87-533

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р11-87-533

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

СВОЙСТВА КВАЗИТРЕХВЕКТОРНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ (ИМ ОБРАТНЫХ) МАТРИЦ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ БЛОКАМИ

Направлено в "Журнал вычислительной математики
и математической физики"

*Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1987

I. Введение

Настоящая работа является продолжением серии работ [I÷4] по изучению свойств квазитрехдиагональных операторов (матриц) и им обратных в случае прямоугольных внедиагональных элементов-блоков при условии всех отличных от нуля главных угловых квазиминоров. Мы приводим здесь лишь ограниченный библиографический список, поскольку в ранее опубликованных работах этой серии можно найти более широкий, из анализа которого можно судить как об актуальности изучаемой проблемы, так и о сравнении результатов настоящей серии с уже известными. Итак, пусть $\mathcal{C}$ -неособенная квазитрехдиагональная матрица (оператор) общего вида[x)]

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & z_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & z_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & z_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \qquad (I.I)$$

где

$\{q_1; q_i, z_i, p_i\}_{i=2}^{m}$ – квадратные (одинаковой размерности) подматрицы $\mathcal{C}$ (I.I), и пусть все главные угловые квазиминоры[xx)] $\mathcal{C}$ (I.I) отличны от нуля. В этом случае в [3] были получены следующие результаты.

Теорема 4 (4'). Пусть $\mathcal{C}$ -неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (I.I) с неособенными q_1- и q_m-матрицами и пусть все главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ (I.I) отличны от нуля. Тогда для $\mathcal{C}$ (I.I) справедливы следующие факторизованные представления:

Представление I (I') Представление 2 (2')

$$\begin{bmatrix} E & & & \\ (-\beta_2)E & & & \\ & (-\beta_3)E & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\beta_m) & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & (-c_2) & & \\ & E & (-c_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & E\,(-c_m) \\ & & & E \end{bmatrix} = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & & & \\ (-\tilde{\beta}_2)E & & & \\ & (-\tilde{\beta}_3)E & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\tilde{\beta}_m) & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & (-c_2) & & \\ & E & (-c_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & E\,(-c_m) \\ & & & E \end{bmatrix}, \qquad (I.2)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{k+1} = -(p_{k+1}\cdot\omega_k^{-1}), \\ c_{k+1} = -(\omega_k^{-1}\cdot z_{k+1}), \\ \tilde{\beta}_{k+1} = -(\omega_{k+1}^{-1}\cdot p_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \omega_k = q_k + p_k\cdot c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \\ c_1 = \mathcal{O} \text{ – нулевая, } p_1, E \text{ – единичные матрицы.} \end{cases} \qquad (I.3)$$

---

x) Напомним, что под оператором $\mathcal{C}$ (I.I) общего вида имеется в виду случай $\{(q_k \neq q_{k'}) \neq (z_k \neq z_{k'}) \neq (p_k \neq p_{k'}),$ при $k \neq k'\}_{k=1}^{m}$.

xx) Под главными угловыми квазиминорами, как и в [3], понимаются определители матриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно.

Представление 3 (3') Представление 4 (4')

$$
\begin{bmatrix} E & (-\hat{\beta}_2) & & \\ & E & (-\hat{\beta}_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & E & (-\hat{\beta}_m) \\ & & & & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 & & & \\ & \hat{\omega}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{\omega}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & & & \\ (-\hat{c}_2) & E & & \\ & (-\hat{c}_3) & E & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & (-\hat{c}_m) & E \end{bmatrix} = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 & & & \\ & \hat{\omega}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{\omega}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & (-\tilde{\tilde{\beta}}_2) & & \\ & E & (-\tilde{\tilde{\beta}}_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & E & (-\tilde{\tilde{\beta}}_m) \\ & & & & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & & & \\ (-\hat{c}_2) & E & & \\ & (-\hat{c}_3) & E & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & (-\hat{c}_m) & E \end{bmatrix}, \quad (I.4)
$$

где

$$
\begin{cases} \hat{\beta}_{k+1} = -(z_{k+1} \cdot \hat{\omega}_{k+1}^{-1}), \\ \hat{c}_{k+1} = -(\hat{\omega}_{k+1}^{-1} \cdot p_{k+1}), \\ \tilde{\tilde{\beta}}_{k+1} = -(\hat{\omega}_k^{-1} \cdot z_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \hat{\omega}_k = q_k + z_{k+1} \cdot \hat{c}_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \\ \hat{c}_{m+1} = \mathcal{O}; \quad z_{m+1}, E \quad \text{– единичные матрицы.} \end{cases} \quad (I.5)
$$

Замечание I. (Теорема 4'). Отметим, что теорема 4 (т.е. представления I,2,3,4) будут также справедливы и в случае, когда $\mathcal{C}$ (I.I) – неособенные матрицы с прямоугольными элементами-блоками $\{z_i, p_i\}_{i=2}^{m}$, размерности которых определяются размерностями квадратных матриц $\{q_i\}_{i=1}^{m}$ – разных порядков, и все главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ (I.I) отличны от нуля. На доказательстве этого результата мы не будем здесь останавливаться, поскольку оно совпадает с доказательством[x)] теоремы 4, выполненным уже в [3].

Лемма 3(3'). Если $\mathcal{C}$ -неособенная квазитрехдиагональная матрица, удовлетворяющая условиям теоремы (4'), то элементы-блоки $\mathcal{B}_{ij}$ обратной матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$ могут быть представлены в виде

Представление I(I')

$$
\begin{cases} \mathcal{B}_{ij} = \sum\limits_{k=\max(i,j)}^{m} \prod\limits_{\mu=i+1}^{k} c_\mu \cdot \omega_k^{-1} \cdot \prod\limits_{\zeta=j+1}^{k} \beta_\zeta, & \text{или} \\ \mathcal{B}_{ij} = \sum\limits_{k=\max(i,j)}^{m} \prod\limits_{\mu=i+1}^{k} c_\mu \cdot \prod\limits_{\zeta=j+1}^{k} \tilde{\beta}_\zeta \cdot \omega_j^{-1}, & \text{где определены} \end{cases} \quad (I.6)
$$

следующие порядки умножения операторов (матриц):

$$
\begin{cases} \prod\limits_{\mu=q+1}^{p} c_\mu = \begin{cases} c_{q+1} \cdot c_{q+2} \cdots c_p, & \text{если } p > q \\ E, & \text{если } p \le q \end{cases} \\ \prod\limits_{\mu=q+1}^{p} \beta_\mu = \begin{cases} \beta_p \cdot \beta_{p-1} \cdots \beta_{q+1}, & \text{если } p > q \\ E, & \text{если } p \le q \end{cases} \\ \prod\limits_{\mu=q+1}^{p} \tilde{\beta}_\mu = \begin{cases} \tilde{\beta}_p \cdot \tilde{\beta}_{p-1} \cdots \tilde{\beta}_{q+1}, & \text{если } p > q \\ E, & \text{если } p \le q. \end{cases} \end{cases} \quad (I.7)
$$

x) Напомним, что в [3] была введена последовательная нумерация представлений отдельно для самого оператора $\mathcal{C}$ (I.I), а также для ему обратного, т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$. А также в этой серии работ принята единая нумерация теорем и лемм.

Представление 2(2')

$$
\begin{cases} \mathcal{B}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)} \prod\limits_{\mu=k+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod\limits_{\zeta=k+1}^{j} \hat{\beta}_\zeta, & \text{или} \\ \mathcal{B}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)} \prod\limits_{\mu=k+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \prod\limits_{\zeta=k+1}^{j} \tilde{\tilde{\beta}}_\zeta \cdot \hat{\omega}_j^{-1}, & \text{где определены} \end{cases} \quad (I.8)
$$

следующие порядки умножения операторов (матриц):

$$
\begin{cases} \prod\limits_{\mu=q+1}^{p} \hat{\beta}_\mu = \begin{cases} \hat{\beta}_{q+1} \cdot \hat{\beta}_{q+2} \cdots \hat{\beta}_{p-1} \cdot \hat{\beta}_p, & \text{если } p > q \\ E, & \text{если } p \le q \end{cases} \\ \prod\limits_{\mu=q+1}^{p} \hat{c}_\mu = \begin{cases} \hat{c}_p \cdot \hat{c}_{p-1} \cdots \hat{c}_{q+1}, & \text{если } p > q \\ E, & \text{если } p \le q \end{cases} \\ \prod\limits_{\mu=q+1}^{p} \tilde{\tilde{\beta}}_\mu = \begin{cases} \tilde{\tilde{\beta}}_{q+1} \cdot \tilde{\tilde{\beta}}_{q+2} \cdots \tilde{\tilde{\beta}}_p, & \text{если } p > q \\ E, & \text{если } p \le q. \end{cases} \end{cases} \quad (I.9)
$$

При этом имеют место следующие "коммутационные" соотношения для структурных последовательностей операторов (матриц):

$$
\begin{aligned} \omega_k^{-1} \cdot \prod_{\zeta=j+1}^{k} \beta_\zeta &= \prod_{\zeta=j+1}^{k} \tilde{\beta}_\zeta \cdot \omega_j^{-1}, \quad j \le k \\ \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\zeta=k+1}^{j} \hat{\beta}_\zeta &= \prod_{\zeta=k+1}^{j} \tilde{\tilde{\beta}}_\zeta \cdot \hat{\omega}_j^{-1}, \quad k \le j. \end{aligned} \quad (I.10)
$$

Здесь по-прежнему матрицы $\{c, \hat{c}, \beta, \hat{\beta}, \tilde{\tilde{\beta}}, \tilde{\beta}, \omega, \hat{\omega}\}$, определяющие структурные последовательности (I.7), (I.9), определены в (I.3), (I.5).

Замечание 2. (Лемма 3'). Отметим также, что лемма 3 справедлива в случае, когда $\mathcal{C}$ (I.I) – неособенные матрицы с прямоугольными элементами-блоками $\{z_i, p_i\}_{i=2}^{m}$, размерности которых определяются размерностями квадратных матриц $\{q_i\}_{i=1}^{m}$ – разных порядков, и все главные угловые квазиминоры (I.I) отличны от нуля. На доказательстве этого факта снова не будем останавливаться, чтобы формально не повторять [3].

Теорема 5(5'). Пусть $\mathcal{C}$ -неособенная, квазитрехдиагональная матрица вида (I.I) с неособенными q_1- и q_m- матрицами и пусть все главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ (I.I) отличны от нуля. Тогда для элементов-блоков $\mathcal{B}_{ij}$ обратной матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$ имеют место следующие факторизованные представления.

Представление 3(3')

$$
\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} \tilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod\limits_{\zeta=j+1}^{i} \beta_\zeta, & \text{если } 1 \le j \le i \le m \\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j} c_\mu \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{jj}, & \text{если } 1 \le i \le j \le m, \quad \text{где} \end{cases} \quad (I.II)
$$

$$
\tilde{\mathcal{B}}_{ll} = \sum_{\mu=l+1}^{m} \prod_{\mu=l+1}^{k} c_\mu \cdot \omega_k^{-1} \cdot \prod_{\zeta=l+1}^{k} \beta_\zeta, \quad l = m, m-1, \ldots, 1. \quad (I.12)
$$

Представление 4(4')

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{ij-1} = \mathcal{B}_{ij} \cdot \beta_j , & \text{если } 1 \le j \le i \le m \\ \mathcal{B}_{i-1j} = c_i \cdot \mathcal{B}_{ij} , & \text{если } 1 \le i \le j \le m ;\ \mathcal{B}_{ii} = \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} ; \\ \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} = \omega_i^{-1} + c_{i+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{i+1i+1} \cdot \beta_{i+1} ;\ \widetilde{\mathcal{B}}_{mm} = \omega_m^{-1} ,\ i = m-1, m-2, \ldots, 1 . \end{cases} \tag{I.13}$$

Представление 5(5')

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} \prod_{\mu=j+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\mathcal{B}}_{jj} , & \text{если } 1 \le j \le i \le m \\ \hat{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod_{\eta=i+1}^{j} \hat{\beta}_\eta , & \text{если } 1 \le i \le j \le m , \end{cases} \tag{I.14}$$

где

$$\hat{\mathcal{B}}_{\ell\ell} = \sum_{k=1}^{\ell} \prod_{\mu=k+1}^{\ell} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\eta=k+1}^{\ell} \hat{\beta}_\eta ,\ \ell = 1, 2, \ldots, m . \tag{I.15}$$

Представление 6(6')

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{ij+1} = \mathcal{B}_{ij} \cdot \hat{\beta}_{j+1} , & \text{если } 1 \le i \le j \le m \\ \mathcal{B}_{i+1j} = \hat{c}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{ij} , & \text{если } 1 \le j \le i \le m ;\ \mathcal{B}_{ii} = \hat{\mathcal{B}}_{ii} ; \\ \hat{\mathcal{B}}_{ii} = \hat{\omega}_i^{-1} + \hat{c}_i \cdot \hat{\mathcal{B}}_{i-1i-1} \cdot \hat{\beta}_i ;\ \hat{\mathcal{B}}_{11} = \hat{\omega}_1^{-1} ,\ i = 2, 3, \ldots, m . \end{cases} \tag{I.16}$$

Здесь по-прежнему $\{ c, \beta, \omega ; \hat{c}, \hat{\beta}, \hat{\omega} \}$ – определены в (I.3) и (I.5), а также справедливы порядки умножения операторов (I.7) и (I.9).

Замечание 3 (Теорема 5'). Отметим также, что и для теоремы 5 из [3], которая доказана для $\mathcal{C}$ (I.I) в случае квадратных блоков, справедливо все сказанное в замечаниях I и 2 и она имеет место для матриц $\mathcal{C}$ (I.I), в случае прямоугольных блоков $\{ z_i \text{ и } \rho_i \}_{i=2}^{m}$, поскольку при доказательстве теорем 4(4') и лемм 3(3') мы нигде, как в [3], так и выше, не требовали обратимости операторов (матриц) $\{ z_k \text{ и } \rho_k \}_{k=2}^{m}$.

Итак, выше мы указали на существование теорем 4' и 5', а также леммы 3', которые являются обобщением [3] на случай матриц вида (I.I), у которых $\{ q_k \}_{k=1}^{m}$ – квадратные блоки различных размерностей, а $\{ \rho_k, z_k \}_{k=2}^{m}$ – соответственно прямоугольные. При этом формулировки указанных теорем и леммы совпадают с формулировками соответственных теорем из [3], а доказательства абсолютно одинаковые. Это позволило нам ограничиться лишь указанными замечаниями I,2,3, а также ввести (как выше, так и всюду далее) ту же нумерацию основных результатов (теоремы, леммы, представления), снабдив их лишь штрихами, если для результатов этой работы были аналоги в [3]. Однако обобщение остальных результатов из [3] на случай матриц $\mathcal{C}$ (I.I) с прямоугольными блоками требует самостоятельного рассмотрения, поскольку теперь $\{ det(\rho_k) = 0 \text{ и } det(z_k) = 0 \}$. Последнее обстоятельство порой требует иного подхода, чем в [3], к доказательству.

2. Свойства квазитрехвекторных факторизаций неособенных квазитрехдиагональных (им обратных) операторов с неособенными диагональными (разных порядков) элементами-блоками $\{ det\, q_i \ne 0 \}_{i=1}^{m}$, в случае всех отличных от нуля квазиминоров

Пусть теперь $\mathcal{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица общего вида (I.I) с неособенными квадратными диагональными подматрицами $\{ q_i \}_{i=1}^{m}$ – разных размерностей, у которых внедиагональные подматрицы $\{ z_i, \rho_i \}_{i=2}^{m}$ – прямоугольные соответствующих разных размерностей. Пусть также все главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ отличны от нуля. В этом случае (по аналогии с [3]) матрицу $\mathcal{C}$ представим в виде[x)]

$$\mathcal{C} = \widetilde{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} E_1 & \widetilde{z}_2 & & & & \\ \widetilde{\rho}_2 & E_2 & \widetilde{z}_3 & & & \\ & \widetilde{\rho}_3 & E_3 & \widetilde{z}_4 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \widetilde{\rho}_{m-1} & E_{m-1} & \widetilde{z}_m \\ & & & & \widetilde{\rho}_m & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix} , \tag{2.1}$$

где

$$\{ \widetilde{z}_k = z_k \cdot q_k^{-1} ;\ \widetilde{\rho}_k = \rho_k \cdot q_{k-1}^{-1} \}_{k=2}^{m} \text{ –} \tag{2.2}$$

– прямоугольные подматрицы (элементы-блоки) матрицы $\widetilde{\mathcal{C}}$, размерности которых совпадают с размерностями соответственно $\{ z_k \text{ и } \rho_k \}_{k=2}^{m}$; $\{ \mathcal{O}_i, E_i \}_{i=1}^{m}$ – нулевые и единичные матрицы, размерности которых совпадают с размерностями $\{ q_i \}_{i=1}^{m}$, $\{ \mathcal{O}_{ij} \}_{i,j}$ – матрицы, состоящие из нулей (при этом размерности матриц $\mathcal{O}_{ij}$ совпадают с размерностями матриц $\mathcal{B}_{ij}$). Отметим, что, как и в [3], в этом случае обратный оператор $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$ формально можем представить в виде

$$\mathcal{B} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \cdot (\widetilde{\mathcal{C}}^{-1} \equiv \widetilde{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} q_1^{-1} & & & \\ & q_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & \widetilde{z}_2 & & & & \\ \widetilde{\rho}_2 & E_2 & \widetilde{z}_3 & & & \\ & \widetilde{\rho}_3 & E_3 & \widetilde{z}_4 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \widetilde{\rho}_{m-1} & E_{m-1} & \widetilde{z}_m \\ & & & & \widetilde{\rho}_m & E_m \end{bmatrix}^{-1} , \tag{2.3}$$

где $\{ E_1 ; E_i, \widetilde{z}_i, \widetilde{\rho}_i \}_{i=2}^{m}$ – определены в (2.2). Справедлива следующая

Теорема 6(6'). Пусть $\mathcal{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (2.I), все главные угловые квазиминоры которой отличны от нуля. Тогда для элементов-блоков обратного оператора $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$ справедливы следующие единственные факторизованные представления:

x) Здесь, как и в [3], и всюду далее рассматривается именно правая факторизация $\mathcal{C}$ (I.I), хотя результаты при другой факторизации (т.е. $diag(q_i)$ выносится налево) получаются аналогично.

Представление 7(7')

$$(\mathcal{B}_{ij}^{\cdot\cdot}=q_i^{-1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ij}^{\cdot\cdot})=q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot\cdot}\cdot\prod\limits_{z=j+1}^{i}\beta_z, & \text{если } 1\le j\le i\le m\\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j}c_\mu\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{\cdot\cdot}, & \text{если } 1\le i\le j\le m.\end{cases}\tag{2.4}$$

Представление 8(8')

$$(\mathcal{B}_{ij}^{\cdot\cdot}=q_i^{-1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ij}^{\cdot\cdot})=q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\prod\limits_{\mu=j+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{\cdot\cdot}, & \text{если } 1\le j\le i\le m\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot\cdot}\cdot\prod\limits_{z=i+1}^{j}\hat{\beta}_z, & \text{если } 1\le i\le j\le m.\end{cases}\tag{2.5}$$

Представление 9(9')

$$(\mathcal{B}_{ij}^{\cdot\cdot}=q_i^{-1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ij}^{\cdot\cdot})=q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot\cdot}\cdot\prod\limits_{z=j+1}^{i}\beta_z, & \text{если } 1\le j\le i\le m\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot\cdot}\cdot\prod\limits_{z=i+1}^{j}\hat{\beta}_z, & \text{если } 1\le i\le j\le m.\end{cases}\tag{2.6}$$

Представление 10(10')

$$(\mathcal{B}_{ij}^{\cdot\cdot}=q_i^{-1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ij}^{\cdot\cdot})=q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\prod\limits_{\mu=j+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{\cdot\cdot}, & \text{если } 1\le j\le i\le m\\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j}c_\mu\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{\cdot\cdot}, & \text{если } 1\le i\le j\le m.\end{cases}\tag{2.7}$$

Здесь $\tilde{\mathcal{B}}_{kk}$ – квадратные неособенные диагональные элементы-блоки обратного оператора $\tilde{\mathcal{B}}=\tilde{\mathcal{C}}^{-1}$ для $\tilde{\mathcal{C}}$ (2.1), единственным образом представимые в виде

$$\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{kk}=[\Lambda_{k+1}+G_{k-1}-E_k]^{-1}, \quad k=1,2,\dots,m \qquad \text{где}\\ \Lambda_{k+1}=E_k-\tilde{p}_k\cdot\Lambda_k^{-1}\cdot\tilde{z}_k;\ \Lambda_1=E_1,\ k=2,3,\dots,m\\ G_{k-1}=E_k-\tilde{z}_{k+1}\cdot G_k^{-1}\cdot\tilde{p}_{k+1};\ G_{m-1}=E_m,\ k=m-1,m-2,\dots,1.\end{cases}\tag{2.8}$$

При этом $\{\det(\Lambda_k)\ne0;\ \det(G_k)\ne0\}_{k=1}^{m}$ и прямоугольные операторы $\{c,\hat{c};\beta,\hat{\beta}\}$ выражаются через операторы $\{G$ и $\Lambda\}$ в виде

$$\begin{cases}\beta_{k+1}=-(\tilde{p}_{k+1}\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}),\\ c_{k+1}=-(\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\tilde{z}_{k+1}),\\ \hat{\beta}_{k+1}=-(\tilde{z}_{k+1}\cdot G_k^{-1}),\\ \hat{c}_{k+1}=-(G_k^{-1}\cdot\tilde{p}_{k+1}),\quad k=1,2,\dots,m-1,\end{cases}\tag{2.9}$$

а также по-прежнему сохраняется порядок умножения операторов (1.7) и (1.9).

Доказательство. Невырожденность всех $\{G_k$ и $\Lambda_k\}_{k=1}^{m}$ является следствием отличия от нуля всех главных угловых квазиминоров $\mathcal{C}$. Отметим, что минимальные размерности матриц $\{\tilde{z}_i,\tilde{p}_i\}_{i=2}^{m}$ совпадают с размерностью соответствующих $\{q_i\}_{i=1}^{m}$. Следовательно, в (2.8) размерности квадратных матриц $\{\Lambda_{k+1}\}_{k=1}^{m}$ совпадают с размерностью соответствующих $\{q_k\}_{k=1}^{m}$, а размерности квадратных матриц $\{G_{k-1}\}_{k=m}^{1}$ также совпадают с размерностью соответствующих матриц $\{q_k\}_{k=m}^{1}$. Справедливость **представлений** 9' и 10' покажем (с учетом преобразований (2.1), (2.3)) на основе проверки основных равенств $\mathcal{C}\cdot\mathcal{B}=E=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$. При этом, очевидно [3], последние равенства эквивалентны двум системам матричных равенств

$$\begin{cases}\tilde{p}_i\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{i-1j}+E_i\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ij}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{i+1j}=0_{ij}, & \text{если } 1\le i<j\le m\\ \tilde{p}_i\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{i-1i}+E_i\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ii}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{i+1i}=E_i, & \text{если } 1\le i=j\le m\\ \tilde{z}_{i+1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{i+1j}+E_i\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ij}+\tilde{p}_i\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{i-1j}=0_{ij}, & \text{если } 1\le j<i\le m\end{cases}\tag{2.10}$$

$$\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ij+1}\cdot\tilde{p}_{j+1}+\tilde{\mathcal{B}}_{ij}\cdot E_j+\tilde{\mathcal{B}}_{ij-1}\cdot\tilde{z}_j=0_{ij}, & \text{если } 1\le i<j\le m\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii-1}\cdot\tilde{z}_i+\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot E_i+\tilde{\mathcal{B}}_{ii+1}\cdot\tilde{p}_{i+1}=E_i, & \text{если } 1\le i=j\le m\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ij-1}\cdot\tilde{z}_j+\tilde{\mathcal{B}}_{ij}\cdot E_j+\tilde{\mathcal{B}}_{ij+1}\cdot\tilde{p}_{j+1}=0_{ij}, & \text{если } 1\le j<i\le m.\end{cases}\tag{2.11}$$

Сначала выполним обоснование единственности и неособенности представлений $(2.8)_1$ для диагональных блоков $\tilde{\mathcal{B}}_{kk}$. Подставив выражения для $\tilde{\mathcal{B}}_{i-1i}$ и $\tilde{\mathcal{B}}_{i+1i}$ из представлений (2.7) в $(2.10)_2$, получим равенства

$$\tilde{p}_i\cdot\prod_{\mu=i}^{i}c_\mu\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ii}+E_i\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ii}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\prod_{\mu=i+1}^{i+1}\hat{c}_\mu\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ii}=E_i,\quad 1\le i=j\le m.$$

Отсюда в силу определения (1.7) и (1.9) получаем

$$(\tilde{p}_i\cdot c_i+E_i+\tilde{z}_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1})\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ii}=E_i,\quad 1\le i=j\le m,\tag{2.12}$$

а также, подставив в $(2.11)_2$ выражения для $\tilde{\mathcal{B}}_{i-1i}$ и $\tilde{\mathcal{B}}_{i+1i}$ из представлений (2.6), получим равенства

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot\prod_{z=i}^{i}\beta_z\cdot\tilde{z}_i+\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot E_i+\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot\prod_{z=i+1}^{i+1}\hat{\beta}_z\cdot\tilde{p}_{i+1}=E_i,\quad 1\le i=j\le m.$$

Отсюда в силу определения (1.7) и (1.9) имеем

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot(\beta_i\cdot\tilde{z}_i+E_i+\hat{\beta}_{i+1}\cdot\tilde{p}_{i+1})=E_i,\quad 1\le i=j\le m.\tag{2.13}$$

Теперь, подставляя в (2.12) и (2.13) выражения для $\{c,\hat{c};\beta,\hat{\beta}\}$ из (2.9), а также пользуясь определением последовательности (2.8), получаем

$$(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ii}=E_i,\quad i=1,2,\dots,m;\tag{2.14}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)=E_i,\quad i=1,2,\dots,m.\tag{2.15}$$

Отсюда в силу единственности $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ приходим к равенствам

$$(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{ii}=\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i),\quad i=1,2,\dots,m.\tag{2.16}$$

Воспользовавшись теперь ограниченностью $\tilde{\mathcal{B}}_{ii}$ и проводя рассуждения, аналогичные [3], в каждом из равенств (2.14) и (2.15), в силу **теоремы** Банаха [5] получим представления для неособенных диагональных блоков

$\widetilde{B}_{KK}$ в виде $(2.8)_{I)}$. Как видим, это совпадает с определением (2.16) единственного левого (правого) обратного неособенного оператора к $\widetilde{B}_{ii}$. Далее покажем, что равенства (2.10) и (2.11) при подстановке в них представления 9′ обращаются в тождества. Подставив (2.6) в $(2.10)_{I)}$, получаем

$$P_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\prod_{z=i}^{j}\hat{\beta}_z+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii}\cdot\prod_{z=i+1}^{j}\hat{\beta}_z+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\prod_{z=i+2}^{j}\hat{\beta}_z=\mathcal{O}_{ij},\quad 1\le i<j\le m .$$

Отсюда, учитывая порядок умножения операторов (1.9), имеем

$$(\tilde{P}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\hat{\beta}_i\cdot\hat{\beta}_{i+1}+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii}\cdot\hat{\beta}_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1})\cdot\prod_{z=i+2}^{j}\hat{\beta}_z=\mathcal{O}_{ij},\quad 1\le i<j\le m . \tag{2.17}$$

Подставив (2.6) в $(2.10)_{3)}$, получаем

$$\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\prod_{z=j+1}^{i+1}\beta_z+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii}\cdot\prod_{z=j+1}^{i}\beta_z+\tilde{P}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\prod_{z=j+1}^{i-1}\beta_z=\mathcal{O}_{ij},\quad 1\le j<i\le m .$$

Отсюда, учитывая порядок умножения операторов (1.7), имеем

$$(\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\beta_{i+1}\cdot\beta_i+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii}\cdot\beta_i+\tilde{P}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1})\cdot\prod_{z=j+1}^{i-1}\beta_z=\mathcal{O}_{ij},\quad 1\le j<i\le m. \tag{2.18}$$

Подставив (2.6) в **среднее из равенств** $(2.10)_{2)}$, **получаем**

$$\tilde{P}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\hat{\beta}_i+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\beta_{i+1}=E_i,\quad 1\le i\le m . \tag{2.19}$$

Как видим из (2.17), (2.18) и (2.19), нам осталось показать справедливость следующих тождеств (при условиях $\prod_{z=i+2}^{j}\hat{\beta}_z\neq\mathcal{O};\ \prod_{z=j+1}^{i-1}\beta_z\neq\mathcal{O}$ и $\widetilde{B}_{KK}\ (2.8)_{1)}$):

$$\begin{cases}(\tilde{P}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\beta_i+E_i\cdot B_{ii})\cdot\hat{\beta}_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\equiv\mathcal{O}_i, & 1\le i\le m-1\\ \tilde{P}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\hat{\beta}_i+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\beta_{i+1}\equiv E_i, & 1\le i\le m\\ (\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\beta_{i+1}+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii})\cdot\beta_i+\tilde{P}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\equiv\mathcal{O}_i, & 2\le i\le m .\end{cases} \tag{2.20}$$

Аналогично тому, как поступили выше, подставляя **представления** 9′ в (2.11), получаем равенства

$$\begin{cases}\widetilde{B}_{ii}\cdot\prod_{z=i+1}^{j-1}\hat{\beta}_z\cdot[(\hat{\beta}_j\cdot\hat{\beta}_{j+1})\cdot\tilde{P}_{j+1}+\hat{\beta}_j\cdot E_j+\tilde{z}_j]=\mathcal{O}_{ij}, & 1\le i\le j\le m\\ \widetilde{B}_{ii}\cdot[\beta_i\cdot\tilde{z}_i+E_i+\hat{\beta}_{i+1}\cdot\tilde{P}_{i+1}]=E_i, & 1\le i=j\le m\\ \widetilde{B}_{ii}\cdot\prod_{z=j+2}^{i}\beta_z\cdot[(\beta_{j+1}\cdot\beta_j)\cdot\tilde{z}_j+\beta_{j+1}\cdot E_j+\tilde{P}_{j+1}]=\mathcal{O}_{ij}, & 1\le j<i\le m .\end{cases} \tag{2.21}$$

Отсюда, воспользовавшись неособенными $\widetilde{B}_{KK}$ (2.8) и $\prod_{z=i+1}^{j-1}\hat{\beta}_z\neq\mathcal{O}$; $\prod_{z=i+2}^{i}\beta_z\neq\mathcal{O}$, мы должны показать справедливость следующих тождеств:

$$\begin{cases}(\hat{\beta}_j\cdot\hat{\beta}_{j+1})\cdot\hat{P}_{j+1}+\hat{\beta}_j\cdot E_j+\tilde{z}_j\equiv\mathcal{O}_j, & 2\le j\le m\\ \widetilde{B}_{ii}\cdot(\beta_i\cdot\tilde{z}_i+E_i+\hat{\beta}_{i+1}\cdot\tilde{P}_{i+1})\equiv E_i, & 1\le i\le m\\ (\beta_{j+1}\cdot\beta_j)\cdot\tilde{z}_j+\beta_{j+1}\cdot E_j+\tilde{P}_{j+1}\equiv\mathcal{O}_j, & 1\le j\le m-1 .\end{cases} \tag{2.22}$$

Подставив теперь **представление** 10′ в (2.10) и в (2.11), получаем равенства

$$\begin{cases}[\tilde{P}_i\cdot(c_i\cdot c_{i+1})+E_i\cdot c_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}]\cdot\prod_{\mu=i+2}^{j}c_\mu=\mathcal{O}_{ij}, & 1\le i<j\le m\\ [\tilde{P}_i\cdot c_i+E_i+\tilde{z}_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1}]\cdot\widetilde{B}_{ii}=E_i, & 1\le i=j\le m\\ [\tilde{z}_{i+1}\cdot(\hat{c}_{i+1}\cdot\hat{c}_i)+E_i\cdot\hat{c}_i+\tilde{P}_i]\cdot\prod_{\mu=j+1}^{i-1}\hat{c}_\mu=\mathcal{O}_{ij}, & 1\le j<i\le m,\end{cases} \tag{2.23}$$

$$\begin{cases}\prod_{\mu=i+1}^{j-1}c_\mu\cdot[(c_j\cdot c_{j+1})\cdot\widetilde{B}_{j+1j+1}\cdot\tilde{P}_{j+1}+c_j\cdot\widetilde{B}_{jj}\cdot E_j+\widetilde{B}_{j-1j-1}\cdot\tilde{z}_j]=\mathcal{O}_{ij}, & 1\le i<j\le m\\ \hat{c}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\tilde{z}_i+\widetilde{B}_{ii}\cdot E_i+c_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\tilde{P}_{i+1}=E_i, & 1\le i=j\le m\\ \prod_{\mu=j+2}^{i}\hat{c}_\mu\cdot[(\hat{c}_{j+1}\cdot\hat{c}_j)\cdot\widetilde{B}_{j-1j-1}\cdot\tilde{z}_j+\hat{c}_{j+1}\cdot\widetilde{B}_{jj}\cdot E_j+\widetilde{B}_{j+1j+1}\cdot\tilde{P}_{j+1}]=\mathcal{O}_{ij}, & 1\le j<i\le m .\end{cases} \tag{2.24}$$

В равенствах (2.23) и (2.24), воспользовавшись также неособенными $\widetilde{B}_{KK}$ (2.8) при условиях $\prod_{\mu=j+1}^{i}\hat{c}_\mu\neq\mathcal{O}\neq\prod_{\mu=i+1}^{j}c_\mu$, должны показать справедливость следующих тождеств:

$$\begin{cases}\tilde{P}_i\cdot(c_i\cdot c_{i+1})+E_i\cdot c_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}\equiv\mathcal{O}_i, & 1\le i\le m-1\\ [\tilde{P}_i\cdot c_i+E_i+\tilde{z}_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1}]\cdot\widetilde{B}_{ii}\equiv E_i, & 1\le i\le m\\ \tilde{z}_{i+1}\cdot(\hat{c}_{i+1}\cdot\hat{c}_i)+E_i\cdot\hat{c}_i+\tilde{P}_i\equiv\mathcal{O}_i, & 2\le i\le m\end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases}(c_j\cdot c_{j+1})\cdot\widetilde{B}_{j+1j+1}\cdot\tilde{P}_{j+1}+c_j\cdot\widetilde{B}_{jj}\cdot E_j+\widetilde{B}_{j-1j-1}\cdot\tilde{z}_j\equiv\mathcal{O}_j, & 2\le j\le m\\ \hat{c}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\tilde{z}_i+\widetilde{B}_{ii}\cdot E_i+c_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\tilde{P}_{i+1}\equiv E_i, & 1\le i\le m\\ (\hat{c}_{j+1}\cdot\hat{c}_j)\cdot\widetilde{B}_{j-1j-1}\cdot\tilde{z}_j+\hat{c}_{j+1}\cdot\widetilde{B}_{jj}\cdot E_j+\widetilde{B}_{j+1j+1}\cdot\tilde{P}_{j+1}\equiv\mathcal{O}_j, & 1\le j\le m.\end{cases} \tag{2.26}$$

Итак, мы должны показать справедливость систем тождеств (2.20), (2.22) и (2.25), (2.26), установив тем самым справедливость **представлений** 9′ и 10′. Справедливость тождеств (2.22) и (2.25) легко проверяется, если воспользоваться определениями $\{c,\hat{c};\beta,\hat{\beta}\}$ (2.9) и $\{\Lambda,G\}$ (2.8), а также неособенными $\widetilde{B}_{KK}$ $(2.8)_{I)}$. Теперь покажем справедливость (2.20) и (2.26). Сначала покажем справедливость $(2.20)_{2)}$ и $(2.26)_{2)}$ при $\widetilde{B}_{KK}=(\Lambda_{K+1}+G_{K-1}-E_K)^{-1}$. Из $(2.20)_{2)}$ и $(2.25)_{2)}$, учитывая единственность $\{E_i\}_{i=1}^{m}$, получим равенства

$$\tilde{P}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\hat{\beta}_i-\hat{c}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\tilde{z}_i\overset{1\le i\le m}{=\!=}c_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\tilde{P}_{i+1}-\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\beta_{i+1}. \tag{2.27}$$

Покажем, что (2.27) обращаются в тождества при $\widetilde{B}_{KK}$ $(2.8)_{I)}$. Для этого покажем сначала, что имеют место следующие равенства[x] при $\widetilde{B}_{KK}$ $(2.8)_{I)}$:

---

x) Замечание 4. В отличие от аналогичных равенств (3.28) из [3] настоящие равенства (2.28) не дают информации о факторизованных представлениях для диагональных блоков B_{ii} .

$$\begin{cases} \begin{cases} c_i\cdot\widetilde{B}_{ii} = \widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot\hat{\beta}_i, & 2\le i\le m \\ \widetilde{B}_{ii}\cdot\hat{\beta}_{i+1} = c_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}, & 1\le i\le m-1 \end{cases} \\ \begin{cases} \widetilde{B}_{ii}\cdot\beta_i = \hat{c}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}, & 2\le i\le m \\ \hat{c}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{ii} = \widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot\beta_{i+1}, & 1\le i\le m-1. \end{cases} \end{cases} \tag{2.28}$$

Проверим любое равенство из (2.28) при $\widetilde{B}_{KK}$ $(2.8)_{I)}$. Например, $(2.28)_{I)}$ и $(2.28)_{3)}$, воспользовавшись определениями $\{c,\hat{c};\beta,\hat{\beta}\}$ (2.9) и учитывая неособенность $\widetilde{B}_{ii}$ $(2.8)_{I)}$, перепишем в виде

$$\begin{cases} \widetilde{B}^{-1}_{K-1\,K-1}\cdot(\Lambda_K^{-1}\cdot\tilde{z}_K) = (\tilde{z}_K\cdot G^{-1}_{K-1})\cdot\widetilde{B}^{-1}_{KK}, \\ (\tilde{p}_K\cdot\Lambda_K^{-1})\cdot\widetilde{B}^{-1}_{K-1\,K-1} = \widetilde{B}^{-1}_{KK}\cdot(G^{-1}_{K-1}\cdot\tilde{p}_K), & 2\le K\le m. \end{cases} \tag{2.28$'$}$$

Подставив $\widetilde{B}_{KK}$ $(2.8)_{I)}$ в $(2.28)'_{I)}$ и при этом учитывая определения последовательностей $\{\Lambda, G\}$ (2.8), приходим к тождествам

$$[\widetilde{B}^{-1}_{K-1\,K-1}\cdot(\Lambda_K^{-1}\cdot\tilde{z}_K)-(\tilde{z}_K\cdot G^{-1}_{K-1})\cdot\widetilde{B}^{-1}_{KK}] = [(\Lambda_K+G_{K-2}-E_{K-1})\cdot(\Lambda_K^{-1}\cdot\tilde{z}_K)-$$
$$-(\tilde{z}_K\cdot G^{-1}_{K-1})\cdot(\Lambda_{K+1}+G_{K-1}-E_K)] \equiv [\tilde{z}_K+(G_{K-2}-E_{K-1})\cdot(\Lambda_K^{-1}\cdot\tilde{z}_K)-$$
$$-(\tilde{z}_K\cdot G^{-1}_{K-1})\cdot(\Lambda_{K+1}-E_K)-\tilde{z}_K] \equiv [-\tilde{z}_K\cdot G^{-1}_{K-1}\cdot(\tilde{p}_K\cdot\Lambda_K^{-1}\cdot\tilde{z}_K)+\tilde{z}_K\cdot G^{-1}_{K-1}\cdot$$
$$\cdot(\tilde{p}_K\cdot\Lambda_K^{-1}\cdot\tilde{z}_K)] \equiv \mathbb{O}_K, \quad \text{для всех } 2\le K\le m.$$

Подставив также $\widetilde{B}_{KK}$ $(2.8)_{I)}$ в $(2.28)'_{2)}$ и при этом учитывая определения последовательностей (2.8), приходим к тождествам

$$[(\tilde{p}_K\cdot\Lambda_K^{-1})\cdot\widetilde{B}^{-1}_{K-1\,K-1}-B^{-1}_{KK}\cdot(G^{-1}_{K-1}\cdot\tilde{p}_K)] = [(\tilde{p}_K\cdot\Lambda_K^{-1})\cdot(\Lambda_K+G_{K-2}-E_{K-1})-$$
$$-(\Lambda_{K+1}+G_{K-1}-E_K)\cdot(G^{-1}_{K-1}\cdot\tilde{p}_K)] \equiv [\tilde{p}_K-(\tilde{p}_K\cdot\Lambda_K^{-1})\cdot(\tilde{z}_K\cdot G^{-1}_{K-1}\cdot\tilde{p}_K)+$$
$$+(\tilde{p}_K\cdot\Lambda_K^{-1}\cdot\tilde{z}_K)\cdot(G^{-1}_{K-1}\cdot\tilde{p}_K)-\tilde{p}_K] \equiv \mathbb{O}_K, \quad \text{для всех } 2\le K\le m.$$

Аналогично проверяются остальные равенства (2.28). Из **представлений** (2.6) и (2.7) для элементов-блоков $\widetilde{B}=\widetilde{C}^{-1}$ следует, что полученные нами выше равенства (2.28) на самом деле означают

$$\begin{cases} \widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot\hat{\beta}_i \overset{(2.6)_{2)}}{=\!=} \widetilde{B}_{i-1\,i} \overset{(2.7)_{2)}}{=\!=} c_i\cdot\widetilde{B}_{ii}, \\ \hat{c}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1} \overset{(2.7)_{1)}}{=\!=} \widetilde{B}_{i\,i-1} \overset{(2.6)_{1)}}{=\!=} \widetilde{B}_{ii}\cdot\beta_i, & 2\le i\le m \\ c_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1} \overset{(2.7)_{2)}}{=\!=} \widetilde{B}_{i\,i+1} \overset{(2.6)_{2)}}{=\!=} \widetilde{B}_{ii}\cdot\hat{\beta}_{i+1}, \\ \widetilde{B}_{i+1}\cdot\beta_{i+1} \overset{(2.6)_{1)}}{=\!=} \widetilde{B}_{i+1\,i} \overset{(2.7)_{1)}}{=\!=} \hat{c}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{ii}, & 1\le i\le m-1. \end{cases} \tag{2.29}$$

Из (2.29) следует, что из четырех равенств независимыми являются только два. При этом они дают двойственные представления для над (под)-диагональных блоков у $\widetilde{B}=\widetilde{C}^{-1}$. Воспользовавшись теперь в (2.27) ра-

венствами (2.28), а также $\widetilde{B}_{KK}=(\Lambda_{K+1}+G_{K-1}-E_K)^{-1}$, получим тождества. На самом деле

$$[(\tilde{p}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot\hat{\beta}_i-\hat{c}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot\tilde{z}_i)-(c_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot\tilde{p}_{i+1}-\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot\beta_{i+1})]=$$
$$=[(\tilde{p}_i\cdot c_i+\tilde{z}_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1}+E_i)-E_i]\cdot\widetilde{B}_{ii}-\widetilde{B}_{ii}\cdot[(\beta_i\cdot\tilde{z}_i+\hat{\beta}_{i+1}\cdot\tilde{p}_{i+1}+E_i)-E_i] \overset{(2.9)}{=\!=}$$
$$=[(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)-E_i]\cdot\widetilde{B}_{ii}-\widetilde{B}_{ii}\cdot[(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)-E_i]\equiv$$
$$\equiv(E_i-\widetilde{B}_{ii})-(E_i-\widetilde{B}_{ii})\equiv\mathbb{O}_i, \quad \text{если } \widetilde{B}_{KK}=(\Lambda_{K+1}+G_{K-1}-E_K)^{-1}.$$

Далее проверим по отдельности тождества $(2.20)_{2)}$ и $(2.26)_{2)}$. Итак, в $(2.20)_{2)}$ и $(2.26)_{2}$, воспользовавшись равенствами (2.28), имеем

$$\tilde{p}_i\cdot c_i\cdot\widetilde{B}_{ii}+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{ii}=(\tilde{p}_i\cdot c_i+E_i+\tilde{z}_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1})\cdot\widetilde{B}_{ii}=$$
$$=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)\cdot\widetilde{B}_{ii}\equiv E_i, \quad \text{если } \widetilde{B}_{ii}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)^{-1},$$

$$\widetilde{B}_{ii}\cdot\beta_i\cdot\tilde{z}_i+\widetilde{B}_{ii}\cdot E_i+\widetilde{B}_{ii}\cdot\hat{\beta}_{i+1}\cdot\tilde{p}_{i+1}=\widetilde{B}_{ii}\cdot(\beta_i\cdot\tilde{z}_i+E_i+\hat{\beta}_{i+1}\cdot\tilde{p}_{i+1})=$$
$$=\widetilde{B}_{ii}\cdot(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)\equiv E_i, \quad \text{если } \widetilde{B}_{ii}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E_i)^{-1}.$$

Теперь, воспользовавшись справедливостью тождеств $(2.20)_{2)}$ и $(2.26)_{2)}$, проверим тождества в (2.20) и (2.26). Из $(2.20)_{2)}$ имеем

$$\tilde{p}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot\hat{\beta}_i+E_i\cdot\widetilde{B}_{ii}=E_i-\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot\beta_{i+1}, \quad 1\le i\le m. \tag{2.30}$$

Подставляя (2.30) в $(2.20)_{I)}$, получаем тождества

$$(E_i-\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot\beta_{i+1})\cdot\hat{\beta}_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}=$$
$$=\hat{\beta}_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot(E_{i+1}-\beta_{i+1}\cdot\hat{\beta}_{i+1}) \overset{(2.9)}{=\!=} [-\tilde{z}_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot$$
$$\cdot(G_i-\tilde{p}_{i+1}\cdot\Lambda_{i+1}^{-1}\cdot\tilde{z}_{i+1})]\cdot G_i^{-1}=[-\tilde{z}_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot(G_i+\Lambda_{i+2}-E_{i+1})]\cdot G_i^{-1}\equiv$$
$$\equiv[-\tilde{z}_{i+1}+\tilde{z}_{i+1}]\cdot G_i^{-1}=\mathbb{O}_i, \quad \text{поскольку } \det(G_i)\ne 0.$$

Из $(2.20)_{2)}$ также имеем

$$\widetilde{B}_{ii}+\tilde{z}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1\,i+1}\cdot\beta_{i+1}=E_i-\tilde{p}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot\hat{\beta}_i, \quad 1\le i\le m. \tag{2.3I}$$

Подставляя (2.3I) в $(2.20)_{3)}$, получаем тождества

$$(E_i-\tilde{p}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot\hat{\beta}_i)\cdot\beta_i+\tilde{p}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}=\beta_i+\tilde{p}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot(E_{i-1}-\hat{\beta}_i\cdot\beta_i) \overset{(2.9)}{=\!=}$$
$$=[-\tilde{p}_i+\tilde{p}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot(\Lambda_i-\tilde{z}_i\cdot G^{-1}_{i-1}\cdot\tilde{p}_i)]\cdot\Lambda_i^{-1}=[-\tilde{p}_i+\tilde{p}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1\,i-1}\cdot(\Lambda_i+$$
$$+G_{i-2}-E_{i-1})]\cdot\Lambda_i^{-1}\equiv[-\tilde{p}_i+\tilde{p}_i]\cdot\Lambda_i^{-1}\equiv\mathbb{O}_i, \quad \text{поскольку } \det(\Lambda_i)\ne 0.$$

Аналогично тому, как поступили выше, проверяются тождества $(2.26)_{I)}$ и $(2.26)_{3)}$ с учетом справедливости $(2.26)_{2)}$. Таким образом, мы закончили полную проверку равенств (2.I0) и (2.II) и показали, что левая и правая единица группы, т.е. $(B\cdot C=E=C\cdot B)$, для **представлений** 9 и I0 являются единственными при аддитивных диагональных блоках $\widetilde{B}_{KK}$ $(2.8)_{I)}$. Итак, справедливость **представлений** 9$'$ и I0$'$ доказана.

<u>Замечание 5</u>. В процессе проверки равенств (2.20) и (2.26), в том числе средних из них, т.е. $(2.20)_{2)}$ и $(2.26)_{2)}$), выше мы воспользовались только лишь знанием $\tilde{B}_{ii}$ $(2.8)_{I)}$. Однако указанные средние равенства <u>формально</u> проверяются и при использовании независимых рекуррентных процессов (I.13) и (I.16). Например, проверим $(2.26)_{2)}$. Учитывая неособенность Λ_{i+1} и G_{i-1}, т.е. $\det(\Lambda_{k+1}) \neq 0 \neq \det(G_{i-1})$, а также воспользовавшись обозначениями (2.9), равенства $(2.26)_{2)}$ представим в виде

$$-\hat{c}_i \cdot \tilde{B}_{i-1i-1} \cdot (\hat{\beta}_i \cdot G_{i-1}) + \tilde{B}_{ii} \cdot E_i - c_{i+1} \cdot \tilde{B}_{i+1i+1} \cdot (\beta_{i+1} \cdot \Lambda_{i+1}) = E_i, \quad 1 \le i \le m.$$

Отсюда, учитывая рекурсивные выражения для $\hat{c}_i \cdot \tilde{B}_{i-1i-1} \cdot \hat{\beta}_i$ и $c_{i+1} \cdot \tilde{B}_{i+1i+1} \cdot \beta_{i+1}$, т.е. $(I.13)_{3)}$ и $(I.16)_{3)}$ (при $\Lambda_{i+1} \equiv \omega_k$; $G_{i-1} \equiv \hat{\omega}_k$), приходим к равенствам

$$(G_{i-1}^{-1} - \tilde{B}_{ii}(G) \cdot G_{i-1} + \tilde{B}_{ii} \cdot E_i + (\Lambda_{i+1}^{-1} - \tilde{B}_{ii}(\Lambda)) \cdot \Lambda_{i+1} = E_i, \quad 1 \le i \le m.$$

Теперь, в последних равенствах "полагая"

$$\tilde{B}_{ii}(G) = \tilde{B}_{ii}(\Lambda, G) = \tilde{B}_{ii}(\Lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.32}$$

получаем тождества

$$\tilde{B}_{ii} \cdot (\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E_i) \equiv E_i, \quad \text{если} \quad \tilde{B}_{ii}(\Lambda, G) = (\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E_i)^{-1}.$$

Однако такое доказательство, как видим из (2.32), не обладает "полной логической строгостью", что обусловлено необходимостью сопоставления функций $\tilde{B}_{ii}(G)$ и $\tilde{B}_{ii}(\Lambda)$ с $\tilde{B}_{ii}(\Lambda, G)$. Чтобы завершить доказательство теоремы 6′, нам осталось показать также справедливость представлений 7′ и 8′. Для этого покажем, что имеет место следующая лемма[x)]

<u>Лемма 5(5′)</u>. Если $\tilde{B}_{ii}$ – неособенные квазидиагональные блоки матрицы $\tilde{B} = \tilde{C}^{-1}$, то для $\tilde{B}_{ii}$ и структурных последовательностей из матриц $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$ (2.9) справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{cases} \prod_{j=i+1}^{j} c_j \cdot \tilde{B}_{jj} = \tilde{B}_{ii} \cdot \prod_{j=i+1}^{j} \hat{\beta}_j, & \text{для любых } 1 \le i < j \le m \\ \prod_{j=j+1}^{i} \hat{c}_j \cdot \tilde{B}_{jj} = \tilde{B}_{ii} \cdot \prod_{j=j+1}^{i} \beta_j, & \text{для любых } 1 \le j < i \le m, \end{cases} \tag{2.33}$$

а также

$$\begin{cases} (E_i - G_{i-1}) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot \Lambda_{i+1} = \Lambda_{i+1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot (E_i - G_{i-1}), \\ G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot (E_i - \Lambda_{i+1}) = (E_i - \Lambda_{i+1}) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1}, & \text{для всех } 1 \le i \le m. \end{cases} \tag{2.34}$$

<u>Доказательство</u>. Воспользуемся парой независимых равенств в (2.28). А именно:

x) Соотношения (2.33) и (2.34) очевидно могут играть и самостоятельную роль при исследовании последовательностей (процессов) типа (2.9).

$$\begin{cases} c_{i+1} \cdot \tilde{B}_{i+1i+1} = \tilde{B}_{ii} \cdot \hat{\beta}_{i+1}, & \text{для всех } 1 \le i \le m-1; \ \tilde{B}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1} \\ \hat{c}_i \cdot \tilde{B}_{i-1i-1} = \tilde{B}_{ii} \cdot \beta_i, & \text{для всех } 2 \le i \le m; \ \tilde{B}_{11} = G_0^{-1}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Коммутационные соотношения (2.33) доказываются аналогично [3] на основе равенств (2.35) методом полной математической индукции, поэтому мы не будем на них останавливаться. Покажем справедливость лишь (2.34). Возьмем из равенств (2.28) два других оставшихся

$$\begin{cases} c_i \cdot \tilde{B}_{ii} = \tilde{B}_{i-1i-1} \cdot \hat{\beta}_i, \\ \tilde{B}_{ii} \cdot \beta_i = \hat{c}_i \cdot \tilde{B}_{i-1i-1}, \quad 2 \le i \le m; \quad \tilde{B}_{11} = G_0^{-1} \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_{ii} \cdot \hat{\beta}_{i+1} = c_{i+1} \cdot \tilde{B}_{i+1i+1}, \\ \hat{c}_{i+1} \cdot \tilde{B}_{ii} = \tilde{B}_{i+1i+1} \cdot \beta_{i+1}, \quad 1 \le i \le m-1; \ \tilde{B}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1}. \end{cases} \tag{2.37}$$

Сначала покажем справедливость $(2.34)_{I)}$. Из (2.36), воспользовавшись неособенностью $\tilde{B}_{kk}$ $(2.8)_{I)}$, а также учитывая определения (2.9) для $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$, имеем

$$(\tilde{B}_{i-1i-1})^{-1} (\Lambda_i^{-1} \tilde{z}_i) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} = \tilde{z}_i; \quad \tilde{B}_{ii} \cdot (\tilde{P}_i \cdot \Lambda_i^{-1}) \cdot (\tilde{B}_{i-1i-1})^{-1} = G_{i-1}^{-1} \cdot \tilde{P}_i.$$

Отсюда, учитывая, что $\det(G_{k-1}) \neq 0, (k = 1, 2, \ldots, m)$, получаем

$$[\Lambda_i + G_{i-2} - E_{i-1}] \cdot (\Lambda_i^{-1} \tilde{z}_i) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} = \tilde{z}_i; \quad G_{i-1} \tilde{B} \cdot (\tilde{P}_i \cdot \Lambda_i^{-1}) \cdot [\Lambda_i + G_{i-2} - E_{i-1}] = \tilde{P}_i.$$

Теперь, воспользовавшись определениями (2.8) для $\{\Lambda, G\}$, имеем

$$\tilde{z}_i \cdot [E_i - G_{i-1}^{-1} (E_i - \Lambda_{i+1})] \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} = \tilde{z}_i; \quad G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot [E_i - (E_i - \Lambda_{i+1}) \cdot G_{i-1}^{-1}] \cdot \tilde{P}_i = \tilde{P}_i.$$

Отсюда в силу равенств (2.36), а также $\{\tilde{z}_i \neq 0_i \neq \tilde{P}_i\}_{i=2}^{m}$, получаем

$$[E_i - G_{i-1}^{-1} \cdot (E_i - \Lambda_{i+1})] \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} = E_i; \quad G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot [E_i - (E_i - \Lambda_{i+1}) \cdot G_{i-1}^{-1}] = E_i.$$

Учитывая, что $\det(G_{k-1}) \neq 0$, получаем

$$[G_{i-1} - (E_i - \Lambda_{i+1})] \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} = G_{i-1}; \quad G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot [G_{i-1} - (E_i - \Lambda_{i+1})] = G_{i-1}. \tag{2.38}$$

Теперь, приравнивая левые части в (2.38), получаем

$$G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} - (E_i - \Lambda_{i+1}) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} = G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} - G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot (E_i - \Lambda_{i+1}) \quad \text{или}$$

$$(E_i - \Lambda_{i+1}) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1} = G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot (E_i - \Lambda_{i+1}), \quad \text{для всех } 1 \le i \le m. \tag{2.39}$$

Теперь покажем, что при $\tilde{B}_{kk} = (\Lambda_{k+1} + G_{k-1} - E_k)^{-1}$ равенства (2.39) обращаются в тождества

$$[G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot (E_i - \Lambda_{i+1}) - (E_i - \Lambda_{i+1}) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1}] = [G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot (E_i - \Lambda_{i+1} - G_{i-1} + G_{i-1}) -$$
$$-(E_i - \Lambda_{i+1} - G_{i-1} + G_{i-1}) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1}] = [G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot (-\tilde{B}_{ii}^{-1} + G_{i-1}) - (-\tilde{B}_{ii}^{-1} + G_{i-1}) \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1}] \equiv$$
$$\equiv [(-G_{i-1} + G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1}) - (-G_{i-1} + G_{i-1} \cdot \tilde{B}_{ii} \cdot G_{i-1})] \equiv 0_i, \quad \text{для всех } 1 \le i \le m.$$

Следовательно, показали справедливость $(2.34)_{I)}$. Аналогично тому, как поступили выше, на основе равенств (2.37) показывается справедливость $(2.34)_{2)}$. Итак, лемма доказана. Вместе с этим <u>закончили доказательст-</u>

во теоремы 6′. Далее, опираясь на результаты теоремы 6′, покажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. Для любой неособенной квазитрехдиагональной матрицы вида (2.I) с неособенными квадратными (в общем случае разных размерностей) диагональными элементами-блоками $\{ q_i ;\ det(q_i) \neq 0 \}_{i=1}^{m}$ и всеми отличными от нуля главными угловыми квазиминорами имеют место следующие факторизованные представления:

Представление 5 — Представление 6

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & \\ & \Lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & (-c_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & \\ & \Lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\tilde\beta_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\tilde\beta_m) & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & (-c_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{k+1} = -(\tilde p_{k+1} \cdot \Lambda_{k+1}^{-1}), \\ c_{k+1} = -(\Lambda_{k+1}^{-1} \cdot \tilde z_{k+1}), \\ \tilde\beta_{k+1} = -(\Lambda_{k+2}^{-1} \cdot \tilde p_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \Lambda_{k+1} = E_k - \tilde p_k \cdot \Lambda_k^{-1} \cdot \tilde z_k, \quad k = 2, 3, \ldots, m; \quad \Lambda_2 = E_1 . \end{cases} \quad (2.4I)$$

Представление 7 — Представление 8

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & (-\hat\beta_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_0 & & & \\ & G_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat c_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\hat c_m) & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} G_0 & & & \\ & G_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & (-\tilde{\tilde\beta}_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & (-\tilde{\tilde\beta}_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat c_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\hat c_m) & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

где

$$\begin{cases} \hat\beta_{k+1} = -(\tilde z_{k+1} \cdot G_k^{-1}), \\ \hat c_{k+1} = -(G_k^{-1} \cdot \tilde p_{k+1}), \\ \tilde{\tilde\beta}_{k+1} = -(G_{k-1}^{-1} \cdot \tilde z_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ G_{k-1} = E_k - \tilde z_{k+1} \cdot G_k^{-1} \cdot \tilde p_{k+1}, \quad k = m-1, m-2, \ldots, 1; \quad G_{m-1} \equiv E_m . \end{cases} \quad (2.43)$$

Доказательство. Если главные угловые квазиминоры у $\mathcal{C}$ (2.I) отличны от нуля, то из **представлений** 9′ и I0′ для $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$ формально получим следующие представления для $\mathcal{C}$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \ddots & + & \prod_{\jmath=i+1}^{j} \hat\beta_\jmath \\ \prod_{\jmath=j+1}^{i} \beta_\jmath & \ddots & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & E_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \tilde B_{ii}^{-1} \cdot q_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \tilde B_{ii}^{-1} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \ddots & + & \prod_{\mu=i+1}^{j} c_\mu \\ \prod_{\mu=j+1}^{i} \hat c_\mu & \ddots & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & E_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & q_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

матрицы $\{\beta, \hat\beta ; c, \hat c ; \tilde B_{kk}\}$ — определены в (2.8)÷(2.9). Итак, покажем, что слева и справа от $\mathcal{C}$ в (2.44) стоят квазитрехдиагональные матрицы при определениях (2.8)÷(2.9). Будем далее пользоваться сокращенными обозначениями матриц:

$$\begin{cases} \prod_{\mu=j+1}^{i} \hat c_\mu = \hat c_\Delta \quad ; \quad \prod_{\mu=i+1}^{j} c_\mu = c_\nabla , \\ \prod_{\jmath=j+1}^{i} \beta_\jmath = \beta_\Delta \quad ; \quad \prod_{\jmath=i+1}^{j} \hat\beta_\jmath = \hat\beta_\nabla , \end{cases} \quad (2.45)$$

где $\hat c_\Delta$ и β_Δ — нижнетреугольные, а $\hat c_\nabla$ и $\hat\beta_\nabla$ — верхнетреугольные матрицы (2.44) с единичными матрицами-блоками E_i на диагоналях, построенные в соответствии с (2.44) на элементах-блоках из произведений матриц $\hat c_\mu$ и $\beta_\jmath$, c_μ и $\hat\beta_\jmath$ (2.9), а также обозначениями ($\hat c_\Delta^{-1}$, c_∇^{-1} и $\hat\beta_\nabla^{-1}$, β_Δ^{-1}) для обратных к (2.45) двухдиагональных, в соответствии с [I,3] матриц

$$\hat c_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat c_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\hat c_m) & E_m \end{bmatrix}, \quad \beta_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix}, \quad c_\nabla^{-1} = \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & \\ & E_2 & (-c_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & E_{m-1} & (-c_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix}, \quad \hat\beta_\nabla^{-1} = \begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta_2) & & \\ & E_2 & (-\hat\beta_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & E_{m-1} & (-\hat\beta_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} . \quad (2.46)$$

Пользуясь теперь обозначениями (2.45) операторов (2.44), а также им обратных (2.46), запишем $\mathcal{C}$ (2.44) в виде

$$\{\beta_\Delta - diag(E_i) + \hat\beta_\nabla\}^{-1} \cdot diag(\tilde B_{ii}^{-1} \cdot q_i) = \mathcal{C} = diag(\tilde B_{ii}^{-1}) \cdot \{\hat c_\Delta - diag(E_i) + c_\nabla\}^{-1} \cdot diag(q_i), \quad (2.47)$$

где дополнительно ввели обозначения для неособенных квазидиагональных операторов $diag$ (Ψ_i — соответствующие квадратные операторы). Воспользовавшись неособенностью треугольных операторов (2.45), а также определениями (2.46) для им обратных, равенства (2.47) могут быть записаны только следующими четырьмя различными способами:

$$\hat\beta_\nabla^{-1} \cdot \{\beta_\Delta^{-1} + \hat\beta_\nabla^{-1} - (\beta_\Delta^{-1} \cdot \hat\beta_\nabla^{-1})\}^{-1} \cdot \beta_\Delta^{-1} \cdot diag(\tilde B_{ii}^{-1} q_i) = \mathcal{C} =$$

$$= \beta_\Delta^{-1} \cdot \{\beta_\Delta^{-1} + \hat\beta_\nabla^{-1} - (\hat\beta_\Delta^{-1} \cdot \beta_\Delta^{-1})\}^{-1} \cdot \hat\beta_\nabla^{-1} \cdot diag(\tilde B_{ii}^{-1} q_i), \quad (2.48)$$

$$diag(\tilde B_{ii}^{-1}) \cdot c_\nabla^{-1} \cdot \{\hat c_\Delta^{-1} + c_\nabla^{-1} - (\hat c_\Delta^{-1} \cdot c_\nabla^{-1})\}^{-1} \cdot \hat c_\Delta^{-1} \cdot diag(q_i) = \mathcal{C} =$$

$$= diag(\tilde B_{ii}^{-1}) \cdot \hat c_\Delta^{-1} \cdot \{\hat c_\Delta^{-1} + c_\nabla^{-1} - (c_\nabla^{-1} \cdot \hat c_\Delta^{-1})\}^{-1} \cdot c_\nabla^{-1} \cdot diag(q_i), \quad (2.49)$$

поскольку одновременное вынесение налево и направо за $\{\ \}^{-1}$ — скобки в (2.47) групп сомножителей $(\beta_\Delta^{-1} \cdot \hat\beta_\nabla^{-1})$, $(\hat\beta_\nabla^{-1} \cdot \beta_\Delta^{-1})$ и $(\hat c_\Delta^{-1} \cdot c_\nabla^{-1})$, $(c_\nabla^{-1} \cdot \hat c_\Delta^{-1})$ невозможно из-за некоммутативности умножения указанных пар операторов в общем случае. Найдем теперь общий вид произведений указанных пар операторов. Воспользовавшись (2.46), имеем

$$(\beta_\Delta^{-1}\cdot\hat\beta_\Delta^{-1})=\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta_2) & & & \\ (-\beta_2) & [E_2+\beta_2\cdot\hat\beta_2] & (-\hat\beta_3) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & (-\beta_{m-1}) & [E_{m-1}+\beta_{m-1}\cdot\hat\beta_{m-1}] & (-\hat\beta_m) \\ & & & (-\beta_m) & [E_m+\beta_m\cdot\hat\beta_m] \end{bmatrix},\quad (\hat\beta_\nabla^{-1}\cdot\beta_\Delta^{-1})=\begin{bmatrix} [E_1+\hat\beta_2\cdot\beta_2] & (-\hat\beta_2) & & & \\ (-\beta_2) & [E_2+\hat\beta_3\cdot\beta_3] & (-\hat\beta_3) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & (-\beta_{m-1}) & [E_{m-1}+\hat\beta_m\cdot\beta_m] & (-\hat\beta_m) \\ & & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix}, \tag{2.50}$$

$$(\hat c_\Delta^{-1}\cdot c_\nabla^{-1})=\begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & & \\ (-\hat c_2) & [E_2+\hat c_2\cdot c_2] & (-c_2) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & (-\hat c_{m-1}) & [E_{m-1}+\hat c_{m-1}\cdot c_{m-1}] & (-c_m) \\ & & & (-\hat c_m) & [E_m+\hat c_m\cdot c_m] \end{bmatrix},\quad (c_\nabla^{-1}\cdot\hat c_\Delta^{-1})=\begin{bmatrix} [E_1+c_2\cdot\hat c_2] & (-c_2) & & & \\ (-\hat c_2) & [E_2+c_3\cdot\hat c_3] & (-c_3) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & (-\hat c_{m-1}) & [E_{m-1}+c_m\cdot\hat c_m] & (-c_m) \\ & & & (-\hat c_m) & E_m \end{bmatrix}. \tag{2.51}$$

В фигурных скобках в (2.48) и (2.49), после подстановки (2.50), (2.5I) и (2.46), получаем

$$\begin{aligned} &\{\beta_\Delta^{-1}+\hat\beta_\nabla^{-1}-(\beta_\Delta^{-1}\cdot\hat\beta_\nabla^{-1})\} = diag\,(E_i,\{E_k-\beta_k\cdot\hat\beta_k\}_{k=2}^{m}),\\ &\{\beta_\Delta^{-1}+\hat\beta_\nabla^{-1}-(\hat\beta_\nabla^{-1}\cdot\beta_\Delta^{-1})\} = diag\,(\{E_k-\hat\beta_{k+1}\beta_{k+1}\}_{k=1}^{m-1},E_m),\\ &\{\hat c_\Delta^{-1}+c_\nabla^{-1}-(\hat c_\Delta^{-1}\cdot c_\nabla^{-1})\} = diag\,(E_1,\{E_k-\hat c_k\cdot c_k\}_{k=2}^{m}),\\ &\{\hat c_\Delta^{-1}+c_\nabla^{-1}-(c_\nabla^{-1}\cdot\hat c_\Delta^{-1})\} = diag\,(\{E_k-c_{k+1}\cdot\hat c_{k+1}\}_{k=1}^{m-1},E_m). \end{aligned} \tag{2.52}$$

<u>Замечание 6 (Лемма 6)</u>. Матрицы $(\beta_\Delta^{-1}\cdot\hat\beta_\nabla^{-1})\neq(\hat\beta_\nabla^{-1}\cdot\beta_\Delta^{-1})$ и $(\hat c_\Delta^{-1}\cdot c_\nabla^{-1})\neq(c_\nabla^{-1}\cdot\hat c_\Delta^{-1})$ (2.50)÷(2.5I) не коммутируют, если не коммутируют матрицы (2.9)

$$\{\hat c_k \text{ и } c_k\}_{k=2}^{m},\quad \{\hat\beta_k \text{ и } \beta_k\}_{k=1}^{m}.$$

<u>Доказательство</u>. На самом деле, воспользовавшись определениями $\{c,\hat c;\beta,\hat\beta\}$ (2.9), а также учитывая неособенность $\tilde B_{kk}$ (2.8), получаем

$$\begin{cases} (\beta_k\cdot\hat\beta_k)\overset{2\le k\le m}{=\!=}(\tilde P_k\cdot\Lambda_k^{-1})\cdot(\tilde Z_k\cdot G_{k-1}^{-1})\overset{(2.8)}{=\!=}(E_k-\Lambda_{k+1})\cdot G_{k-1}^{-1}=(-\tilde B_{kk}^{-1}+G_{k-1})\cdot G_{k-1}^{-1},\\ (\hat\beta_{k+1}\cdot\beta_{k+1})\overset{1\le k\le m-1}{=\!=}(\tilde Z_{k+1}\cdot G_k^{-1})\cdot(\tilde P_{k+1}\cdot\Lambda_{k+1}^{-1})\overset{(2.8)}{=\!=}(E_k-G_{k-1})\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}=(-\tilde B_{kk}^{-1}+\Lambda_{k+1})\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}. \end{cases} \tag{2.53}$$

$$\begin{cases} (\hat c_k\cdot c_k)\overset{2\le k\le m}{=\!=}(G_{k-1}^{-1}\cdot\tilde P_k)\cdot(\Lambda_k^{-1}\cdot\tilde Z_k)\overset{(2.8)}{=\!=}G_{k-1}^{-1}\cdot(E_k-\Lambda_{k+1})=G_{k-1}^{-1}\cdot(-\tilde B_{kk}^{-1}+G_{k-1}),\\ (c_{k+1}\cdot\hat c_{k+1})\overset{1\le k\le m-1}{=\!=}(\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\tilde Z_{k+1})\cdot(G_k^{-1}\cdot\tilde P_{k+1})\overset{(2.8)}{=\!=}\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot(E_k-G_{k-1})=\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot(-\tilde B_{kk}^{-1}+\Lambda_{k+1}). \end{cases} \tag{2.54}$$

Из (2.53) для диагональных блоков-матриц (2.50) имеем

$$\begin{cases} E_k+\beta_k\cdot\hat\beta_k\overset{2\le k\le m}{=\!=}2\cdot E_k-\tilde B_{kk}^{-1}\cdot G_{k-1}^{-1},\\ E_k+\hat\beta_{k+1}\cdot\beta_{k+1}\overset{1\le k\le m-1}{=\!=}2E_k-\tilde B_{kk}^{-1}\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}. \end{cases} \tag{2.55}$$

Также учитывая (2.54), для диагональных блоков-матриц (2.5I) получим

$$\begin{cases} E_k+\hat c_k\cdot c_k\overset{2\le k\le m}{=\!=}2E_k-G_{k-1}^{-1}\cdot\tilde B_{kk}^{-1},\\ E_k+c_{k+1}\cdot\hat c_{k+1}\overset{1\le k\le m-1}{=\!=}2E_k-\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\tilde B_{kk}^{-1}. \end{cases} \tag{2.56}$$

Из (2.55) и (2.56) следует, что в случае $\mathcal{C}$ (2.I) операторов общего вида $(\beta_\Delta^{-1}\cdot\hat\beta_\nabla^{-1})\neq(\hat\beta_\nabla^{-1}\cdot\beta_\Delta^{-1})$ и $(\hat c_\Delta^{-1}\cdot c_\nabla^{-1})\neq(c_\nabla^{-1}\cdot\hat c_\Delta^{-1})$. Лемма 6 доказана. Теперь, воспользовавшись равенствами (2.53) и (2.54), запишем выражения для элементов-блоков диагональных матриц (2.52):

$$\begin{cases} E_k-\beta_k\cdot\hat\beta_k\overset{2\le k\le m}{=\!=}\tilde B_{kk}^{-1}\cdot G_{k-1}^{-1},\\ E_k-\hat\beta_{k+1}\beta_{k+1}\overset{1\le k\le m-1}{=\!=}(\tilde B_{kk}^{-1}\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}). \end{cases}\qquad \begin{cases} E_k-\hat c_k\cdot c_k\overset{2\le k\le m}{=\!=}G_{k-1}^{-1}\cdot\tilde B_{kk}^{-1},\\ E_k-c_{k+1}\hat c_{k+1}\overset{1\le k\le m-1}{=\!=}\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\tilde B_{kk}^{-1}. \end{cases} \tag{2.57}$$

Учитывая (2.57) в (2.52), представления (2.48) и (2.49) для $\mathcal{C}$ можем переписать в виде

$$\begin{aligned} &\hat\beta_\nabla^{-1}\cdot diag\,(E_1,\{G_{k-1}\cdot\tilde B_{kk}\}_{k=2}^{m})\cdot\beta_\Delta^{-1}\cdot diag\,(\tilde B_{ii}^{-1}\cdot q_i)=\mathcal{C}=\\ &\qquad=\beta_\Delta^{-1}\cdot diag\,(\{\Lambda_{k+1}\cdot\tilde B_{kk}\}_{k=1}^{m-1},E_m)\cdot\hat\beta_\nabla^{-1}\cdot diag\,(\tilde B_{ii}^{-1}\cdot q_i), \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} &diag\,(\tilde B_{ii}^{-1})\cdot c_\nabla^{-1}\cdot diag\,(E_1,\{\tilde B_{kk}\cdot G_{k-1}\}_{k=2}^{m})\cdot\hat c_\Delta^{-1}\cdot diag\,(q_i)=\mathcal{C}=\\ &\qquad=diag\,(\tilde B_{ii}^{-1})\cdot\hat c_\Delta^{-1}\cdot diag\,(\{\tilde B_{kk}\cdot\Lambda_{k+1}\}_{k=1}^{m-1},E_m)\cdot c_\nabla^{-1}\cdot diag\,(q_i). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Подставив теперь (2.46) в левую и правую часть (2.58) (соответственно в (2.59)) и при этом учитывая определения (2.59) **для** $(c,\hat c;\beta,\hat\beta)$, **а также выполнив необходимые матричные умножения, получим представления для** (2.58) **и** (2.59) **в виде**

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta_2) & & \\ & E_2 & (-\hat\beta_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & E_{m-1} & (-\hat\beta_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} G_0 & & & \\ & G_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ [-\tilde B_{22}\cdot\beta_2\cdot\tilde B_{11}^{-1}] & E_2 & & \\ & [-\tilde B_{33}\cdot\beta_3\cdot\tilde B_{22}^{-1}] & E_3 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & [-\tilde B_{mm}\cdot\beta_m\cdot\tilde B_{m-1\,m-1}^{-1}] & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}=\mathcal{C}=$$

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & \\ & \Lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_1 & [-\tilde B_{11}\cdot\hat\beta_2\cdot\tilde B_{22}^{-1}] & & \\ & E_2 & [-\tilde B_{22}\cdot\hat\beta_3\cdot\tilde B_{33}^{-1}] & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & E_{m-1} & [-\tilde B_{m-1\,m-1}\cdot\beta_m\cdot\tilde B_{mm}^{-1}] \\ & & & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \tag{2.60}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 & [-\tilde{\mathcal{B}}_{11}^{-1}\cdot C_2\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{22}] & & & \\ & E_2 & [-\tilde{\mathcal{B}}_{22}^{-1}\cdot C_3\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{33}] & & \\ \hdashline & & \ddots & \ddots & \\ & & & E_{m-1} & [-\tilde{\mathcal{B}}_{m-1m-1}^{-1}\cdot C_m\cdot\mathcal{B}_{mm}] \\ & & & & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} G_0 & & & \\ & G_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat{C}_2) & E_2 & & \\ & (-\hat{C}_3) & E_3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & (-\hat{C}_m) & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix} = \mathcal{C} =$$

$$= \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ [-\tilde{\mathcal{B}}_{22}^{-1}\hat{C}_2\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{11}] & E_2 & & \\ & [-\tilde{\mathcal{B}}_{33}^{-1}\cdot\hat{C}_3\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{22}] & E_3 & \\ \hdashline & & \ddots & \ddots \\ & & [-\tilde{\mathcal{B}}_{mm}^{-1}\cdot\hat{C}_m\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{m-1m-1}] & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & \\ & \Lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_1 & (-C_2) & & \\ & E_2 & (-C_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & E_{m-1} & (-C_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}. \qquad (2.6I)$$

Теперь в представлениях (2.60) и (2.6I), воспользовавшись ранее полученными равенствами (2.28), получим представления для $\mathcal{C}$ в виде правых частей (2.40) и (2.42), т.е. **представлений** 5 и 7. Представления же 6 и 8 получаются из **представлений** 5 и 7, если воспользоваться последовательностями матриц $\{\tilde{\beta}_{K+1}, \tilde{\tilde{\beta}}_{K+1}\}_{K=1}^{m-1}$ в виде $(2.4I)_{3)}$ и $(2.43)_{3)}$.

Рассмотрим теперь два перекрестных **представления** 7$'$ и 8$'$ для обратного оператора $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$. Воспользовавшись выше введенными обозначениями, оператор $\mathcal{C}$ для обоих представлений (2.4) и (2.5) (формально) представим в виде

$$\{diag(\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot)\cdot\beta_\Delta + C_\nabla\cdot diag(\tilde{\mathcal{B}}_{jj}\cdot) - diag(\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot)\}^{-1}\cdot diag(q_i\cdot) = \mathcal{C} =$$

$$= \{\hat{C}_\Delta\cdot diag(\tilde{\mathcal{B}}_{jj}\cdot) + diag(\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot)\cdot\hat{\beta}_\nabla - diag(\tilde{\mathcal{B}}_{jj}\cdot)\}^{-1}\cdot diag(q_i\cdot). \qquad (2.62)$$

Отсюда воспользовавшись неособенностью $\tilde{\mathcal{B}}_{KK}$ (2.8), получаем

$$\{\beta_\Delta + [diag(\tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{-1}\cdot)\cdot C_\nabla\cdot diag(\tilde{\mathcal{B}}_{jj}\cdot)] - diag(E_i\cdot)\}^{-1}\cdot diag(\mathcal{B}_{ii}^{-1}\cdot q_i\cdot) = \mathcal{C} =$$

$$= diag(\tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{-1}\cdot)\cdot\{\hat{C}_\Delta + [diag(\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot)\cdot\hat{\beta}_\nabla\cdot diag(\tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{-1}\cdot)] - diag(E_i\cdot)\}^{-1}\cdot diag(q_i\cdot). \qquad (2.63)$$

Как видим из (2.63), фактически мы получили представления (2.47), если в (2.63) воспользоваться следующими сопряженными равенствами:

$$\begin{cases} diag(\tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{-1}\cdot)\cdot C_\nabla\cdot diag(\tilde{\mathcal{B}}_{jj}\cdot) = \hat{\beta}_\nabla, \\ diag(\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot)\cdot\hat{\beta}_\nabla\cdot diag(\tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{-1}\cdot) = C_\nabla, \quad \text{для всех } 1 \le i = j \le m. \end{cases}$$

Следовательно, представления для $\mathcal{C}$, следующие из (2.63), совпадают с представлениями для $\mathcal{C}$, полученными ранее из (2.47).
Теорема доказана.

Заключение

Получены обобщения результатов [1÷3] на случай квазитрехдиагональных матриц с прямоугольными внедиагональными элементами блоками в случае всех отличных от нуля главных угловых квазиминоров. При этом построены:

I. Неприводимые факторизованные **представления** I$'$(~2$'$) и 3$'$(~4$'$) в случае $det(q_1) \ne 0 \ne det(q_m)$, а также 5 (~6) и 7 (~8) в случае $\{det(q_i\cdot) \ne 0\}_{i=1}^{m}$ для самой квазитрехдиагональной матрицы $\mathcal{C}$.

2. Множество факторизованных единственных **представления** I$'$÷6$'$ в случае $det(q_1) \ne 0 \ne det(q_m)$, а также 7$'$÷I0$'$ в случае $\{det(q_i\cdot) \ne 0\}_{i=1}^{m}$ для обратной матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$.

Обобщены различные типы [3] коммутационных соотношений (I.I0), (2.33) и (2.34) для структурных последовательностей матриц, определяющих вид представлений $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$.

Авторы признательны члену-корреспонденту АН СССР, профессору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящей серии работ и предоставленную возможность работы над ней.

Литература

1. Emelyanenko G.A. JINR, E11-83-71, Dubna, 1983.
2. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-86-504, Дубна, 1986.
3. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ PII-87-524, Дубна, 1987.
4. Емельяненко Г.А., ОИЯИ PII-85-489, Дубна, 1985.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. "Наука", М., 198I.

**Рукопись поступила в издательский отдел
I0 июля 1987 года.**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Р11-87-533
Свойства квазитрехвекторных факторизаций квазитрехдиагональных /им обратных/ матриц с прямоугольными блоками

Изучаются различные типы квазитрехвекторных факторизаций квазитрехдиагональных /им обратных/ операторов /матриц/ с прямоугольными элементами-блоками в случае всех отличных от нуля квазиминоров. Обобщены различные множества представлений как для самих матриц, так и им обратных, а также различные типы коммутационных соотношений для структурных последовательностей на случай матриц с прямоугольными блоками.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Rakhmonov T.T. P11-87-533
The Properties of Quasitrivector Factorisations of Quasitridiagonal (Inverse to Them) Matrices with Rectangular Blocks

Different types of quasivector factorisations of quasitridiagonal (inverse to them) operators (matrices) with the rectangular elements-blocks in the case of all nonzero main quasiminors are investigated. Different properties of the same operators as well as inverse to them and of different types of commutation relations for structure iterative operators in the case of matrices with rectangular blocks are generalized.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987