2.3)$$

Если при условиях (I.I3), (I.I4) функция $t \to \frac{\partial}{\partial t}\mu(x,t)t$ непрерывна почти при всех $x \in \Omega_i$, то оператор $R = (S^{-1})'$ положительно определен

$$\langle R(v)u, u\rangle \geqq M_0 \|u\|_X^2 \qquad (2.4)$$

и симметричен: $\langle R(v)\nu, \eta\rangle = \langle \nu, R(v)\eta\rangle$, $\forall \nu,\eta \in X$.

Замечание 2. Из потенциальности оператора A следует, что оператор S^{-1} также потенциален.

Пусть S_Δ есть линейный оператор Пуанкаре - Стеклова для задачи (I.I), (I.2), если положить $E_\psi = -\Delta$, $\psi = 0$, где Δ - оператор Лапласа в области Ω_2. Поскольку следующие пространства плотно вложены[7]

$$W_2^{1/2}(\Gamma_2) \subset L_2(\Gamma_2) \subset W_2^{-1/2}(\Gamma_2) , \qquad (2.5)$$

причем первое вложение компактно, то из теоремы 2 следуют утверждения

$$S_\Delta \in \mathcal{L}(X^* \to X), \qquad (2.6)$$

$$(S_\Delta u, v) = (u, S_\Delta v) , \quad \forall u, v \in L_2(\Gamma_2), \qquad (2.7)$$

$$\langle S_\Delta u, u\rangle \geqq m_\Delta \|u\|_{X^*}^2 , \quad m_\Delta > 0 , \qquad (2.8)$$

S_Δ - вполне непрерывен, как оператор, действующий в $L_2(\Gamma_2)$. (2.9)

Известно, что S_Δ имеет представление [8]

$$S_\Delta = (E-K)^{-1}L , \quad u \in L_2(\Gamma_2), \quad (u, 1) = 0, \qquad (2.10)$$

причем, если $(u, 1) = 0$, то $(S_\Delta u, g_0) = 0$. В свою очередь, оператор S_Δ^{-1} на своей области определения $D(S_\Delta^{-1}) \subset L_2(\Gamma_2)$ имеет представление

$$S_\Delta^{-1} = L^{-1}(E-K) , \quad (u, g_0) = 0 . \qquad (2.11)$$

Определим в пространстве X^* новое скалярное произведение

$$(u, v)_\Delta = \langle S_\Delta u, v\rangle , \qquad \forall u, v \in X^*,$$

которое определяет эквивалентную норму $\|u\|_\Delta^2 = (u, u)_\Delta$ в пространстве X^*. Аналогично, скалярное произведение

$$(u, v)_{\Delta^{-1}} = \langle S_\Delta^{-1} u, v\rangle , \qquad \forall u, v \in X$$

порождает норму $\|u\|_{\Delta^{-1}}$, эквивалентную норме X.

Лемма 2. [3] Если в пространствах X и X^* определить нормы $\|\cdot\|_{\Delta^{-1}}$ и $\|\cdot\|_\Delta$ соответственно, то оператор $S_\Delta^{-1} : X \to X^*$ являеется дуализирующим отображением.

Рассмотрим класс операторов $G = G_1^{-1}$ (G_1 - используется в условии (I.2)), удовлетворяющих свойствам

$$D(G^{-1}) = D(L^{-1}(E-K)), \qquad (2.12)$$

G^{-1} - симметричный и положительно определенный в $L_2(\Gamma_2)$ (2.I3)

$$(Gv, g_0)=0,\ \forall v \in L_2(\Gamma_2),\ (v,1)=0;\ (G^{-1}u,1)=0,\ \forall u \in X. \qquad (2.I4)$$

Лемма 3.[3] Оператор $G=(E+K)^{-1}L$, определенный на $L_2(\Gamma_2)$, удовлетворяет свойствам (2.I2) - (2.I4).

Лемма 4.[3] Пусть оператор G удовлетворяет условиям (2.I2) - (2.I4). Тогда норма $\|v\|^2_G=\langle Gv, v\rangle$, $v \in X^*$ эквивалентна норме пространства X^*, а норма $\|u\|^2_{G^{-1}}=\langle G^{-1}u, u\rangle$, $u \in X$ эквивалентна норме X. Оператор $J=G^{-1}: X \to X^*$ является дуализирующим отображением этих пространств.

Полагая далее $G=(E+K)^{-1}L$, что соответствует задачам магнитостатики, получаем, что функционально-аналитическая формулировка (I.II) комбинированной системы эквивалентна [3] операторному уравнению в пространстве X

$$\Phi u_\Gamma \equiv S^{-1}u_\Gamma + G^{-1}u_\Gamma = 0, \quad u_\Gamma \in X, \qquad (2.I5)$$

где $u_\Gamma = \gamma_{0,g_0} u$, u - решение задачи (I.II).

Так как оператор Φ сильно монотонен и липшиц-непрерывен в X то, согласно [6], уравнение $\Phi u = \gamma$ имеет единственное решение $u \in X$ при $\forall \gamma \in X^*$.

Пусть $m_\Phi > 0$ и M_Φ постоянная сильной монотонности и константа Липшица оператора Φ из (2.I5). Для решения уравнения (2.I5) рассмотрим метод простой итерации

$$J\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}\right) = -\Phi u_n, \quad n=0,1,2,\dots \qquad (2.I6)$$

Установленные свойства оператора Φ позволяют применить результат из [6]:

Теорема 3. Метод (2.I6) сходится при $\tau \in \left(0, \frac{2m_\Phi}{M_\Phi^2}\right)$ к единственному решению уравнения (2.I5) со скоростью

$$\|u_n - u_\Gamma\|_X \le \frac{[K(\tau)]^n}{1-K(\tau)} \cdot \|\Phi u_0\|_{X^*},$$

где $J=G^{-1}$, $K(\tau)=(1-2m_\Phi\tau + M_\Phi^2\tau^2)^{1/2} < 1$.

Замечание 3. Аналогичный результат имеет место и при $J=S_\Delta^{-1}$.

Оператор перехода метода (2.I6) имеет вид

$$u_{n+1} = T_\Phi u_n \equiv ((1-\tau)E - \tau G S^{-1})u_n, \quad u_n \in X \qquad (2.I7)$$

Замечание 4. Поскольку оператор S^{-1} потенциален, а оператор G^{-1}- симметричен и положительно определен, то для решения уравнения (2.I5) применимы также градиентные методы (например, метод наискорейшего спуска и сопряженных градиентов).

Рассмотрим непрерывный аналог метода Ньютона.

Теорема 4[3]. Пусть в условиях теоремы 2 функция $t \to \frac{d}{dt}\mu(x,t)t$ дифференцируема по t при почти всех $x \in \Omega$, и $t \in [0,\infty)$. Тогда процесс

$$\frac{du}{d\tau} = -\Phi'(u(\tau))^{-1}\Phi(u(\tau)), \quad u(0)=u_0 \qquad (2.I8)$$

сходится к единственному решению уравнения (2.I5) от произвольного начального приближения.

Замечание 5. Если дискретизованные уравнения с достаточной точностью сохраняют соответствующие свойства операторов S^{-1} и G^{-1}, то к таким конечномерным системам применимы обсуждаемые здесь алгоритмы. Скорость сходимости итераций не зависит от шага дискретизации.

Замечание 6. Приведенные здесь результаты непосредственно переносятся на случай двумерных задач магнитостатики для (x,y)- или (r,z) - геометрий.

Построенные алгоритмы реализованы в виде модульного комплекса [2, 3], предназначенного для решения пространственных задач магнитостатики в неограниченной области на основе скалярного потенциала.

В работах [2,3] приводятся также примеры численных расчетов. Вычисление элемента вида $G v \equiv (E + K)^{-1} L v$ осуществляется с помощью экономичных алгоритмов решения интегральных уравнений теории потенциала на поверхности параллелепипеда (область Ω_2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Препринт ОВМ АН СССР № 137, М, 1986.
2. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ: Р11-86-230, Р11-86-333, Дубна, 1986.
3. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ, Р11-87-501, Дубна, 1987.
4. Агошков В.И.0 Лебедев В.И. В кн.: Вычислительные процессы и системы, вып.2. М.: Наука, 1985, с.173-227.
5. Кузнецов С.Б. Препринт ВЦ СО АН СССР; № 111, Новосибирск, 1984.
6. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
7. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
8. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Препринт ОИЯИ Р11-83-261, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июля 1987 года.

Грегуш М. и др. Р11-87-556
Комбинированные алгоритмы в задачах магнитостатики

Рассмотрены численные алгоритмы для двумерных и пространственных задач магнитостатики в неограниченной области, основанные на комбинировании метода граничных интегральных уравнений с сеточными методами. Приводятся результаты по сходимости итерационных процессов решения возникающих краевых задач в нелинейном случае, а также условия их однозначной разрешимости. Рассмотрены экономичные итерационные процессы решения граничных интегральных уравнений на специальных поверхностях и алгоритмы их использования.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Greguš M. et al. P11-87-556
Combined Algorithms in Magnetostatic Problems

Numerical algorithms for solving two- and three-dimensional problems in magnetostatics for unbounded regions, obtained by combining the method of boundary integral equations with the grid methods, are presented. The results on convergence of iterational processes for solving original boundary problems in nonlinear case and also, for the same problems, the conditions for unique solvability are given. Economical iterative processes to solve the boundary integral equations defined on special surfaces and the algorithms used are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987