объединенный институт ядерных исследований дубна

Р11-87-524

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов*

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОСОБЕННЫМИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ, ЛЕНТОЧНЫМИ И КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Факторизации и свойства квазитрехдиагональных(им обратных) матриц с квадратными блоками

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

---

*Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

1987

I. Введение

Настоящая работа является продолжением серии работ [I÷3] по изучению свойств квазитрехдиагональных операторов (матриц) и им обратных в случае квадратных блоков. При этом основную роль играет теорема 2 из [3], полученная на основе обобщения результатов [4] (для скалярного случая) на случай операторов указанной структуры. Однако результаты [3] были получены для случая операторов с определенными ограничениями, о чем мы скажем ниже.

Изучаемые в работе различные типы устойчивых факторизаций квазитрехдиагональных операторов помимо теоретического интереса имеют и большую практическую важность в связи с проблемами, например, обсуждаемыми в [5÷8]. Полученные в работе результаты отличаются, по нашему мнению, от результатов других авторов, например, [6÷8], большей полнотой и завершенностью.

Будем далее рассматривать неособенные квазитрехдиагональные матрицы (операторы) $\mathcal{C}$ вида[ж)]

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ - - & p_3 & q_3 & r_4 & - - - \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \qquad (I.I)$$

где $\{q_1; q_i, r_i, p_i\}_{i=2}^{m}$ – квадратные (одинаковой размерности) подматрицы $\mathcal{C}$ (I.I), в случае, когда главные угловые квазиминоры[жж)] $\mathcal{C}$ (I.I) ненулевые. При этом в [3] были получены разные представления для обратного оператора $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$(I.I). В случае, когда $\{q_1; q_i, p_k, r_k\}_{k=2}^{m}$ – неособенные и главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ (I.I) ненулевые, для обратного оператора $\mathcal{B}$ имело место представление (теорема 2 [3])

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} (-E)^{i+j}\mathcal{B}_{ii}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^{-1}\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{i}(p_k\cdot q_{k-1}^{-1}), & j\le i\le m \\ (-E)^{i+j}\mathcal{B}_{ii}\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{j}G_{k-1}^{-1}\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{j}(r_k\cdot q_k^{-1}), & i\le j\le m, \end{cases} \qquad (I.2)$$

где

ж) Отметим, что под оператором $\mathcal{C}$ (I.I) общего вида имеется в виду случай $\{(q_k\neq q_{k'})\neq(r_k\neq r_{k'})\neq(p_k\neq p_{k'})$, при $k=k'\}_{k=2}^{m}$.

жж) Под главными угловыми квазиминорами здесь понимаются (как обычно) определители матриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно.

$$
\begin{cases}
B_{ii} = q_i^{-1}[\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E]^{-1} & \text{– диагональные блоки-матрицы } B \\
\Lambda_{i+1} = E - \Lambda_i^{-1}\gamma_i\,;\ \Lambda_2 = E,\ \gamma_i = (\rho_i\cdot q_{i-1}^{-1})(z_i\cdot q_i^{-1}),\ i = 2,3,\dots,m \\
G_{i-1} = E - G_i^{-1}\tilde{\gamma}_i\,;\ G_{m-1} = E,\ \tilde{\gamma}_i = (z_{i+1}\cdot q_{i+1}^{-1})\cdot(\rho_{i+1}\cdot q_i^{-1}),\ i = m-1, m-2,\dots,1,
\end{cases}
\tag{I.3}
$$

если (Замечание*) I):

$$
\begin{cases}
\prod\limits_{k=i+1}^{j}(z_k\cdot q_k^{-1})\cdot\tilde{\gamma}_j\cdot\Big[\prod\limits_{k=i+1}^{j}(z_k\cdot q_k^{-1})\Big]^{-1} = \tilde{\gamma}_j\,, & i \le j \\
\prod\limits_{k=j+1}^{i}(\rho_k\cdot q_{k-1}^{-1})\cdot\gamma_i\cdot\Big[\prod\limits_{k=j+1}^{i}(\rho_k\cdot q_{k-1}^{-1})\Big]^{-1} = \gamma_i\,, & j \le i\,.
\end{cases}
\tag{I.4}
$$

Дальше в настоящей работе мы снимем ограничения (I.4), характерные для результатов [3], обобщим результаты [3] на случай матриц $\mathcal{C}$ (I.I) общего вида с квадратными элементами, а также получим ряд новых результатов. При этом мы будем существенным образом опираться на результаты [2] и [9].

2. Коммутационные соотношения и их роль в компактных факторизациях квазитрехдиагональных (им обратных) операторов с квадратными блоками

Итак, пусть $\mathcal{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (I.I). Опираясь на результаты [2,9] можем показать справедливость следующего утверждения**).

Теорема 4. Пусть $\mathcal{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (I.I) с неособенными q_1 и q_m -матрицами и пусть все главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ (I.I) отличны от нуля. Тогда для $\mathcal{C}$ (I.I) справедливы следующие факторизованные представления:

Представление I

$$
\mathcal{C} = F\cdot\mathcal{D}\cdot R =
\begin{bmatrix} E & & & \\ (-\beta_2) & E & & \\ & (-\beta_3) & E & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & (-\beta_m) & E \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_m \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} E & (-C_2) & & \\ & E & (-C_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & E & (-C_m) \\ & & & E \end{bmatrix}.
\tag{2.I}
$$

---

*) Отметим, что ограничительные условия (I.4) были опущены в [3] по техническим причинам. При этих же условиях фактически доказаны и все другие результаты в [3].

**) Для квазитрехдиагональных операторов, как и в скалярном случае [4], будем пользоваться последовательной нумерацией основных результатов (теорем и лемм), а также общими обозначениями [3].

Представление 2

$$
\mathcal{C} = \mathcal{D}\cdot Q\cdot R =
\begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_m \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} E & & & \\ (-\tilde{\beta}_2) & E & & \\ & (-\tilde{\beta}_3) & E & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & (-\beta_m) & E \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} E & (-C_2) & & \\ & E & (-C_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & E & (-C_m) \\ & & & E \end{bmatrix}; \text{ где}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{cases}
\beta_{k+1} = -(\rho_{k+1}\cdot\omega_k^{-1}), \\
C_{k+1} = -(\omega_k^{-1}\cdot z_{k+1}), \\
\tilde{\beta}_{k+1} = -(\omega_{k+1}^{-1}\cdot\rho_{k+1})\,,\ k = 1,2,\dots,m-1 \\
\omega_k = q_k + \rho_k\cdot C_k,\ k = 1,2,\dots,m;\ \rho_1, E\text{-единичные},\ C_1 = 0\text{- матрицы}.
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

Представление 3

$$
\mathcal{C} = \hat{F}\cdot\hat{\mathcal{D}}\cdot\hat{R} =
\begin{bmatrix} E & (-\hat{\beta}_2) & & \\ & E & (-\hat{\beta}_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & E & (-\hat{\beta}_m) \\ & & & E \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 & & & \\ & \hat{\omega}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{\omega}_m \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} E & & & \\ (-\hat{C}_2) & E & & \\ & (-\hat{C}_3) & E & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & (-C_m) & E \end{bmatrix}.
\tag{2.4}
$$

Представление 4

$$
\mathcal{C} = \hat{\mathcal{D}}\cdot\hat{Q}\cdot\hat{R} =
\begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 & & & \\ & \hat{\omega}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{\omega}_m \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} E & (-\tilde{\tilde{\beta}}_2) & & \\ & E & (-\tilde{\tilde{\beta}}_3) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & E & (-\tilde{\tilde{\beta}}_m) \\ & & & E \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} E & & & \\ (-\hat{C}_2) & E & & \\ & (-\hat{C}_3) & E & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & (-C_m) & E \end{bmatrix}, \text{ где}
\tag{2.5}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{\beta}_{k+1} = -(z_{k+1}\cdot\hat{\omega}_{k+1}^{-1}), \\
\hat{C}_{k+1} = -(\hat{\omega}_{k+1}^{-1}\cdot\rho_{k+1}), \\
\tilde{\tilde{\beta}}_{k+1} = -(\hat{\omega}_k^{-1}\cdot z_{k+1})\,,\ k = 1,2,\dots,m-1 \\
\hat{\omega}_k = q_k + z_{k+1}\cdot C_{k+1},\ k = 1,2,\dots,m;\ \hat{C}_{m+1} = 0\text{– нулевая матрица}, \\
z_{m+1}\,,\ E \quad \text{– единичные матрицы.}
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

Доказательство. Прежде всего (Замечание 2) отметим, что получить представления для $\mathcal{C}$ (I.I) в виде (2.I)÷(2.6), исходя из техники доказательства, использованной в [3], и при этом снять ограничения (I.4), о которых мы сказали выше, весьма сложно.

Представления (2.I)÷(2.3) являются частными случаями [2] (когда $\{q_1; q_i; z_i; \rho_i\}_{i=2}^{m}$ – квадратные), а (2.4)÷(2.6) мы постулируем по аналогии с [2] и [9] (скалярный случай) и их справедливость проверяем путем умножения блочных матриц, т.е. $(F\cdot\mathcal{D}\cdot R)$, $(\mathcal{D}\cdot Q\cdot R)$ и соответственно $(\hat{F}\cdot\hat{\mathcal{D}}\cdot\hat{R})$, $(\hat{\mathcal{D}}\cdot\hat{Q}\cdot\hat{R})$.

На самом деле, выполнив в правых частях (2.I) и (2.2), а также в (2.4) и (2.5) умножения блочных матриц и при этом учитывая обозначения (2.3) и соответственно (2.6), получаем квазитрехдиагональные матрицы $\mathcal{C}$ (I.I). Итак, справедливость утверждения теоремы проверена.

Далее, воспользовавшись результатами теоремы 4, покажем справедливость следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (I.I) с неособенными q_1- и q_m - матрицами и пусть главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ (I.I) ненулевые. Тогда элементы – блоки $\mathcal{B}_{ij}$ обратной матрицы $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$ могут быть представлены в виде*):

Представление I

$$\mathcal{B}_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{k=\max(i,j)}^{m}\prod\limits_{\mu=i+1}^{k}c_\mu\cdot\omega_k^{-1}\cdot\prod\limits_{\nu=j+1}^{k}\beta_\nu\,, & \text{или} \quad (2.7)\\[2ex] \sum\limits_{k=\max(i,j)}^{m}\prod\limits_{\mu=i+1}^{k}c_\mu\cdot\prod\limits_{\nu=j+1}^{k}\tilde{\beta}_\nu\cdot\omega_j^{-1}\,, & \quad (2.8)\end{cases}$$

где определены следующие порядки умножения операторов

$$\begin{cases}\prod\limits_{\mu=q+1}^{p}c_\mu=\begin{cases}c_{q+1}\cdot c_{q+2}\cdots c_p\,, & \text{если } p>q\\ E\,, & \text{если } p\le q\end{cases}\\[3ex] \prod\limits_{k=q+1}^{p}\beta_k=\begin{cases}\beta_p\cdot\beta_{p-1}\cdots\beta_{q+1}\,, & \text{если } p>q\\ E\,, & \text{если } p\le q\end{cases}\\[3ex] \prod\limits_{\mu=q+1}^{p}\tilde{\beta}_\mu=\begin{cases}\tilde{\beta}_p\cdot\tilde{\beta}_{p-1}\cdots\tilde{\beta}_{q+1}\,, & \text{если } p>q\\ E\,, & \text{если } p\le q.\end{cases}\end{cases}\qquad(2.9)$$

Представление 2

$$\mathcal{B}_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)}\prod\limits_{\mu=k+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod\limits_{\nu=k+1}^{j}\hat{\beta}_\nu\,, & \text{или} \quad (2.10)\\[2ex] \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)}\prod\limits_{\mu=k+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\prod\limits_{\nu=k+1}^{j}\tilde{\tilde{\beta}}_\nu\cdot\hat{\omega}_j^{-1}\,, & \quad (2.11)\end{cases}$$

где определены следующие порядки умножения операторов

x) Отметим, что нами вводится последовательная нумерация представлений отдельно для самого оператора $\mathcal{C}$ (I.I), а также для ему обратного, т.е. $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$.

$$\begin{cases}\prod\limits_{\mu=q+1}^{p}\hat{\beta}_\mu=\begin{cases}\hat{\beta}_{q+1}\cdot\hat{\beta}_{q+2}\cdots\hat{\beta}_{p-1}\cdot\hat{\beta}_p\,, & \text{если } p>q\\ E\,, & \text{если } p\le q\end{cases}\\[3ex] \prod\limits_{\mu=q+1}^{p}\hat{c}_\mu=\begin{cases}\hat{c}_p\cdot\hat{c}_{p-1}\cdots\hat{c}_{q+1}\,, & \text{если } p>q\\ E\,, & \text{если } p\le q\end{cases}\\[3ex] \prod\limits_{\mu=q+1}^{p}\tilde{\tilde{\beta}}_\mu=\begin{cases}\tilde{\tilde{\beta}}_{q+1}\cdot\tilde{\tilde{\beta}}_{q+2}\cdots\tilde{\tilde{\beta}}_p\,, & \text{если } p>q\\ E\,, & \text{если } p\le q\end{cases}\end{cases}\qquad(2.12)$$

При этом имеют место следующие "коммутационные" соотношения для структурных последовательностей операторов:

$$\begin{cases}\omega_k^{-1}\cdot\prod\limits_{\nu=j+1}^{k}\beta_\nu=\prod\limits_{\nu=j+1}^{k}\tilde{\beta}_\nu\cdot\omega_j^{-1}\,, & j\le k\\[2ex] \hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod\limits_{\nu=k+1}^{j}\hat{\beta}_\nu=\prod\limits_{\nu=k+1}^{j}\tilde{\tilde{\beta}}_\nu\cdot\hat{\omega}_j^{-1}\,, & k\le j.\end{cases}\qquad(2.13)$$

Здесь по-прежнему операторы (матрицы) $\{c,\hat{c},\beta,\hat{\beta},\tilde{\tilde{\beta}},\tilde{\beta},\omega,\hat{\omega}\}$ – определяющие структурные последовательности (2.9), (2.I2) определены в (2.3) и (2.6).

Доказательство представлений (2.7)÷(2.8), а также справедливости коммутационного соотношения $(2.13)_{1)}$ было проведено в [2]. Поэтому здесь на этом не будем останавливаться, а, исходя из техники доказательства [2], покажем справедливость представления (2.I0)÷(2.I2), а также коммутационного соотношения $(2.13)_{2)}$.

Итак, из (2.4)÷(2.5), находим явный вид элементов-блоков матриц $(\hat{F}^{-1},\hat{\mathcal{D}}^{-1},\hat{R}^{-1}\hat{Q}^{-1})$

$$(\hat{F}^{-1})_{ij}=\begin{cases}0\,, & i>j,\ j=1,2,\dots,m\\ \prod\limits_{k=i+1}^{j}\hat{\beta}_k\,, & i\le j\le m,\ i=1,2,\dots,m;\end{cases}\qquad (\hat{\mathcal{D}}^{-1})_{ij}=\begin{cases}0\,, & i\ne j\\ \hat{\omega}_i^{-1}\,, & i=j\end{cases}\qquad(2.14)$$

$$(\hat{R}^{-1})_{ij}=\begin{cases}0\,, & j>i,\ i=1,2,\dots,m\\ \prod\limits_{k=i+1}^{j}\hat{\beta}_k\,, & i\le j\le m,\ i=1,2,\dots,m;\end{cases}\qquad (\hat{Q}^{-1})_{ij}=\begin{cases}0\,, & i>j,\ j=1,2,\dots,m\\ \prod\limits_{k=i+1}^{j}\tilde{\tilde{\beta}}_k\,, & i\le j\le m,\ i=1,\dots,m.\end{cases}\qquad(2.15)$$

Теперь, учитывая (2.4), (2.5), имеем $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}=(\hat{R}^{-1}\cdot\hat{\mathcal{D}}^{-1}\cdot\hat{F}^{-1})$, а также $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}=(\hat{R}^{-1}\cdot\hat{Q}^{-1}\cdot\hat{\mathcal{D}}^{-1})$. Далее, воспользовавшись явным видом элементов-блоков матриц $(\hat{F}^{-1},\hat{\mathcal{D}}^{-1};\hat{R}^{-1},\hat{Q}^{-1})$, т.е. (2.I4) и (2.I5), получим представления вида (2.I0)÷(2.I2).

Справедливость коммутационных соотношений $(2.13)_{2)}$ покажем, учитывая порядок умножения (2.6). Имеем

$$\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{j^\circ}\beta_j = \hat{\omega}_k^{-1}\left[\hat{\beta}_{k+1}\cdot\hat{\beta}_{k+2}\cdot\hat{\beta}_{k+3}\cdots\hat{\beta}_{j-1}\cdot\hat{\beta}_j\right] \overset{(2.6)}{=\!=}$$

$$= \hat{\omega}_k^{-1}\left[(-z_{k+1}\cdot\hat{\omega}_{k+1}^{-1})\cdot(-z_{k+2}\cdot\hat{\omega}_{k+2}^{-1})\cdot(-z_{k+3}\cdot\hat{\omega}_{k+3}^{-1})\cdots(-z_{j-1}\cdot\hat{\omega}_{j-1}^{-1})\cdot(-z_j\cdot\hat{\omega}_j^{-1})\right]=$$

$$=\left[(-\hat{\omega}_k^{-1}z_{k+1})\cdot(-\hat{\omega}_{k+1}^{-1}z_{k+2})\cdot(-\hat{\omega}_{k+2}^{-1}z_{k+3})\cdots(-\hat{\omega}_{j-2}^{-1}z_{j-1})\cdot(\hat{\omega}_{j-1}^{-1}\cdot z_j)\right]\cdot\hat{\omega}_j^{-1} =\!=$$

$$\overset{(2.6)}{=\!=} \prod_{j=k+1}^{j^\circ}\tilde{\tilde{\beta}}_j\cdot\hat{\omega}_j^{-1}\ , \quad при \quad k\le j^\circ .$$

В заключение отметим, что установленные коммутационные соотношения $(2.13)_{1)}$ и $(2.13)_{2)}$ играют далее большую роль в изучении свойств представлений. Лемма доказана.

Воспользовавшись теперь результатами леммы 3, покажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{C}$ – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (I.I) с неособенными q_1- и q_m - матрицами, и пусть все главные угловые квазиминоры $\mathcal{C}$ (I.I) отличны от нуля. Тогда для элементов блоков $\mathcal{B}_{ij}$ обратной матрицы $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$ имеют место следующие факторизованные представления:

Представление 3.

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot\prod_{j=j+1}^{i}\beta_j\ , & \text{если } 1\le j\le i\le m \\ \prod_{\mu=i+1}^{j}c_\mu\cdot\widetilde{\mathcal{B}}_{jj}\ , & \text{если } 1\le i\le j\le m, \end{cases} \quad \text{где} \tag{2.16}$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{ll} = \sum_{k=l}^{m}\prod_{\mu=l+1}^{k}c_\mu\cdot\omega_k^{-1}\cdot\prod_{j=l+1}^{k}\beta_j\ , \quad l=m,m-1,\dots,1. \tag{2.17}$$

Либо эквивалентное ему

Представление 4

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{ij-1} = \mathcal{B}_{ij}\cdot\beta_j\ , & \text{если } 1\le j\le i\le m \\ \mathcal{B}_{i-1j} = c_i\cdot\mathcal{B}_{ij}\ , & \text{если } 1\le i\le j\le m;\ \mathcal{B}_{ii}=\widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \\ \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} = \omega_i^{-1}+c_{i+1}\cdot\widetilde{\mathcal{B}}_{i+1i+1}\cdot\beta_{i+1}\ ; & \widetilde{\mathcal{B}}_{mm}=\omega_m^{-1},\ i=m-1,\dots,1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Представление 5

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} \prod_{\mu=j+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\mathcal{B}}_{jj}\ , & \text{если } 1\le j\le i\le m \\ \hat{\mathcal{B}}_{ii}\cdot\prod_{j=i+1}^{j}\hat{\beta}_j\ , & \text{если } 1\le i\le j\le m, \end{cases} \quad \text{где} \tag{2.19}$$

$$\hat{\mathcal{B}}_{ll} = \sum_{k=1}^{l}\prod_{\mu=k+1}^{l}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{l}\hat{\beta}_j\ , \quad l=1,2,\dots,m. \tag{2.20}$$

Либо эквивалентное ему

Представление 6

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{ij+1} = \mathcal{B}_{ij}\cdot\hat{\beta}_{j+1}\ , & \text{если } 1\le i\le j\le m \\ \mathcal{B}_{i+1j} = \hat{c}_{i+1}\cdot\mathcal{B}_{ij}\ , & \text{если } 1\le j\le i\le m;\ \mathcal{B}_{ii}=\hat{\mathcal{B}}_{ii} \\ \hat{\mathcal{B}}_{ii} = \hat{\omega}_i^{-1}+\hat{c}_i\cdot\hat{\mathcal{B}}_{i-1i-1}\cdot\hat{\beta}_i\ ; & \hat{\mathcal{B}}_{11}=\hat{\omega}_1^{-1},\ i=2,3,\dots,m. \end{cases} \tag{2.21}$$

Здесь по-прежнему $\{c,\beta,\omega;\ \hat{c},\hat{\beta},\hat{\omega}\}$ – определены в (2.3) и (2.6), а также справедливы порядки умножения (2.9) и (2.12). При этом $\mathcal{B}_{ii}$ - есть неособенные[x)] элементы-блоки обратного оператора $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$.

Доказательство. Представления 3 и 4 были ранее получены в [2] (хотя некоторые фрагменты доказательства (2.16)÷(2.18) и не приводились в [2] подробно). Поэтому на их доказательстве здесь мы не будем останавливаться. Ниже, исходя из техники доказательства [2], приводим лишь доказательство представлений 5 и 6.

Итак, сначала, воспользовавшись результатами леммы 4, покажем справедливость (2.19)÷(2.20). Из (2.10) при $1\le j\le i\le m$ имеем

$$\mathcal{B}_{ij} = \sum_{k=1}^{j}\prod_{\mu=k+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{j}\hat{\beta}_k\ . \tag{2.22}$$

Отсюда, учитывая порядок умножения $(2.12)_{2)}$, (2.22) можем представить в виде

$$\mathcal{B}_{ij} = \sum_{k=1}^{j}\Big(\prod_{\mu=j+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\prod_{\mu=k+1}^{j}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{j}\hat{\beta}_j\Big) = \prod_{\mu=j+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\Big(\sum_{k=1}^{j}\prod_{\mu=k+1}^{j}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{j}\hat{\beta}_j\Big) =$$

$$= \prod_{\mu=j+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\mathcal{B}}_{jj}\ , \quad где \quad \hat{\mathcal{B}}_{jj} = \sum_{k=1}^{j}\prod_{\mu=k+1}^{j}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{j}\hat{\beta}_j\ .$$

Аналогично тому, как поступили выше, из (2.10) при $1\le i\le j\le m$ имеем

$$\mathcal{B}_{ij} = \sum_{k=1}^{i}\prod_{\mu=k+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{j}\hat{\beta}_k\ . \tag{2.23}$$

Теперь из (2.23), учитывая порядок умножения $(2.12)_{1)}$, получаем

$$\mathcal{B}_{ij} = \sum_{k=1}^{i}\Big(\prod_{\mu=k+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{i}\hat{\beta}_j\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{i}\prod_{\mu=k+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{i}\hat{\beta}_j\Big)\cdot\prod_{j=i+1}^{j}\hat{\beta}_j =$$

$$= \hat{\mathcal{B}}_{ii}\cdot\prod_{j=i+1}^{j}\hat{\beta}_j\ , \quad где\ так\ же \quad \hat{\mathcal{B}}_{ii} = \sum_{k=1}^{i}\prod_{\mu=k+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\hat{\omega}_k^{-1}\cdot\prod_{j=k+1}^{i}\hat{\beta}_j\ .$$

Итак, показали справедливость (2.19)÷(2.20). Теперь покажем справедливость рекурсивных выражений (2.21). Для диагональных элементов-блоков $\hat{\mathcal{B}}_{ii}$ из (2.20) получаем

---

x) Доказательство этого факта, вообще говоря, следует из [2]. Однако оно нами будет приведено в следующей работе, поскольку для этого потребуются некоторые новые результаты (факты).

$$\hat{B}_{11} = \sum_{k=1}^{1} \prod_{\mu=k+1}^{1} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\eta=k+1}^{1} \hat{\beta}_\eta = \prod_{\mu=2}^{1} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_1^{-1} \cdot \prod_{\eta=2}^{1} \beta_\eta = \hat{\omega}_1^{-1}, \text{ при } \ell = 1.$$

$$\hat{B}_{22} = \sum_{k=1}^{2} \prod_{\mu=k+1}^{2} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\eta=k+1}^{2} \hat{\beta}_\eta = \prod_{\mu=2}^{2} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_1^{-1} \cdot \prod_{\eta=2}^{2} \hat{\beta}_\eta + \prod_{\mu=3}^{2} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_2^{-1} \cdot \prod_{\eta=3}^{2} \hat{\beta}_\eta =$$

$$= \hat{c}_2 \cdot \hat{\omega}_1^{-1} \cdot \hat{\beta}_2 + \hat{\omega}_2^{-1} = \hat{c}_2 \cdot \hat{B}_{11} \cdot \hat{\beta}_2 + \hat{\omega}_2^{-1}, \quad \text{при } \ell = 2.$$

$$\hat{B}_{33} = \sum_{k=1}^{3} \prod_{\mu=k+1}^{3} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\eta=k+1}^{3} \hat{\beta}_\eta = \prod_{\mu=2}^{3} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_1^{-1} \cdot \prod_{\eta=2}^{3} \hat{\beta}_\eta + \prod_{\mu=3}^{3} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_2^{-1} \cdot \prod_{\eta=3}^{3} \hat{\beta}_\eta +$$

$$+ \prod_{\mu=4}^{3} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_3^{-1} \cdot \prod_{\eta=4}^{3} \hat{\beta}_\eta = \hat{c}_3 \cdot \hat{c}_2 \cdot \hat{\omega}_1^{-1} \cdot \hat{\beta}_2 \cdot \hat{\beta}_3 + \hat{c}_3 \cdot \hat{\omega}_2^{-1} \cdot \hat{\beta}_3 + \hat{\omega}_3^{-1} =$$

$$= \hat{c}_3 \cdot (\hat{c}_2 \cdot \hat{\omega}_1^{-1} \cdot \hat{\beta}_2 + \hat{\omega}_2^{-1}) \cdot \hat{\beta}_3 + \hat{\omega}_3^{-1} = \hat{c}_3 \cdot \hat{B}_{22} \cdot \hat{\beta}_3 + \hat{\omega}_3^{-1}, \quad \text{при } \ell = 3.$$

Далее, выполняя два заключительных этапа в методе полной математической индукции, убеждаемся в справедливости выражений

$$\hat{B}_{\ell\ell} = \hat{\omega}_\ell^{-1} + \hat{c}_\ell \cdot \hat{B}_{\ell-1\,\ell-1} \cdot \hat{\beta}_\ell\,; \quad \hat{B}_{11} = \hat{\omega}_1^{-1}, \quad \text{при всех } 2 \le \ell \le m.$$

Далее покажем справедливость $(2.21)_{1)}$ и $(2.21)_{2)}$. Из (2.10) при $1 \le i \le j \le m$ имеем (с учетом порядка умножения $(2.12)_{1)}$)

$$B_{i\,j+1} \overset{1 \le i \le j}{=\!=} \sum_{k=1}^{i} \prod_{\mu=k+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\eta=k+1}^{j+1} \hat{\beta}_\eta = \Big(\sum_{k=1}^{i} \prod_{\mu=k+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\eta=k+1}^{j} \hat{\beta}_\eta \Big) \cdot \hat{\beta}_{j+1} = B_{ij} \cdot \hat{\beta}_{j+1}.$$

Аналогично из (2.10) при $m \ge i \ge j \ge 1$ (учитывая порядок умножения $(2.12)_{2)}$) получим

$$B_{i+1\,j} \overset{1 \le j \le i}{=\!=} \sum_{k=1}^{j} \prod_{\mu=k+1}^{i+1} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\eta=k+1}^{j} \hat{\beta}_\eta = \hat{c}_{i+1} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{j} \prod_{\mu=k+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \hat{\omega}_k^{-1} \cdot \prod_{\eta=k+1}^{j} \hat{\beta}_\eta \Big) = \hat{c}_{i+1} \cdot B_{ij}.$$

Итак, показали справедливость (2.21) и, следовательно, закончили доказательство теоремы 5.

3. Свойства трехквазивекторных факторизаций операторов, обратных к неособенным квазитрехдиагональным, с неособенными квадратными блоками в случае всех отличных от нуля главных угловых квазиминоров

Пусть теперь C – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (1.1) с неособенными элементами-блоками $\{q_1; q_i, z_i, p_i\}_{i=2}^{m}$ и всеми отличными от нуля главными угловыми квазиминорами. Представим теперь по аналогии с [3] C (1.1) в виде*)

*) Отметим, что здесь и всюду далее рассматривается именно правая факторизация C (1.1). При этом ниже получаемые результаты легко распространяются и на левую факторизацию [т.е. когда $diag(q_1, q_2, \dots q_m)$ выносится налево].

$$C = \tilde{C} \cdot C_\varphi = \begin{bmatrix} E & \tilde{z}_2 & & & & \\ \tilde{p}_2 & E & \tilde{z}_3 & & & \\ & \tilde{p}_3 & E & \tilde{z}_4 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \tilde{p}_{m-1} & E & \tilde{z}_m \\ & & & & \tilde{p}_m & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

где

$$\{\tilde{z}_k = z_k \cdot q_k^{-1}\,;\ \tilde{p}_k = p_k \cdot q_{k-1}^{-1}\}_{k=2}^{m} \tag{3.2}$$

– неособенные, квадратные элементы-блоки матрицы $\tilde{C}$.

Отметим, что в этом случае обратный оператор $B = C^{-1}$ формально можем представить в виде

$$B = C_\varphi^{-1} (\tilde{C}^{-1} \equiv \tilde{B}) = \begin{bmatrix} q_1^{-1} & & & \\ & q_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & \tilde{z}_2 & & & & \\ \tilde{p}_2 & E & \tilde{z}_3 & & & \\ & \tilde{p}_3 & E & \tilde{z}_4 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \tilde{p}_{m-1} & E & \tilde{z}_m \\ & & & & \tilde{p}_m & E \end{bmatrix}^{-1}, \tag{3.3}$$

где $\{\tilde{p}_k, \tilde{z}_k\}_{k=2}^{m}$ определены в (3.2). Справедлива следующая

<u>Теорема 6</u>. Пусть C – неособенная квазитрехдиагональная матрица вида (3.1), все главные угловые квазиминоры которой отличны от нуля. Тогда для элементов-блоков обратного оператора $B = C^{-1}$ справедливы следующие[xx] единственные факторизованные представления:

<u>Представление 7</u>

$$(B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \tilde{B}_{ij}) = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} \tilde{B}_{ii} \cdot \prod\limits_{\eta=j+1}^{i} \beta_\eta, & \text{если } 1 \le j \le i \le m \\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j} c_\mu \cdot \tilde{B}_{jj}, & \text{если } 1 \le i \le j \le m. \end{cases} \tag{3.4}$$

<u>Представление 8</u>

$$(B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \tilde{B}_{ij}) = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} \prod\limits_{\mu=j+1}^{i} \hat{c}_\mu \cdot \tilde{B}_{jj}, & \text{если } 1 \le j \le i \le m \\ \tilde{B}_{ii} \cdot \prod\limits_{\eta=i+1}^{j} \hat{\beta}_\eta, & \text{если } 1 \le i \le j \le m, \end{cases} \tag{3.5}$$

а также

<u>Представление 9</u>

$$(B_{ij} = q_i^{-1} \cdot \tilde{B}_{ij}) = q_i^{-1} \cdot \begin{cases} \tilde{B}_{ii} \cdot \prod\limits_{\eta=j+1}^{i} \beta_\eta, & \text{если } 1 \le j \le i \le m \\ \tilde{B}_{ii} \cdot \prod\limits_{\eta=i+1}^{j} \hat{\beta}_\eta, & \text{если } 1 \le i \le j \le m. \end{cases} \tag{3.6}$$

xx) Как видим, отличие представлений 7 и 8 настоящей теоремы от представлений 3 и 5 (двух независимых!) предыдущей теоремы заключается в том, что между представлениями 7 и 8 существует связь, которая осуществляется через одинаковые B_{ii}.

Представление I0

$$(\mathcal{B}_{ij}=q_i^{-1}\cdot\widetilde{\mathcal{B}}_{ij}) = q_i^{-1}\cdot\begin{cases}\prod\limits_{\mu=j+1}^{i}\hat{c}_\mu\cdot\widetilde{\mathcal{B}}_{jj}, & \text{если } 1\le j\le i\le m\\ \prod\limits_{\mu=i+1}^{j}c_\mu\cdot\widetilde{\mathcal{B}}_{jj}, & \text{если } 1\le i\le j\le m.\end{cases} \qquad (3.7)$$

Здесь $\widetilde{\mathcal{B}}_{kk}$ -неособенные диагональные элементы-блоки обратного оператора $\widetilde{\mathcal{B}}=\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}$ для $\widetilde{\mathcal{C}}$ (3.I), единственным образом представимые в виде

$$\begin{cases}\widetilde{\mathcal{B}}_{kk}=[\Lambda_{k+1}+G_{k-1}-E]^{-1},\ k=1,2,3,\dots,m, & \text{где}\\ \Lambda_{k+1}=E-\widetilde{\rho}_k\cdot\Lambda_k^{-1}\cdot\widetilde{z}_k;\ \Lambda_2=E,\ k=2,3,\dots,m\\ G_{k-1}=E-\widetilde{z}_{k+1}\cdot G_k^{-1}\cdot\widetilde{\rho}_{k+1};\ G_{m-1}=E,\ k=m-1,m-2,\dots,1\\ \{\widetilde{z}_k=z_k\cdot q_k^{-1};\ \widetilde{\rho}_k=\rho_k\cdot q_{k-1}^{-1}\}_{k=2}^{m};\ \{det(G_k)\ne 0,\ det(\Lambda_k)\ne 0\}_k\end{cases} \qquad (3.8)$$

При этом операторы $\{c,\hat{c};\beta,\hat{\beta}\}$ выражаются через операторы $\{G$ и $\Lambda\}$ в виде

$$\begin{cases}\beta_{k+1}=-(\widetilde{\rho}_{k+1}\cdot\Lambda_{k+1}^{-1}),\\ c_{k+1}=-(\Lambda_{k+1}^{-1}\cdot\widetilde{z}_{k+1}),\\ \hat{\beta}_{k+1}=-(\widetilde{z}_{k+1}\cdot G_k^{-1}),\\ \hat{c}_{k+1}=-(G_k^{-1}\cdot\widetilde{\rho}_{k+1}),\ k=1,2,\dots,m-1,\end{cases} \qquad (3.9)$$

а также по-прежнему сохраняется порядок умножения операторов (2.9) и (2.I2).

Доказательство теоремы (представления 7 и 8) выполним с учетом преобразований (3.I), (3.3) на основе проверки основных равенств $\mathcal{C}\cdot\mathcal{B}=E=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$. Отметим, что невырожденность всех матриц $\{G_k,\Lambda_k\}$ является следствием отличия от нуля всех главных угловых квазиминоров. При этом, очевидно, последние равенства эквивалентны двум системам матричных равенств[x)]

$$\begin{cases}\widetilde{\rho}_i\cdot\mathcal{B}_{i-1j}+E\cdot\mathcal{B}_{ij}+\widetilde{z}_{i+1}\cdot\mathcal{B}_{i+1j}=\mathcal{O}, & \text{если } 1\le i<j\le m\\ \widetilde{\rho}_i\cdot\mathcal{B}_{i-1i}+E\cdot\mathcal{B}_{ii}+\widetilde{z}_{i+1}\cdot\mathcal{B}_{i+1i}=E, & \text{если } 1\le i=j\le m\\ \widetilde{z}_{i+1}\cdot\mathcal{B}_{i+1j}+E\cdot\mathcal{B}_{ij}+\widetilde{\rho}_i\cdot\mathcal{B}_{i-1j}=\mathcal{O}, & \text{если } 1\le j<i\le m,\end{cases} \qquad (3.10)$$

$$\begin{cases}\mathcal{B}_{ij+1}\cdot\widetilde{\rho}_{j+1}+\mathcal{B}_{ij}\cdot E+\mathcal{B}_{ij-1}\cdot\widetilde{z}_j=\mathcal{O}, & 1\le i<j\le m\\ \mathcal{B}_{ii-1}\cdot\widetilde{z}_i+\mathcal{B}_{ii}\cdot E+\mathcal{B}_{ii+1}\cdot\widetilde{\rho}_{i+1}=E, & 1\le i=j\le m\\ \mathcal{B}_{ij-1}\cdot\widetilde{z}_i+\mathcal{B}_{ij}\cdot E+\mathcal{B}_{ij+1}\cdot\widetilde{\rho}_{j+1}=\mathcal{O}, & 1\le j<i\le m.\end{cases} \qquad (3.11)$$

x) Всюду ниже, при доказательстве этой теоремы для сокращения обозначений и где это не вызывает недоразумений, будем пользоваться символом $\mathcal{B}_{ij}$ вместо $\widetilde{\mathcal{B}}_{ij}$.

Итак, для каждого из представлений 7 и 8 проверим справедливость систем матричных равенств (3.I0) и (3.II). Сначала выполним обоснование единственности представлений $(3.8)_{1)}$ для диагональных блоков $\mathcal{B}_{kk}$.

Подставив выражения для $\mathcal{B}_{i-1i}$ представлений $(3.4)_{1)}$ (при $i-1<i$) и для $\mathcal{B}_{i+1i}$ из представлений $(3.5)_{2)}$ (при $i<i+1$) в $(3.I0)_{2)}$, получим равенства

$$\widetilde{\rho}_i\cdot\prod_{\mu=i}^{i}c_\mu\cdot\mathcal{B}_{ii}+E\cdot\mathcal{B}_{ii}+\widetilde{z}_{i+1}\cdot\prod_{\mu=i+1}^{i+1}\hat{c}_\mu\cdot\mathcal{B}_{ii}=E \qquad \text{при } i=j$$

или

$$\widetilde{\rho}_i\cdot c_i\cdot\mathcal{B}_{ii}+E\cdot\mathcal{B}_{ii}+\widetilde{z}_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1}\cdot\mathcal{B}_{ii}=E,\ i=j. \qquad (3.12)$$

Аналогично тому, как поступили выше, подставив в $(3.II)_{2)}$ выражения для $\mathcal{B}_{ii-1}$ из (3.4) (при $i>i-1$) и для $\mathcal{B}_{ii+1}$ из (3.5) (при $i<i+1$), получим равенства

$$\mathcal{B}_{ii}\cdot\prod_{\gamma=i}^{i}\beta_\gamma\cdot\widetilde{z}_i+\mathcal{B}_{ii}\cdot E+\mathcal{B}_{ii}\cdot\prod_{\gamma=i+1}^{i+1}\hat{\beta}_\gamma\cdot\widetilde{\rho}_{i+1}=E, \qquad \text{при } i=j$$

или

$$\mathcal{B}_{ii}\cdot\beta_i\cdot\widetilde{z}_i+\mathcal{B}_{ii}\cdot E+\mathcal{B}_{ii}\cdot\hat{\beta}_{i+1}\cdot\widetilde{\rho}_{i+1}=E,\ i=j. \qquad (3.13)$$

Теперь, подставляя в (3.I2) и (3.I3) выражения (3.9), а также пользуясь определением последовательностей $\{G,\Lambda\}$ (3.8), получаем

$$\begin{cases}[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E]\cdot\mathcal{B}_{ii}=E,\ i=1,2,\dots,m\\ \mathcal{B}_{ii}\cdot[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E]=E,\ i=1,2,\dots,m,\end{cases} \qquad (3.14)$$

отсюда видим, что оба средних равенства в (3.I0) и (3.II) приводят к уравнениям (на диагональные блоки $\mathcal{B}_{ii}$), которые свидетельствуют о существовании единственного обратного левого (правого) представления для диагональных блоков $\mathcal{B}_{ii}$ в обоих представлениях 7 и 8. Покажем теперь, что таким представлением является $(3.8)_{1)}$. Проверим это, например для $(3.I4)_{2)}$. По определению оператора $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$ операторы $\mathcal{B}_{ii}$ являются линейными ограниченными матрицами. В силу равенства $(3.I4)_{2)}$, а также определения последовательностей $\{G$ и $\Lambda\}$ (3.8) операторы $[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E]$ - являются линейными ограниченными. Из $(3.I4)_{2)}$ следует, что ограниченные линейные операторы $\mathcal{B}_{ii}$ отображают банахово пространство линейных ограниченных операторов $[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E]$ на само себя, так как оператор E принадлежит тому же пространству. Тогда в силу теоремы Банаха [II] существует $\mathcal{B}_{ii}^{-1}$ - ограниченный обратный оператор. Из $(3.I4)_{2)}$ следует, что таким оператором является неособенный $\mathcal{B}_{ii}^{-1}=[\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-E]$. Итак, справедливость $(3.8)_{1)}$ доказана.

Далее, покажем, что равенства (3.I0) и (3.II) при подстановке в них представления 7 обращаются в тождества.

Подставив (3.4) в (3.10)$_{1)}$, получаем

$$\tilde{P}_i \cdot \prod_{\mu=i}^{j} C_\mu \cdot \mathcal{B}_{jj} + E \cdot \prod_{\mu=i+1}^{j} C_\mu \cdot \mathcal{B}_{jj} + \tilde{z}_{i+1} \cdot \prod_{\mu=i+2}^{j} C_\mu \cdot \mathcal{B}_{jj} = \mathbb{O}, \quad 1 \le i \le j \le m.$$

Отсюда, воспользовавшись неособенностью $\{\mathcal{B}_{jj}$ и $\prod_{\mu=i+1}^{j} C_\mu\}$ и умножив последние равенства справа на $\mathcal{B}_{jj}^{-1}$ и $(\prod_{\mu=i+1}^{j} C_\mu)^{-1}$, а также учитывая порядок умножения (2.9)$_{1)}$, получаем $\tilde{P}_i \cdot C_i + E + \tilde{z}_{i+1} \cdot C_{i+1}^{-1} = \mathbb{O}$ для всех $1 \le i \le m$.

Теперь, учитывая определения (3.9) для C_k в этих равенствах, приходим к тождеству, т.е. $\Lambda_{i+1} - \Lambda_{i+1} \equiv \mathbb{O}$, $1 \le i \le m$. Подставив (3.4) в (3.10)$_{3)}$ (при $j \le i$), имеем равенства

$$\tilde{z}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \cdot \prod_{\gamma=j+1}^{i+1} \beta_\gamma + E \cdot \mathcal{B}_{ii} \cdot \prod_{\gamma=j+1}^{i} \beta_\gamma + \tilde{P}_i \cdot \mathcal{B}_{i-1\,i-1} \cdot \prod_{\gamma=j+1}^{i-1} \beta_\gamma = \mathbb{O}, \quad 1 \le j < i \le m.$$

Воспользовавшись снова неособенностью $\prod_{\gamma=j+1}^{i} \beta_\gamma$ и порядком умножения (2.9)$_{2)}$, а также выполнив в последних равенствах умножение справа на $(\prod_{\gamma=j+1}^{i} \beta_\gamma)^{-1}$, получаем

$$\tilde{z}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \cdot \beta_{i+1} + E \cdot \mathcal{B}_{ii} + \tilde{P}_i \cdot \mathcal{B}_{i-1\,i-1} \cdot \beta_i^{-1} = \mathbb{O}, \quad \text{при всех } 1 < i \le m. \tag{3.15}$$

Чтобы показать, что равенства (3.15) являются тождествами, в (3.15) выражения для $\mathcal{B}_{i+1\,i+1}$ и $\mathcal{B}_{i-1\,i-1}$ следует записать через диагональные блоки $\mathcal{B}_{ii}$.

Итак, воспользовавшись представлениями для $\mathcal{B}_{ii}$ (3.8)$_{1)}$, получаем для первого слагаемого в (3.15) при любых $1 \le i \le m$

$$\tilde{z}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \cdot \beta_{i+1} \stackrel{(3.9)}{=\!=} -\tilde{z}_{i+1} \cdot [\Lambda_{i+2} + G_i - E]^{-1} (\tilde{P}_{i+1} \cdot \Lambda_{i+1}^{-1}) = -[\tilde{P}_{i+1}^{-1} (\Lambda_{i+2} - E) \tilde{z}_{i+1}^{-1}$$
$$+ \tilde{P}_{i+1}^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{z}_{i+1}^{-1}]^{-1} \stackrel{(3.8)_{2),3)}}{=\!=} -[-\Lambda_{i+1}^{-1} + (E - G_{i-1})^{-1}]^{-1} \Lambda_{i+1}^{-1} =$$
$$= -(E - G_{i-1}) \cdot (\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E)^{-1} = -(E - G_{i-1}) \cdot \mathcal{B}_{ii}, \quad 1 \le i \le m. \tag{3.16}$$

Аналогично для третьего слагаемого в (3.15) находим

$$\tilde{P}_i \cdot \mathcal{B}_{i-1\,i-1} \cdot \beta_i^{-1} = -G_{i-1} \cdot \mathcal{B}_{ii}, \quad \text{для всех } 1 \le i \le m. \tag{3.17}$$

Теперь, подставляя (3.16) и (3.17) в (3.15), получаем тождества, т.е. $\mathcal{B}_{ii} - \mathcal{B}_{ii} \equiv \mathbb{O}$ для всех $1 < i \le m$.

Таким образом проверили равенства (3.10)$_{3)}$ для **представления** 7. Далее проверим (3.10)$_{2)}$ для (3.4). Подставив (3.4) (при $i = j$) в (3.10)$_{2)}$, получим

$$\tilde{P}_i \cdot C_i \cdot \mathcal{B}_{ii} + E \cdot \mathcal{B}_{ii} + \tilde{z}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \cdot \beta_{i+1} = E, \quad 1 \le i \le m.$$

Отсюда, учитывая (3.16) и выражения для C_i (3.9), а также воспользовавшись определением для последовательностей $\{\Lambda, G\}$ и $\mathcal{B}_{ii}$ (3.8)$_{1)}$, приходим к тождеству

$$[\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E] \cdot [\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E]^{-1} \equiv E, \quad \text{для всех } 1 \le i \le m.$$

В итоге, мы проверили равенства (3.10) для **представления** 7. Проверим теперь систему равенств (3.11) для этого же **представления** 7.

Подставляя (3.4) в (3.11)$_{1)}$ при $1 \le i < j \le m$, имеем

$$\prod_{\mu=i+1}^{j+1} C_\mu \cdot \mathcal{B}_{j+1\,j+1} \cdot \tilde{P}_{j+1} + \prod_{\mu=i+1}^{j} C_\mu \cdot \mathcal{B}_{jj} \cdot E + \prod_{\mu=i+1}^{j-1} C_\mu \cdot \mathcal{B}_{j-1\,j-1} \cdot \tilde{z}_j = \mathbb{O}, \quad 1 \le i < j \le m.$$

Отсюда в силу неособенности $\prod_{\mu=i+1}^{j} C_\mu$ получаем

$$C_{j+1} \cdot \mathcal{B}_{j+1\,j+1} \cdot \tilde{P}_{j+1} + \mathcal{B}_{jj} \cdot E + C_j^{-1} \cdot \mathcal{B}_{j-1\,j-1} \cdot \tilde{z}_j = \mathbb{O} \quad \text{при всех } 1 < j \le m. \tag{3.18}$$

Далее $C_{j+1} \cdot \mathcal{B}_{j+1\,j+1} \cdot \tilde{P}_{j+1}$ и $C_j^{-1} \cdot \mathcal{B}_{j-1\,j-1} \cdot \tilde{z}_j$ выразим через $\mathcal{B}_{ii}$. С учетом выражений (3.9) для C_j и (3.8)$_{1)}$ для $\mathcal{B}_{ii}$ (при любых $1 \le j \le m$) получим

$$C_{j+1} \cdot \mathcal{B}_{j+1\,j+1} \cdot \tilde{P}_{j+1} = -\Lambda_{j+1}^{-1} \cdot \tilde{z}_{j+1} \cdot (\Lambda_{j+2} + G_j - E)^{-1} \cdot \tilde{P}_{j+1} = -\Lambda_{j+1}^{-1} \cdot [\tilde{P}_{j+1}^{-1} \cdot (\Lambda_{j+2} - E) \cdot \tilde{z}_{j+1}^{-1} +$$
$$+ \tilde{P}_{j+1}^{-1} \cdot G_j \cdot \tilde{z}_{j+1}^{-1}]^{-1} \stackrel{(3.8)_{2),3)}}{=\!=} -\Lambda_{j+1}^{-1} \cdot [-\Lambda_{j+1}^{-1} + (E - G_{j-1})^{-1}]^{-1} =$$
$$= -(G_{j-1} - E + \Lambda_{j+1})^{-1} (E - G_{j-1}) = \mathcal{B}_{jj} \cdot (G_{j-1} - E), \quad 1 \le j \le m. \tag{3.19}$$

Аналогично находим

$$C_j^{-1} \cdot \mathcal{B}_{j-1\,j-1} \cdot \tilde{z}_j = -\mathcal{B}_{jj} \cdot C_{j-1}, \quad 1 \le j \le m. \tag{3.20}$$

Подставляя теперь (3.19) и (3.20) в (3.18), приходим к тождеству $\mathcal{B}_{jj} - \mathcal{B}_{jj} \equiv \mathbb{O}$ при всех $1 < j \le m$.

Далее проверим (3.11)$_{3)}$ (при $1 \le j < i \le m$). Подставляя (3.4) в (3.11)$_{3)}$, получим

$$\mathcal{B}_{ii} \cdot \prod_{\gamma=j}^{i} \beta_\gamma \cdot \tilde{z}_j + \mathcal{B}_{ii} \cdot \prod_{\gamma=j+1}^{i} \beta_\gamma \cdot E + \mathcal{B}_{ii} \cdot \prod_{\gamma=j+2}^{i} \beta_\gamma \cdot \tilde{P}_{j+1} = \mathbb{O}, \quad 1 \le j < i \le m.$$

Отсюда, учитывая неособенность $\mathcal{B}_{ii}$ и $\prod_{\gamma=j+1}^{i} \beta_\gamma$ и поступая аналогично, как поступили выше, получаем тождества

$$\Lambda_{j+1} - \Lambda_{j+1} \equiv \mathbb{O}, \quad \text{при всех } 1 \le j < m.$$

Подставив теперь (3.4) в (3.11)$_{2)}$, получаем

$$\mathcal{B}_{ii} \cdot \beta_i \cdot \tilde{z}_i + \mathcal{B}_{ii} \cdot E + C_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \cdot \tilde{P}_{i+1} = E, \quad 1 \le i \le m.$$

Отсюда, учитывая выражения (3.19) для $C_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \cdot \tilde{P}_{i+1}$, получаем тождества $[\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E]^{-1} \cdot [\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - E] \equiv E$ при всех $1 \le i \le m$. Итак, мы проверили системы равенств (3.10) и (3.11) для **представления** 7.

Аналогично тому, как поступили выше, проверим (3.10) и (3.11) для **представления** 8. Подставляя (3.5) в (3.10)$_{1)}$ при $(1 \le i < j \le m)$, имеем

$$\tilde{P}_i \cdot \mathcal{B}_{i-1\,i-1} \cdot \prod_{\gamma=i}^{j} \hat{\beta}_\gamma + E \cdot \mathcal{B}_{ii} \cdot \prod_{\gamma=i+1}^{j} \hat{\beta}_\gamma + \tilde{z}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \cdot \prod_{\gamma=i+2}^{j} \hat{\beta}_\gamma = \mathbb{O}, \quad 1 \le i < j \le m.$$

Отсюда, воспользовавшись неособенностью $\prod_{\gamma=i+1}^{j} \hat{\beta}_\gamma$, получаем

$$\tilde{P}_i \cdot \mathcal{B}_{i-1\,i-1} \cdot \hat{\beta}_i + E \cdot \mathcal{B}_{ii} + \tilde{z}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \cdot \hat{\beta}_{i+1}^{-1} = \mathbb{O}, \quad \text{при всех } 1 \le i < m. \tag{3.21}$$

Выразив $\mathcal{B}_{i-1\,i-1}$ и $\mathcal{B}_{i+1\,i+1}$ через $\mathcal{B}_{ii}$, для слагаемых (3.21) при любых $1 \le i \le m$ имеем

$$\tilde{P}_i \cdot \mathcal{B}_{i-1\,i-1} \hat{\beta}_i = (\Lambda_{i+1} - E) \cdot \mathcal{B}_{ii}^{\cdot}, \quad \text{для всех } 1 \le i \le m, \tag{3.22}$$

$$\tilde{z}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{i+1\,i+1} \hat{\beta}_{i+1}^{-1} = -\Lambda_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{ii}, \quad \text{для всех } 1 \le i \le m. \tag{3.23}$$

Подставив (3.22) и (3.23) в (3.21), получим $\mathcal{B}_{ii}^{\cdot} - \mathcal{B}_{ii} \equiv \mathcal{O},\ 1 \le i \le m.$

Далее, подставляя (3.5) в $(3.10)_{2)}$ при $(1 \le i = j \le m)$, имеем

$$\tilde{P}_i \cdot \mathcal{B}_{i-1\,i-1} \hat{\beta}_i + E \cdot \mathcal{B}_{ii}^{\cdot} + \tilde{z}_{i+1} \cdot \hat{c}_{i+1} \cdot \mathcal{B}_{ii}^{\cdot} = E, \quad 1 \le i \le m. \tag{3.24}$$

Учитывая (3.22) в (3.24), а также определения для $\hat{c}_{i+1}$ (3.9), имеем $\mathcal{B}_{ii}^{\cdot -1} \mathcal{B}_{ii}^{\cdot} \equiv E$ для любых $1 \le i \le m$.

Подставляя теперь (3.5) в $(3.10)_{3)}$ при $1 \le j < i \le m$, получим

$$\tilde{z}_{i+1} \cdot \prod_{\mu=j+1}^{i+1} \hat{c}_\mu \cdot \mathcal{B}_{jj}^{\cdot} + E \cdot \prod_{\mu=j+1}^{i} c_\mu \cdot \mathcal{B}_{jj}^{\cdot} + \tilde{P}_i \cdot \prod_{\mu=j+1}^{i-1} \hat{c}_\mu \cdot \mathcal{B}_{jj}^{\cdot} = \mathcal{O}, \quad 1 \le j < i \le m.$$

Отсюда в силу неособенности $\mathcal{B}_{jj}^{\cdot}$ и $\prod_{\mu=j+1}^{i} \hat{c}_\mu$ имеем

$$\tilde{z}_{i+1} \cdot \hat{c}_{i+1} + E + \tilde{P}_i \cdot \hat{c}_i^{-1} = \mathcal{O}, \quad \text{при всех } 1 < i \le m.$$

Теперь, учитывая $\hat{c}_i$ (3.9), приходим к тождеству $G_{i-1}^{\cdot} - G_{i-1} \equiv \mathcal{O}$.

В итоге проверили (3.10) для **представления** 8.

Аналогично тому, как поступили выше, проверяется система матричных равенств (3.11) для того же **представления** 8. Отметим, что при этой проверке получим дополнительно к равенствам (3.22) и (3.23) следующие равенства

$$\hat{C}_j \cdot \mathcal{B}_{j-1\,j-1} \cdot \tilde{z}_j = \mathcal{B}_{jj}^{\cdot} (\Lambda_{j+1} - E), \quad \text{при всех } 1 \le j \le m, \tag{3.25}$$

$$\hat{C}_{j+1}^{-1} \cdot \mathcal{B}_{j+1\,j+1} \tilde{P}_{j+1} = -\mathcal{B}_{jj}^{\cdot} \cdot \Lambda_{j+1}, \quad \text{при всех } 1 \le j \le m. \tag{3.26}$$

Таким образом закончили проверку равенств $\mathcal{C} \cdot \mathcal{B} = E = \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$ для представлений 7 и 8 и тем самым показали их справедливость. Чтобы завершить доказательство теоремы 6, нам осталось показать также справедливость **представлений** 9 и 10. Для этого покажем, что имеет место следующая лемма.

<u>Лемма 4</u>. Если $\mathcal{B}_{ii}$ – неособенные квазидиагональные блоки матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$, то для $\mathcal{B}_{ii}^{\cdot}$ и структурных последовательностей из матриц $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$ (3.9) справедливы следующие "коммутационные" соотношения:

$$\begin{cases} \prod_{\gamma=i+1}^{j} c_\gamma \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{\cdot} = \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} \cdot \prod_{\gamma=i+1}^{j} \hat{\beta}_\gamma, & \text{для любых } 1 \le i < j \le m, \\ \prod_{\gamma=j+1}^{i} \hat{c}_\gamma \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{jj}^{\cdot} = \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} \cdot \prod_{\gamma=j+1}^{i} \beta_\gamma, & \text{для любых } 1 \le j < i \le m, \end{cases} \tag{3.27}$$

а также

$$(E - G_{i-1}) \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} \cdot \Lambda_{i+1} = \Lambda_{i+1} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} \cdot (E - G_{i-1}), \tag{3.27'}$$

$$G_{i-1} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} (E - \Lambda_{i+1}) = (E - \Lambda_{i+1}) \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} \cdot G_{i-1}, \quad \text{для всех } 1 \le i \le m.$$

<u>Доказательство</u> соотношения (3.27) выполним методом полной математической индукции, при этом воспользуемся полученными выше матричными равенствами (3.16), (3.17), (3.20), (3.19) и (3.22), (3.25), (3.26). Чтобы в указанных равенствах не доопределять $\{\tilde{P}_1, \tilde{z}_1; \tilde{P}_{m+1}, \tilde{z}_{m+1};$ $\tilde{\mathcal{B}}_{00}$ и $\tilde{\mathcal{B}}_{m+1\,m+1}\}$, положим в них $i = j$ и, воспользовавшись (на основе (3.8)) граничными условиями $\tilde{\mathcal{B}}_{11} = G_0^{-1}$ и $\tilde{\mathcal{B}}_{mm} = \Lambda_{m+1}^{-1}$, запишем вместо восьми из них только четырех в виде

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} = (G_i^{-1} \tilde{P}_{i+1})^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i+1\,i+1} \cdot (\tilde{P}_{i+1} \cdot \Lambda_{i+1}^{-1}), & 1 \le i \le m-1 \\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} = (G_{i-1}^{-1} \tilde{P}_i) \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i-1\,i-1} \cdot (\tilde{P}_i \cdot \Lambda_i^{-1})^{-1}, & 2 \le i \le m \\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} = (\Lambda_{i+1}^{-1} \cdot \tilde{z}_{i+1}) \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i+1\,i+1} \cdot (\tilde{z}_{i+1} G_i^{-1})^{-1}, & 1 \le i \le m-1 \\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} = (\Lambda_i^{-1} \tilde{z}_i)^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i-1\,i-1} \cdot (\tilde{z}_i \cdot G_{i-1}^{-1}), & 2 \le i \le m. \end{cases} \tag{3.28}$$

В силу взаимной обратимости процессов $(3.28)_{1)}$ и $(3.28)_{2)}$, а также процессов $(3.28)_{3)}$ и $(3.28)_{4)}$, оставляем в каждой паре из них только по одному и перепишем их в виде

$$\begin{cases} c_{i+1} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i+1\,i+1} = \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} \cdot \hat{\beta}_{i+1}, & \text{при всех } 1 \le i \le m-1, \\ \hat{c}_i \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i-1\,i-1} = \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} \cdot \beta_i, & \text{при всех } 2 \le i \le m. \end{cases} \tag{3.29}$$

Пусть в $(3.27)_{1)}$ $j = i+1$ и в $(3.27)_{2)}$ $j = i-1$. В этом случае коммутационные соотношения $(3.27)_{1)}$ представляют собой двойственные представления для элементов-блоков наддиагонали $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$, а $(3.27)_{2)}$ – для поддиагонали $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$ и совпадают с (3.29), т.е. равенства (3.29) есть на самом деле двойственные представления для над(под)диагональных элементов-блоков $\mathcal{B}$.

Проверим теперь, что коммутационные соотношения (3.27) верны для вторых над(под)диагоналей оператора $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$. Т.е. при $j = i+2$ и $j = i-2$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (c_{i+1} \cdot c_{i+2}) \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i+2\,i+2} &= \tilde{\mathcal{B}}_{ii}^{\cdot} \cdot (\hat{\beta}_{i+1} \cdot \hat{\beta}_{i+2}), \quad 1 \le i \le m-2, \\ (\hat{c}_i \cdot \hat{c}_{i-1}) \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i-2\,i-2} &= \tilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot (\beta_i \cdot \beta_{i-1}), \quad 3 \le i \le m. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Проверим сначала $(3.30)_{1)}$, воспользовавшись $(3.29)_{1)}$. Имеем $c_{i+1} (c_{i+2} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_{i+2\,i+2} - \tilde{\mathcal{B}}_{i+1\,i+1} \cdot \hat{\beta}_{i+2}) = \mathcal{O}$, поскольку здесь в скобках стоят фактически равенства $(3.29)_{1)}$, начиная со второго. Следовательно, равенства $(3.30)_{1)}$ справедливы для всех $1 \le i \le m-2$. Аналогично для второй поддиагонали $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$ из $(3.30)_{2)}$ с учетом $(3.29)_{2)}$ имеем $\hat{c}_i \cdot (\hat{c}_{i-1} \tilde{\mathcal{B}}_{i-2\,i-2} - \tilde{\mathcal{B}}_{i-1\,i-1} \beta_{i-1}) = \mathcal{O}$, поскольку здесь в скобках стоят равенства $(3.29)_{2)}$ для всех $3 \le i \le m$.

Следуя требованию метода полной математической индукции, предположим теперь, что равенства (3.27) имеют место для любой наддиагонали, начиная от первой до $(j-1)$, т.е. справедливы равенства

$$\prod_{z=i+1}^{k} c_z \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{kk} = \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod_{z=i+1}^{k} \hat{\beta}_z \quad , \quad \text{для всех } 1 \le i < k < j \le m, \qquad (3.31)$$

а также для любой поддиагонали, начиная от первой до $(j+2)$, т.е. справедливо равенство

$$\prod_{z=k+1}^{i} \hat{c}_z \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{kk} = \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \prod_{z=k+1}^{i} \beta_z \quad , \quad \text{для всех } 1 \le j < k < i \le m. \qquad (3.32)$$

Проверим теперь их справедливость при $k=j$ (для j - й наддиагонали и для $j+1$ - й поддиагонали $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$). В этом случае в соответствии с (3.27), а также учитывая порядок умножения (2.9) и (2.I2), имеем

$$(c_{i+1} \cdot c_{i+2} \cdots c_{j-1}) \cdot (c_j \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}) = (\widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \hat{\beta}_{i+1} \cdot \hat{\beta}_{i+2} \cdots \hat{\beta}_{j-1}) \cdot \hat{\beta}_j , \quad 1 \le i < j ,$$
$$(\hat{c}_i \cdot \hat{c}_{i-1} \cdots \hat{c}_{j+2}) \cdot (\hat{c}_{j+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}) = (\widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \beta_i \cdot \beta_{i-1} \cdots \beta_{j+2}) \cdot \beta_{j+1} , \quad 1 \le j < i .$$

Отсюда в силу справедливости (3.3I) при $k=j-1$ и (3.32) при $k=j+1$ получаем

$$\prod_{z=i+1}^{j-1} c_z \cdot (c_j \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}) = \prod_{z=i+1}^{j-1} c_z \cdot (\widetilde{\mathcal{B}}_{j-1\,j-1} \cdot \hat{\beta}_j) , \quad 1 \le i < j ,$$
$$\prod_{z=j+2}^{i} \hat{c}_z \cdot (\hat{c}_{j+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}) = \prod_{z=j+2}^{i} \hat{c}_z \cdot (\widetilde{\mathcal{B}}_{j+1\,j+1} \cdot \beta_{j+1}), \quad 1 \le j < i .$$

Теперь в последних равенствах снова, воспользовавшись равенствами $(3.29)_{I)}$ для всех $2 \le j \le m$, а также $(3.29)_{2)}$ для всех $1 \le j \le m-1$, окончательно имеем

$$\prod_{z=i+1}^{j-1} c_z \cdot (c_j \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj} - c_j \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}) = \mathcal{O} \quad , \qquad \text{для всех } 1 \le i < j,$$
$$\prod_{z=j+2}^{i} \hat{c}_z \cdot (\hat{c}_{j+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj} - \hat{c}_{j+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{jj}) = \mathcal{O} \quad , \qquad \text{для всех } 1 \le j < i .$$

Следовательно, показали справедливость $(3.27)_{I)}$ при $1 \le i < j$ и $(3.27)_{2)}$ при $1 \le j < i$. С учетом того, что i и j в (3.27) произвольные в указанных пределах, следовательно, доказали их справедливость. Покажем теперь справедливость коммутационных соотношений $(3.27)'$.

Равенства (3.28), воспользовавшись определениями (3.9) для $\{\beta, \hat{\beta}; c, \hat{c}\}$, запишем в виде

$$\begin{cases} \hat{c}_i \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{i-1\,i-1} \cdot \beta_i^{-1} = \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} = c_i^{-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{i-1\,i-1} \cdot \hat{\beta}_i , & 2 \le i \le m , \\ \hat{c}_{i+1}^{-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{i+1\,i+1} \cdot \beta_{i+1} = \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} = c_{i+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{i+1\,i+1} \cdot \hat{\beta}_{i+1}^{-1} , & 1 \le i \le m-1 . \end{cases} \qquad (3.33)$$

Если теперь во второй паре равенств $(3.33)_{2)}$ понизить индекс, а в первой паре равенств $(3.33)_{I)}$ повысить и затем в обе пары подставить вместо $\{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\}$ их выражения (3.9), а также учесть (3.8), то приходим к $(3.27)'$. С другой стороны, если воспользоваться определениями

(3.8) и при этом учесть неособенность $\widetilde{\mathcal{B}}_{kk}$, то имеем

$$[(E-G_{i-1}) \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \Lambda_{i+1} - \Lambda_{i+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot (E-G_{i-1})] = [(E-G_{i-1}-\Lambda_{i+1}+\Lambda_{i+1}) \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \Lambda_{i+1} -$$
$$- \Lambda_{i+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot (E-G_{i-1}-\Lambda_{i+1}+\Lambda_{i+1})] = [(-\widetilde{\mathcal{B}}_{ii}^{-1}+\Lambda_{i+1}) \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \Lambda_{i+1} -$$
$$- \Lambda_{i+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot (-\widetilde{\mathcal{B}}_{ii}^{-1}+\Lambda_{i+1})] = [(-\Lambda_{i+1}+\Lambda_{i+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \Lambda_{i+1}) - (-\Lambda_{i+1}+\Lambda_{i+1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot \Lambda_{i+1})] \equiv \mathcal{O},$$

для всех $1 \le i \le m$. Аналогично для $(3.27)'_{2)}$ имеем

$$[G_{i-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot (E-\Lambda_{i+1}) - (E-\Lambda_{i+1}) \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot G_{i-1}] = [G_{i-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot (E-\Lambda_{i+1}-G_{i-1}+G_{i-1}) -$$
$$-(E-\Lambda_{i+1}-G_{i-1}+G_{i-1}) \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot G_{i-1}] = [G_{i-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot (-\widetilde{\mathcal{B}}_{ii}^{-1}+G_{i-1}) - (-\widetilde{\mathcal{B}}_{ii}^{-1}+G_{i-1}) \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot G_{i+1}] =$$
$$= [(-G_{i-1}+G_{i-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot G_{i-1}) - (G_{i-1}+G_{i-1} \cdot \widetilde{\mathcal{B}}_{ii} \cdot G_{i-1})] \equiv \mathcal{O}, \quad \text{для всех } 1 \le i \le m.$$

Итак, лемма доказана. Вместе с этим закончили доказательство теоремы 6.

Замечание 3. Итак, справедливость **представлений** 9 и I0, вообще говоря, формально следует из единственности левого (правого) обратного оператора $\mathcal{C} \cdot \mathcal{B} = E = \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$. Однако мы дополнительно выполнили доказательство коммутационных соотношений (3.27), $(3.27)'$, с целью демонстрации техники индуктивного доказательства, которая дает способ конструктивного использования коммутационных соотношений (3.27), $(3.27)'$ в дальнейших исследованиях. Отметим также, что полученные выше коммутационные соотношения (особенно $(3.27)'$) проявились как следствие проверки обоих равенств $\mathcal{C} \cdot \mathcal{B} = E$ и $\mathcal{B} \cdot \mathcal{C} = E$.

Заключение

Получены обобщения результатов [2,3] на случай квазитрехдиагональных матриц (с квадратными блоками), все главные угловые квазиминоры которых отличны от нуля. При этом построены:

I°. Неприводимые множества факторизованных **представлений** I(~2) и 3(~4) для самого оператора $\mathcal{C}$ (I.I), а также **представлений** I,3,4 и 2,5,6 для обратного оператора $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$.

2°. Множество факторизованных единственных **представлений** 7,8,9, I0 для обратных операторов $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$, диагональные блоки $\mathcal{B}_{ii}$ которых вычисляются на основе единственного аддитивного представления, в случае всех неособенных квадратных блоков у $\mathcal{C}$ (I.I).

3°. Различные типы (2.I3), (3.27) и $(3.27)'$ коммутационных соотношений для структурных последовательностей матриц, определяющих вид представления $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}$.

Авторы признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н.Н.Говоруну за интерес к настоящей серии работ и предоставленную возможность работать над ней.

Литература

I. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-85-489, Дубна, 1985.
2. Emelyanenko G.A. JINR, E11-83-71, Dubna, 1983.
3. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, PII-86-504, Дубна, 1986.
4. Емельяненко Г.А., ОИЯИ, PII-85-304, PII-85-488, Дубна, 1985.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Наука, М., 1978.
6. Rizvi S.A.H. Inverses of quasitridiagonal matrices. Linear Algebra and Appl. , 56, p. 177-184, 1984.
7. Mattheij R.M.M. The stability of L.U-decompositions of block tridiagonal matrices. Bull. Austral. Math. Soc. , 1984, 29, No2, 177-205.
8. Соколовская Е.И. Методы решения блочно-трехдиагональных систем, экономящие память. "Прикл. мат. и мат. обеспечения ЭВМ". М., 1985, с. 31-33.
9. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, PII-86-531, Дубна, 1986.
IO. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, М., 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июля 1987 года.

Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. P11-87-524
О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трехдиагональными ленточными и квазитрехдиагональными матрицами. Факторизации и свойства квазитрехдиагональных /им обратных/ матриц с квадратными блоками

Изучаются различные типы факторизаций квазитрехдиагональных /им обратных/ операторов /матриц/ с квадратными элементами-блоками в случае всех отличных от нуля главных угловых квазиминоров. Получены различные множества представлений как для самих операторов, так и им обратных, а также различные типы коммутационных соотношений для структурных последовательностей операторов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Emelyanenko G.A., Rakhmonov T.T. P11-87-524
On the properties of Systems of Linear Equations with Non-Singular Tridiagonal, Band and Quasitridiagonal Matrices. Factorisations and the Properties of Quasitridiagonal /Inverse to Them/ Matrices with Square Blocks

Different types of factorisations of the quasitridiagonal /inverse to them/ operators /matrices/ with the square elements-blocks in the case of all nonzero main quasiminors are investigated. Different properties of the operators themselves and them inverse, as well as different types of commutation expressions for the structure iterative operators are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987