87-501

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-87-501

Е.П.Жидков, Г.Е.Мазуркевич, Б.Н.Хоромский

К ТЕОРИИ КОМБИНИРОВАННЫХ МЕТОДОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ

1987

Экономичные численные алгоритмы решения краевых задач магнитостатики в неограниченной двух- или трехмерной области могут быть построены на основе комбинированных методов [1-5], сочетающих дифференциальные уравнения /для векторного либо скалярного потенциала/ и граничные интегральные уравнения /ГИУ/. Обоснование сходимости итерационных процессов метода разделения для неограниченной области /в случае кусочно-постоянных коэффициентов/ решения комбинированных систем уравнений приводится в [4,6]. Эффективная программная реализация метода для пространственных задач основана на использовании ГИУ на специальных поверхностях [7]. При исследовании методов разделения области удобным аппаратом являются операторы Пуанкаре-Стеклова, которые в линейном случае /для ограниченной области/ подробно изучены в [8,9], а обобщение для квазилинейных эллиптических операторов рассмотрено в [10].

В настоящей работе рассматриваются вопросы обоснования комбинированных методов в нелинейных задачах магнитостатики. Основное внимание уделено пространственным задачам. Построен аналог операторов Пуанкаре-Стеклова для неограниченной области и установлена его связь с соответствующим нелинейным оператором для внутренней краевой задачи. На основе свойств операторов Пуанкаре-Стеклова установлено существование и единственность обобщенного решения /в пространствах Соболева нецелевого порядка/ краевой задачи в комбинированной постановке. Даны условия сходимости итерационных процессов метода декомпозиции неограниченной области с оператором перехода типа простой итерации и метода Ньютона. Свойство потенциальности нелинейного оператора для комбинированной постановки позволяет также использовать методы, основанные на минимизации функционалов. Мы приводим основные характеристики итерационного процесса решения нелинейной пространственной задачи с помощью модульного комплекса МОК 31, предназначенного для расчета на последовательности сеток пространственных задач магнитостатики комбинированным методом с использованием скалярного потенциала.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу вычисления пространственного распределения магнитного поля на основе стационарного уравнения Максвелла для изотропной среды с использованием двух скалярных потенциалов [11]. Пусть Ω_1 - ограниченная область с липшицевой границей Γ /соответствует нелинейной среде/, а Ω_2 - ее дополнение до R^3, то есть $\Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2 = R^3$. Требуется определить функции $u_i(x)$, $i = 1, 2$, из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w(u_1)) = 0, && x \in \Omega_1, \\
& -\Delta u_2 = f(x), && x \in \Omega_2, \\
& u_1 - u_2 = \phi(x), && x \in \Gamma, \\
& \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = \psi(x), && x \in \Gamma,
\end{aligned}
\qquad /1.1/
$$

$$u_2(\infty) = 0 \cdot (\text{например, } u_2(x) = O(|x|^{-3}),\ x \to \infty),$$

где $w(u) = \operatorname{grad} u$, Δ - оператор Лапласа, n_i, $i = 1, 2$, есть внешние по отношению к областям Ω_i нормали, а $\frac{\partial u_i}{\partial n_i}$ - конормальные производные, определенные выражением

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_i} \Rightarrow \sum_{j=1}^{3} a_j(x, w) \cos(x_j, n_i).$$

Заметим, что $a_j(x, w) = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ при $x \in \Omega_2$. Заданные функции ϕ, ψ и f подчиняются условиям

$$\int_\Gamma \phi \cdot g_0 \, dx = 0, \quad \int_\Gamma \psi \, dx = 0, \quad \int_\Omega f(x) \, dx = 0, \qquad /1.2/$$

где g_0 - плотность потенциала Робена на поверхности Γ, а $\Omega \in \Omega_2$ - ограниченная область, являющаяся носителем f.

Условие /1.2/ позволяет, не умаляя общности, положить $f = 0$, $\phi = 0$, что и предполагаем в дальнейшем. Функции a_i, $i = 1 \div 3$, заданы на множестве $\overline{\Omega_1} \times R^3$. Свойства гладкости всех функций из /1.1/ определим позднее.

Комбинированный метод решения системы /1.1/ состоит в следующем. Погружаем область Ω_1 в некоторую вспомогательную ограниченную область $\Omega_3 \supset \Omega_1$ с гладкой [13] границей Γ_3, сохраняя

уравнения /1.1/ внутри области Ω_3. На границе Γ_3 записываем краевое условие интегрального вида с помощью интегральных операторов K и L теории потенциала. Это краевое условие на функции u_2 и $\frac{\partial u_2}{\partial n}$ эквивалентно /при условии регулярности/ равенству $u_2(\infty) = 0$. Напомним, что операторы K и L в пространстве R^3 определены формулами

$$
\begin{aligned}
& Ku = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\cos(r_{PM}, n_P)}{|r_{PM}|^2} u(P) \, d\sigma_P, \\
& L \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |r_{PM}|^{-1} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) \, d\sigma_P,
\end{aligned}
\qquad /1.3/
$$

где Γ_0 - некоторая поверхность Ляпунова, $|r_{PM}|$ - евклидова норма вектора r_{PM}, соединяющего точки $M, P \in \Gamma_0$, а n_P - вектор внутренней нормали в точке P. Обозначим через E тождественный оператор.

Рассмотрим функционально-аналитическую формулировку краевой задачи в области Ω_3 для комбинированного метода. Определим функции $a_i(x, w)$, $i = 1 \div 3$, $w = (y_1, y_2, y_3)$ равенством

$$a_i(x, w) = \begin{cases} y_i, & x \in \Omega_3 \setminus \overline{\Omega_1} \equiv \Omega_0, \\ \mu(x, |y|) y_i, & x \in \Omega_1, \end{cases} \qquad /1.4/$$

где $|y| \equiv \left(\sum_{i=1}^{3} y_i^2\right)^{1/2}$. Рассмотрим краевую задачу

$$
\begin{aligned}
& E_\psi u \equiv -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) = 0, \\
& w = \operatorname{grad} u, \quad u \in D(E_\psi),
\end{aligned}
\qquad /1.5/
$$

с естественной областью определения [12] $M(E_\psi) = C^2(\overline{\Omega_1}) \cup C^2(\overline{\Omega_0})$ и областью определения

$$D(E_\psi) = \{ u \mid u \in M(E_\psi), [u]_\Gamma = 0; [\frac{\partial u}{\partial n_1}]_\Gamma = \psi(x); \alpha G_1 u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \xi(x), x \in \Gamma_3 \}. \qquad /1.6/$$

Здесь числа α, $\beta \ge 0$, а оператор G_1 симметрический и положительно определенный в $L_2(\Gamma_3)$, с областью определения $D(G_1) \subset L_2(\Gamma_3)$, $(\xi(x), g_0) = 0$ относительно скалярного произведения в L_2, знак $[\cdot]_\Gamma$ означает скачок следа /оператора Дирихле /13/, $u|_\Gamma = \gamma_0 u$) функции на границе Γ, либо скачок ее конормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$; свойства функции $\xi(x)$ зависят от типа задачи.

Отметим, что задаче магнитостатики /1.1/ соответствует область определения $D(E_\psi)$ при $\alpha = \beta = 1$, $\xi = 0$, $G_1 = L^{-1}(E + K)$, где K и L определены в /1.3/.

Рассмотрим далее вопросы однозначной решимости задачи /1.5/, /1.6/ и итерационные методы ее решения.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРА E_ψ

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения /1.5/, /1.6/, то есть полагаем $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $\xi = 0$, $G_1 = E$. Построим энергетическое расширение /12/ оператора E_ψ по формуле

$$A = T^* A_{0D} T, \qquad /2.1/$$

где оператор A действует из рефлексивного банахова пространства V в сопряженное V^*, T - непрерывный линейный оператор T: $V \to Y$ - банахово пространство; $A_{0D} : Y \to Y^*$ - нелинейный оператор; $T^*: Y^* \to V^*$ - сопряженный к T оператор, причем V плотно и непрерывно вложено в некоторое гильбертово пространство H; $D(E_\psi) \subset V$, $R(E_\psi) \subset H$ и для любого $u \in D(E_\psi)$ выполнено равенство $Au = E_\psi u$. Для этого наряду с пространствами $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(u,v) = \int_\Omega u \cdot v \, d\Omega$ используем пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$ с нормой

$$||u||^2_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(|\mathrm{grad}\, u|^2 + |u|^2\right) d\Omega \qquad /2.2/$$

и пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, являющееся пополнением по норме /2.2/ всех функций из $C^1(\bar\Omega)$, равных нулю на $\Gamma = \partial\Omega$. Определим также пространство $W^1_{2,g_0}(\Omega)$ как подпространство $W_2^1(\Omega)$ функций, след $\gamma_0 u$ которых ортогонален g_0 на $\Gamma = \partial\Omega$, то есть $(\gamma_0 u, g_0) = 0$. Кроме того, рассмотрим пространство Соболева порядка 1/2: $W_2^{1/2}(\Gamma_3)$ /13/, и сопряженное к нему пространство $W_2^{-1/2}(\Gamma_3) = (W_2^{1/2}(\Gamma_3))^*$, а также пространство $W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)$ функций $u \in W_2^{1/2}(\Gamma_3)$, ортогональных g_0 на Γ_3. В силу того, что $(g_0, 1) \ne 0$, можно считать, что $W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3) = (W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3))^*$ есть подпространство функций из $W_2^{-1/2}(\Gamma_3)$, ортогональных единице: $(u, 1) = 0$. Отношение двойственности между V и V^* будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Пусть $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$ (в случае гладкой границы Γ можно считать $\psi \in W_2^{-1/2}(\Gamma)$). Определим операторы и пространства:

$$V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_3),\quad H = L_2(\Omega_3),\quad Y = L_2(\Omega_3) \times L_2(\Omega_3) \times L_2(\Omega_3) \equiv L_2^{(3)}(\Omega_3),\quad Y = Y^*;$$

$$T: u \to \mathrm{grad}\, u,\quad T \in (V \to Y); \qquad /2.3/$$

$$A_{0D}: y \to \{a_1(x, y), a_2(x, y), a_3(x, y)\} - \bar g.$$

Для определения функционала $\bar g \in Y^*$ рассмотрим линейный функционал g на линейном множестве значений оператора $T: V \to Y$, определенный по формуле

$$g(Th) = \int_\Gamma \psi(s)\, \gamma_0 h(s)\, ds, \quad \forall h \in V, \qquad /2.4/$$

для $\psi \in L_2(\Gamma)$. В силу свойств оператора γ_0 /12/ функционал непрерывен на своей области определения. По теореме Хана-Банаха его можно продолжить по непрерывности до линейного функционала $\bar g$ на все пространство Y.

Лемма 1. Операторы и пространства /2.3/ определяют энергетическое расширение A_D вида /2.1/ оператора E_ψ из /1.5/, /1.6/ при $\beta = \xi = 0$, $\alpha = 1$, $G_1 = E$. Доказательство сводится к проверке свойств энергетического расширения /12/.

Для неоднородной задачи Дирихле энергетическое расширение получается при помощи представления $u = u_1 + \bar u$, где $u_1 \in W_2^1(\Omega_3)$ имеет заданный след $\gamma_0 u$ на Γ_3, а функция $\bar u$ удовлетворяет однородным краевым условиям.

Рассмотрим задачу /1.5/ с краевым условием Неймана. Область $D(E_\psi)$ определяется из /1.6/ при $\alpha = 0$, $\beta = 1$, причем $\xi(x) \in W_2^{-1/2}(\Gamma_3)$, $(\xi(x), 1) = 0$, то есть $\xi(x) \in W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3)$. Положим

$$V = W^1_{2,g_0}(\Omega_3),\quad H = L_2(\Omega_3),\quad Y = L_2^{(3)}(\Omega_3);$$

$$T: u \to \mathrm{grad}\, u,\quad A_{0N} = A_{0D} - \bar g_N, \qquad /2.5/$$

где аналогично /2.4/ функционал $\bar g_N$ есть продолжение согласно теореме Хана-Банаха на все $L_2^{(3)}(\Omega_3)$ линейного непрерывного функционала

$$g_N(Tv) = \int_{\Gamma_3} \xi(s) \cdot \gamma_0 v(s)\,ds, \quad v \in W^1_{2,g_0}(\Omega_3), \qquad /2.6/$$

определенного на области значений оператора T.

Лемма 2. Операторы и пространства /2.5/, /2.6/ определяют энергетическое расширение $A_N = T^* A_{0N} T$ оператора E_ψ для задачи Неймана.

Рассмотрим краевую задачу для комбинированной постановки, то есть при $\alpha = \beta = 1$, $\xi = 0$. Обозначим $X \equiv W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)$. По аналогии с оператором Дирихле γ_0 возьмем оператор следа с областью значений в X:

$$\gamma_{0,g_0} : W^1_{2,g_0}(\Omega_3) \to W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3), \qquad /2.7/$$

который так же, как и γ_0 /13/, является линейным непрерывным оператором. Пусть линейный оператор $G_1 \in \mathfrak{L}(X \to X^*)$ является самосопряженным и положительно определенным:

$$\langle G_1 u, u \rangle \geq m_{G_1} \|u\|^2_X, \quad u \in X, \quad m_{G_1} > 0. \qquad /2.8/$$

Область определения для комбинированной задачи выберем в виде

$$D_K(E_\psi) = D(E_\psi) \cap \{u \mid (u, g_0) = 0, \quad x \in \Gamma_3\}, \qquad /2.9/$$

рассмотрим следующие пространства и операторы:

$$V = \{u \mid u \in W^1_{2,g_0}(\Omega_3)\}, \ \|u\|^2 = \int_{\Omega_3} |\mathrm{grad}\, u|^2 + \int_{\Gamma_3} |\bar{u}|^2 d\sigma, \ \bar{u} = \gamma_{0,g_0} u,$$

$$H = L_2(\Omega_3), \ Y = L_2^{(3)}(\Omega_3) \times W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3), \quad Y^* = L_2^{(3)}(\Omega) \times X^*, \qquad /2.10/$$

$$T: u \to \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ \frac{\partial u}{\partial x_3}, \ \gamma_{0,g_0} u \right\},$$

$$A_{0K} : \{y, \phi\} \to \{a_1(x, y), \ldots, a_3(x, y), \ G_1 \phi\} - \bar{g}, \ \phi \in X.$$

Лемма 3. Пусть $G_1 \in \mathfrak{L}(X \to X^*)$ удовлетворяет /2.8/. Тогда операторы и пространства /2.10/ задают энергетическое расширение $A_K = T^* A_{0K} T$ оператора /1.5/, /1.6/, /2.9/.

Доказательство аналогично случаю смешанной краевой задачи[12].

3. СВОЙСТВА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ

Уточним свойства функции $\mu(x, |y|)$ из /1.4/. Пусть аналогично[12] выполнено свойство:

/А/ При каждом $\lambda \in [0, \infty)$ функция $x \to \mu(x, \lambda)$ измерима; для почти всех $x \in \Omega_1$ функция $\lambda \to \mu(x, \lambda)$ непрерывна; для всех $\lambda \in [0, \infty)$ и почти всех $x \in \Omega_1$ имеем $|\mu(x, \lambda)| \leq M = \mathrm{const}$.

Лемма 4. Если выполнено свойство /А/, то операторы Немыцкого A_{0D}, A_{0N}, A_{0K} деминепрерывны, как операторы из Y в Y^*.

Напомним, что операторное уравнение

$$Au = 0 \qquad /3.1/$$

называется[12] функционально-аналитической /или обобщенной/ формулировкой краевой задачи /1.5/, /1.6/, если A является энергетическим расширением оператора E_ψ.

Функциональные свойства операторов A_{0J}, A_J, $J = D, N, K$ можно связать со следующими свойствами функции $\mu(x, |y|)$ /где $x \in \Omega_1$; $t, r \in [0, \infty)$/:

$$\mu(x, t) \geq m_1 > 0, \qquad /3.2/$$

$$\mu(x, t) \cdot t - \mu(x, r) \cdot r \geq m_1 (t - r), \ t \geq r, \ m > 0, \qquad /3.3/$$

$$|\mu(x, t) t - \mu(x, r) r| \leq M\, |t - r|. \qquad /3.4/$$

Функция $t \to \mu(x, t) \cdot t$ непрерывно дифференцируема, причем

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (\mu(x, t) \cdot t) \right| \leq M, \ t \in [0; \infty), \qquad /3.5/$$

почти для всех $x \in \Omega_1$.

Анализ операторов A_{0J}, A_J, $J = D, N$ проводится аналогично[12] с учетом свойств функционала $\bar{g}$. При рассмотрении A_{0K}, A_K учитываем также симметрию, положительную определенность и липшиц-непрерывность оператора G_1. Условимся, что операторы A_0, A определены для каждого из индексов $J = D, N, K$.

Теорема 1. а/ Если выполнено /3.2/, то операторы A_0, A коэрцитивны с функцией $\gamma(s) = (m_1 + m_{G_1}) \cdot s$, а если функция $t \to \mu(x, t) \cdot t$ строго возрастает, то A_0, A строго монотонны.

б/ При выполнении условия /3.3/ операторы A_0, A сильно монотонны.

в/ Из свойства /3.4/ следует липшиц-непрерывность операторов A_0, A, причем

$$\| A_0 y - A_0 z \|_{Y^*} \le (3M + M_{G_1}) \| y - z \|_Y ,$$

где M_{G_1} - константа Липшица для оператора G_1.

г/ При выполнении условия /3.5/ операторы A_0, A дифференцируемы по Гато с оценкой

$$(A_0'(u)v, v) \le (M + M_{G_1}) \| v \|_Y^2 .$$

д/ Если функция $\{r, t\} \to (A_0'(t + ry + tx)x, y)$ непрерывна на $[0, 1] \times [0,1]$, то производные Гато $A_0'(u)$, $A'(u)$ симметричны.

е/ Операторы A_0, A потенциальны. Потенциал для A_0 имеет вид (для $J = D, N$)

$$F_0(y) = F_0(0) + \int_{\Omega_3} \left(\int_0^{|y(x)|} \mu(x, t) t\, dt \right) d\Omega_3, \qquad /3.6/$$

а при $J = K$ к нему добавляется еще одно слагаемое:

$$F_0(y, \phi) = F_0(y) + \frac{1}{2} \langle G_1 \phi, \phi \rangle . \qquad /3.7/$$

Замечание 1. Для монотонных операторов $A \in (V \to V^*)$ из деминепрерывности следует радиальная непрерывность[12].

На основании лемм 1-4, теоремы 1 и результатов об однозначной разрешимости нелинейных операторных уравнений[12] справедлива

Теорема 2. Пусть оператор $G_1 \in \mathcal{L}(W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3) \to W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3))$ симметричен и положительно определен, а функция $\mu(x, t)$ такова, что операторы A_{0J} /а следовательно, и A_J/, $J = D, N, K$ радиально непрерывны, коэрцитивны и строго монотонны. Тогда краевая задача /1.5/, /1.6/ с условиями Дирихле, Неймана или комбинированными имеет единственное обобщенное решение $u \in V$ в смысле равенства /3.1/ в пространстве V^*.

Напомним, что в обобщенной формулировке достаточно потребовать $\psi(x) \in W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma)$, $\xi(x)$ принадлежит одному из пространств X или X^*.

Далее установим, во-первых, что оператор $G_1 = L^{-1}(E + K)$ удовлетворяет требованиям теоремы 2 и, следовательно, результаты справедливы для задачи магнитостатики в комбинированной постановке. Во-вторых, рассмотрим некоторые итерационные процессы решения комбинированной системы уравнений, использующие нелинейные операторы Пуанкаре-Стеклова. При этом методы, основанные на разделении области, дают возможность оптимизировать количество вычислений векторов вида $G_1 u$ или $G_1^{-1} v$, сводящихся после дискретизации к обращению плотных матриц большой размерности.

4. ОПЕРАТОРЫ ПУАНКАРЕ-СТЕКЛОВА ДЛЯ ЗАДАЧ /1.5/, /1.6/

Рассмотрим оператор следа /оператор Дирихле/ γ_{0,g_0} /2.7/ для определенной ранее пары пространств Соболева. Согласно[13] и свойству $(g_0, 1) \ne 0$ этот оператор сюрьективен и существует линейный непрерывный обратный оператор

$$\gamma^{-1}_{0,g_0} : W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3) \to W^1_{2,g_0}(\Omega_3),$$
$$\| \gamma_{0,g_0} u \|_{W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)} \le C_1 \| u \|_{W^1_{2,g_0}(\Omega_3)} . \qquad /4.1/$$

Оператор γ_{0,g_0} есть сужение оператора Дирихле γ_0 на подпространство $W^1_{2,g_0}(\Omega_3)$.

Рассмотрим краевую задачу Неймана /1.5/, /1.6/ в обобщенной формулировке: найти функцию $u \in W^1_{2,g_0}(\Omega_3)$, удовлетворяющую для любых $\eta \in W^1_{2,g_0}(\Omega_3)$ интегральному тождеству

$$(T^* A_{0D} T u, \eta) \equiv \int_{\Omega_3} \sum_{i=1}^{3} a_i(x; w) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} d\Omega_3 - \int_{\Gamma} \psi \gamma_0 \eta\, ds = \langle g, \gamma_{0 g_0} \eta \rangle , \qquad /4.2/$$

где $g(x) \in W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3)$, а функции $a_i(x, w)$ определены в /1.4/, $w = \operatorname{grad} u$.

При условиях теоремы 2 существует единственное обобщенное решение уравнения /4.2/, для которого существует единственный след $\gamma_{0,g_0} u \in W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)$. Далее, аналогично[10], можно определить нелинейный оператор $S \in (W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3) \to W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3))$, сопоставляющий каждой функции $g \in W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3)$ функцию $\gamma_{0,g_0} u$, такую, что справедливо равенство

$$\langle S(g), \eta \rangle = \langle \gamma_{0,g_0} u; \eta \rangle \qquad /4.3/$$

для всех $\eta \in W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3)$. Оператор S также называем нелинейным оператором Пуанкаре-Стеклова, по аналогии с линейным случаем, который подробно изучен в [8,9]. При анализе оператора S из /4.3/ используем подход, аналогичный применяемому в [10].

Теорема 3. При выполнении условий /3.3/, /3.4/ оператор S сильно монотонен, непрерывен и обладает обратным S^{-1}, который является липшиц-непрерывным и сильно монотонным, $S^{-1} \in (X \to X^*)$.

При сформулированных условиях можно применить следующую теорему из [12]:

Теорема 4. Пусть Φ: $V \to V^*$ - радиально непрерывен и сильно монотонен. Тогда существует обратный $\Phi^{-1}: V^* \to V$ - липшиц-непрерывный. Если Φ - липшиц-непрерывен, то Φ^{-1} сильно монотонен.

В силу теоремы 4 существует оператор A_D^{-1}, который сильно монотонен и непрерывен. Далее, в силу представления

$$(A_D u,\ \eta) = \langle g,\ \gamma_{0,g_0}\ \eta\rangle = \langle \gamma^*_{0,g_0}\ g,\ \eta\rangle,\quad \eta \in W^1_{2,g_0}(\Omega_3)$$

и его следствия

$$\langle Sg,\ \eta\rangle = \langle \gamma_{0,g_0}\ A_D^{-1}\ \gamma^*_{0,g_0}\ g,\ \eta\rangle,\ \eta \in W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3), \qquad /4.4/$$

учитывая, что оператор

$$\gamma^*_{0,g_0} : W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3) \to \operatorname{Ker} \gamma_{0,g_0}(W^1_{2,g_0})^{\perp} \subset (W^1_{2,g_0})^*$$

является линейным и непрерывным оператором [13], и используя свойство ограниченности оператора $(\gamma^*_{0,g_0})^{-1}$, можно получить

$$\langle Su - Sv,\ u - v\rangle \ \geq m_s \|u - v\|^2_{W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3)},\quad m_s > 0. \qquad /4.5/$$

В силу теоремы 4 также существует обратный оператор S^{-1}, который липшиц-непрерывен. Причем из равенства /4.4/ следует, что для всех $V \in W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)$

$$\langle S^{-1}u;\ v\rangle = \langle (\gamma^*_{0,g_0})^{-1} A_D \gamma^{-1}_{0,g_0}\ u,\ v\rangle =$$
$$= \langle A_{0D} T \gamma^{-1}_{0,g_0}\ u,\ T\gamma^{-1}_{0,g_0}\ v\rangle, \qquad /4.6/$$

откуда в силу свойств оператора γ_{0,g_0} получаем

$$\langle S^{-1}u - S^{-1}v,\ u - v\rangle \ \geq m_{S^{-1}} \|u - v\|^2_{W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)}, \qquad /4.7/$$

что и доказывает теорему 3.

Аналогично [10] устанавливается

Лемма 5. Если выполнено свойство /3.5/, то оператор S^{-1} дифференцируем по Гато и справедлива оценка

$$\langle (S^{-1})'(v)\,u, u\rangle \leq M_1 \|u\|^2_{W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)}. \qquad /4.8/$$

Если, кроме того, выполнены /3.3/, /3.4/ и функция $t \to \frac{\partial}{\partial t}\mu(x,t)t$ непрерывна при почти всех $x \in \Omega_1$, то оператор $R = (S^{-1})'$ положительно определен:

$$\langle R(v)\,u, u\rangle \geq M_0 \|u\|^2_{W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)}, \qquad /4.9/$$

и симметричен $\langle R(v)\,\nu, \eta\rangle = \langle \nu, R(v)\,\eta\rangle$, $\quad \nu, \eta \in W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)$.

Из пункта "e" теоремы 1 и представления /4.6/ следует

Лемма 6. Оператор S^{-1} потенциален с потенциалом

$$F(u) = F(0) + \int_{\Omega_3} \Big(\int_0^{|\operatorname{grad} v|} \mu(x,t)\,t\,dt\Big)\,d\Omega_3,\quad \gamma_{0,g_0} v = u. \qquad /4.10/$$

При доказательстве используются леммы 4.1, 4.2, 4.4 из [12].

Установив свойства нелинейного оператора Пуанкаре-Стеклова для квазилинейного эллиптического оператора /1.5/, /1.6/, удовлетворяющего свойствам сильной монотонности и липшиц-непрерывности, рассмотрим интересующую нас задачу магнитостатики со смешанными краевыми условиями для оператора $G_1 = L^{-1}(E+K)$, определенного изначально на достаточно гладких функциях.

5. УРАВНЕНИЯ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТИ ДЛЯ КОМБИНИРОВАННОЙ ПОСТАНОВКИ

Рассмотрим линейный оператор Пуанкаре-Стеклова S_Δ для задачи /1.5/, /1.6/, получающейся из /4.3/, если положить $E_\psi = -\Delta$, $\psi = 0$, где Δ - оператор Лапласа в области Ω_3. Отметим, что операторы Пуанкаре-Стеклова для L-гармонических функций подробно изучены в [8]. Согласно результатам раздела 4, а также учитывая, что следующие пространства плотно вложены [13]:

$$W^{1/2}_2(\Gamma_3) \subset L_2(\Gamma_3) \subset W^{-1/2}_2(\Gamma_3), \qquad /5.1/$$

причем первое вложение компактно, можно сформулировать следующие свойства оператора S_Δ:

$$S_\Delta \in \mathfrak{L}(W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3) \to W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3)), \qquad /5.2/$$

S_Δ симметричен в $L_2(\Gamma_3)$, /5.3/

$$\langle S_\Delta u, u\rangle \geq m_\Delta \|u\|^2_{W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3)}, \qquad /5.4/$$

S_Δ - вполне непрерывен как оператор, действующий в $L_2(\Gamma_3)$. /5.5/

Обозначим подпространство $L_2(\Gamma_3)$ функций, ортогональных $u = 1$, через $L_{2,1}(\Gamma_3)$, а функций, ортогональных $u = g_0$, через $L_{2,g_0}(\Gamma_3)$. При этом согласно [14] $S_\Delta : L_{2,1}(\Gamma_3) \to L_{2,g_0}(\Gamma_3)$ и имеет представление на этом подпространстве:

$$S_\Delta = (E - K)^{-1} L, \qquad /5.6/$$

операторы K и L определены в разделе 1. В свою очередь существует оператор $S_\Delta^{-1} \in \mathfrak{L}(W^{1/2}_{2,g_0}(\Gamma_3) \to W^{-1/2}_{2,1}(\Gamma_3))$, обратный к S_Δ, который также является симметрическим и положительно определенным на X оператором.

Оператор S_Δ^{-1} на своей области определения $D(S_\Delta^{-1}) \subset L_{2,g_0}(\Gamma_3)$ имеет представление

$$S_\Delta^{-1} = L^{-1}(E - K). \qquad /5.7/$$

Определим в пространстве X^* новое скалярное произведение

$$(u, v)_\Delta = \langle S_\Delta u, v\rangle, \quad u, v \in X^*, \qquad /5.8/$$

которое в силу свойств /5.2/, /5.4/ оператора S_Δ определяет эквивалентную норму $\|u\|^2_\Delta = (u, u)_\Delta$ в пространстве X^*. Аналогично скалярное произведение

$$(u, v)_{\Delta^{-1}} = \langle S_\Delta^{-1} u, v\rangle, \quad u, v \in X, \qquad /5.9/$$

порождает норму $\|u\|^2_{\Delta^{-1}} = (u, u)_{\Delta^{-1}}$, эквивалентную норме пространства X. Более того, можно утверждать, что пространство X изоморфно пространству Фридрихса, порожденному оператором /5.7/, и совпадает по составу элементов с областью определения оператора $(L^{-1}(E - K))^{1/2}$. В результате справедлива

Лемма 7. Если в пространствах X и X^* определить нормы $\|u\|_{\Delta^{-1}}$ и $\|u\|_\Delta$ соответственно, то оператор $S_\Delta^{-1} : X \to X^*$ является дуализирующим отображением.

Интересно отметить, что оператор $-\Delta$ / Δ - оператор Лапласа/ является дуализирующим отображением $W^1_2(\Omega_3)$ в $W^{-1}_2(\Omega_3)$ [12], а следовательно, и дуализирующим отображением $W^1_{2,g_0}(\Omega_3)$ в $(W^1_{2,g_0}(\Omega_3))^*$.

Рассмотрим далее класс операторов $G \equiv G_1^{-1}$/используемых в условии /1.6//, удовлетворяющих следующим свойствам:

$$D(G^{-1}) = D(L^{-1}(E - K)), \qquad /5.10/$$

G^{-1} - симметричный и положительно определенный в $L_2(\Gamma_3)$, /5.11/

$$(Gv; g_0) = 0, \quad v \in L_{2,1}(\Gamma_3); \quad (G^{-1}u, 1) = 0; \ u \in L_{2,g_0}(\Gamma_3). \qquad /5.12/$$

Лемма 8. Оператор $G = (E + K)^{-1} L$, определенный на $L_2(\Gamma_3)$, удовлетворяет свойствам /5.10/-/5.12/.

Напомним, что положительно определенные, симметрические операторы в гильбертовом пространстве H /операторы A и B/ называются сходными [15], если

$$D(A) = D(B). \qquad /5.13/$$

Основные свойства [15,16] сходных операторов определяет

Теорема 5. Пусть обратный оператор B^{-1} вполне непрерывен в H. Если операторы A и B сходны, то сходны операторы A^α и B^α при всех $\alpha \in [0,1]$, причем операторы $A^\alpha B^{-\alpha}$ и $B^\alpha A^{-\alpha}$ ограничены в H.

Из теоремы 5 следует, в частности, что $D(A^{1/2}) = D(B^{1/2})$, а операторы AB^{-1} и BA^{-1} ограничены в H. Полагая в этой теореме $A = G^{-1}$, $B = L^{-1}(E - K)$, приходим к следующему утверждению:

Лемма 9. Пусть оператор G удовлетворяет условиям /5.10/-/5.12/. Тогда норма $\|v\|^2_G = \langle Gv, v\rangle$, $v \in X^*$ эквивалентна норме пространства X^*, норма $\|u\|^2_{G^{-1}} = \langle G^{-1}u, u\rangle$, $u \in X$ эквивалентна норме X. Оператор $J \equiv G^{-1}: X \to X^*$ является дуализирующим отображением этих пространств.

Комбинированной постановке задачи магнитостатики соответствует оператор $G = (E + K)^{-1} L$, для которого в силу леммы 8 справедливы выводы леммы 9. Оператор G является аналогом оператора Пуанкаре-Стеклова для лапласиана во внешней области. Теперь не составляет труда исследовать уравнение метода разделения области для задачи /1.5/, /1.6/ с указанным оператором G. Действительно, функционально-аналитическая формулировка /3.1/ для комбинированной системы уравнений, определяемая операторами и пространствами /2.10/, эквивалентна следующему операторному уравнению в пространстве X:

$$\Phi u_\Gamma \equiv S^{-1} u_\Gamma + G^{-1} u_\Gamma = 0, \quad u_\Gamma \in X, \qquad /5.14/$$

где S - определенный ранее нелинейный оператор Пуанкаре-Стеклова, $u_\Gamma = \gamma_{0,g_0} u$, u - решения задачи /3.1/. Тот факт, что элемент $u_\Gamma = \gamma_{0,g_0} u \in X$ является решением /5.14/, если $u \in W^1_{2,g_0}(\Omega_3)$ есть решение /3.1/, следует из определения оператора S^{-1}, для которого выполнено

$$(A_D u, \eta) = \langle S^{-1} \gamma_{0,g_0} u, \gamma_{0,g_0} \eta \rangle, \quad \forall \eta \in W^1_{2,g_0}(\Omega_3), \qquad /5.15/$$

и уравнения /3.1/, имеющего вид

$$(A_D u, \eta) + \langle G^{-1} \gamma_{0,g_0} u, \gamma_{0,g_0} \eta \rangle = 0, \ \forall \eta \in W^1_{2,g_0}(\Omega_3). \qquad /5.16/$$

С другой стороны, вычитая /5.15/ из равенства /5.14/, получим /5.16/.

Учитывая свойства S^{-1} и G^{-1}, заключаем, что оператор Φ из /5.14/ сильно монотонен и липшиц-непрерывен в X, и значит, согласно [12] уравнение $\Phi u = \gamma$ имеет единственное решение $u \in X$ при $\forall \gamma \in X^*$. Таким образом, попутно получаем независимое доказательство соответствующего результата теоремы 2.

Рассмотрим итерационные методы решения уравнения /5.14/. Выберем нормы в пространствах X и X* как $\|\cdot\|_{G^{-1}}$ и $\|\cdot\|_G$ соответственно. Эти нормы порождаются скалярными произведениями $(u,v)_{G^{-1}} = \langle G^{-1} u, v\rangle$ и $(u,v)_G = \langle Gu, v\rangle$. Пусть для всех $u, v \in X$ выполнено

$$\langle \Phi u - \Phi v, u - v\rangle \geq m_\Phi \|u-v\|^2_X, \quad m_\Phi > 0, \qquad /5.17/$$

$$\|\Phi u - \Phi v\|_{X^*} \leq M_\Phi \|u-v\|^2_X, \quad M_\Phi < \infty. \qquad /5.18/$$

Как следствие теоремы 3.4 из [12], справедлива

Теорема 6. При условиях /5.17/, /5.18/ метод простой итерации

$$J\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau}\right) = -\Phi u_n \qquad /5.19/$$

сходится при $\tau \in (0, 2m_\Phi M_\Phi^{-2})$ к единственному решению u уравнения /5.14/ со скоростью

$$\|u_n - u\|_X \leq \frac{[K(\tau)]^n}{1 - K(\tau)} \|\Phi u_0\|_{X^*},$$

где $J = G^{-1}$, $K(t) = (1 - 2m_\Phi t + M^2_\Phi t^2)^{1/2} < 1$.

Отметим, что аналогичный результат имеет место и при $J = S^{-1}_\Delta$. Оператор перехода метода /5.19/ имеет вид

$$u_{n+1} = Tu_n \equiv ((1-\tau)E - \tau G S^{-1}) u_n, \quad u_n \in X. \qquad /5.20/$$

Замечание 2. Поскольку оператор S^{-1} потенциален, а G^{-1} симметричен и положительно определен, то для решения уравнения /5.14/ применимы градиентные методы /например, методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов/ [10,12].

Рассмотрим методы ньютоновского типа. Для анализа глобальной сходимости используем непрерывный аналог метода Ньютона

$$\frac{du}{d\tau} = -[\Phi'(u(\tau))]^{-1} \Phi(u(\tau)), \quad u(0) = u_0, \qquad /5.21/$$

который сходится от произвольного начального приближения, если оператор $[\Phi']^{-1}$ равномерно ограничен [17]. Справедлива

Теорема 7. Пусть в условиях теоремы 3 и леммы 5 функция $t \to \frac{d}{dt}\mu(x,t)\,t$ дифференцируема по t при почти всех $x \in \Omega_1$ и $t \in [0, \infty)$. Тогда метод /5.21/ сходится к единственному решению $u \in X$ уравнения /5.14/ от произвольного начального приближения.

Доказательство следует из теоремы 2 работы [17]. Для локального уточнения решений целесообразно использовать метод Ньютона-Канторовича, сходимость которого также обеспечена условиями теоремы 7. Анализ модифицированного метода Ньютона-Канторовича проводится в рамках процесса /5.19/, где следует положить $J = \Phi'(u_{n_0})$.

Замечание 3. Анализ свойств уравнений /5.14/ и /3.1/, а также итерационных методов их решений, проводился без предварительной дискретизации этих уравнений. Естественно, что если дискретизованные уравнения с достаточной точностью сохраняют соответствующие свойства операторов S^{-1} и G^{-1}, то к таким системам применимы обсуждаемые здесь алгоритмы. Важно, что скорость сходимости итераций типа /5.19/ не зависит от шага дискретизации.

Замечание 4. Приведенные здесь результаты непосредственно переносятся на случай двумерных задач магнитостатики для (x, y) - или (r, z) -геометрии при использовании скалярного или векторного потенциала. Вопросы применения метода разделения ограниченной области для этих задач рассмотрены в [10].

Замечание 5. Если вычисление матрицы, аппроксимирующей оператор G^{-1} /или G/, не слишком трудоемко и ее можно хранить в оперативной памяти ЭВМ /например, для некоторых классов двумерных задач/, то исходные уравнения можно решать по сквозной схеме сразу для постановки /3.1/, соответствующей расширению /2.9/, /2.10/, не переходя к эквивалентному уравнению /5.14/. При этом можно использовать методы, сходимость которых гарантируется установленными свойствами оператора A из /3.1/ /например, метод SOR для случая "замороженных" коэффициентов в комбинированной постановке /18/ /.

Замечание 6. Требования на гладкость границ Γ и Γ_3 могут быть ослаблены /12, 19/ .

6. О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА

Результаты разделов 1-5 нашли применение при численном моделировании открытых магнитостатических систем с использованием скалярного потенциала. О практической эффективности итераций /5.19/ можно судить по результатам расчетов пространственного распределения поля дипольного магнита посредством модульного комплекса МОК 31. В задачи этой работы не входит подробный анализ этих расчетов, но хотелось бы остановиться на моментах, характеризующих непосредственно свойства итерационного процесса /5.20/. Его численная реализация осуществляется модульным комплексом программ МОК 31 на границе Γ_3 вспомогательной области Ω_3 специального вида - параллелепипед с квадратом в основании /7/ , и включает в себя следующие этапы:

I. Вычисление вектора $v = S^{-1} u_n$. Это эквивалентно решению нелинейной задачи в Ω_3: $E_\psi y = 0$; $y|_{\Gamma_3} = u_n$, где оператор E_ψ определяется в /1.4/-/1.6/, далее находим $v = \frac{\partial y}{\partial n}|_{\Gamma_3}$.

II. Вычисление вектора $u_{n+1/2} = Gv$. На этом этапе решается интегральное уравнение $(E + K)\, u_{n+1/2} = Lv$ на границе Γ_3 и находится вектор $u_{n+1/2} = (E + K)^{-1}\, Lv$ /7/ .

III. Релаксация $u_{n+1} = (1 - r)\, u_{n+1/2} + r u_n$ и возвращение на I этап.

Осуществляют эти этапы отдельные модули программного комплекса МОК 31. Основными модулями являются:

1/ программа QLEEN3; предназначенная для решения методом сеток задачи Дирихле в области Ω_3 для уравнения /1.4/-/1.6/ и последующего вычисления сеточного аналога оператора Пуанкаре-Стеклова S_h^{-1} ;

2/ программа BIESM3 /7/, осуществляющая экономичное решение ГИУ с оператором $(E + K)$ на поверхности Γ_3 и последующее вычисление вектора $G_h v$, где $G_h = (E + K_h)^{-1} L_h$ - сеточный аналог оператора G;

3/ программа IDSM3, реализующая итерационный процесс /5.19/ /с оператором перехода /5.20//, с возможной оптимизацией параметра r на грубой сетке;

4/ программа MGCM3, осуществляющая вычислительный процесс на последовательности сгущающихся сеток и при необходимости - экстраполяцию Ричардсона;

5/ программа HØFLDØ вычисления напряженности поля от токовых элементов и формирования функций ϕ и ψ из /1.1/ на заданных поверхностях.

Численные эксперименты с модульным комплексом МОК 31 показывают:

а/ слабую зависимость скорости сходимости итерационного процесса /5.19/ от магнитной проницаемости ферромагнетика, помещенного внутрь вспомогательной области. В табл.1 показано убывание погрешности по итерациям для линейного и нелинейного случаев и число итераций, необходимых для достижения относительной точности 10^{-3}. В нелинейном случае представлены расчеты для пяти значений тока в обмотках магнита;

Таблица 1

	μ =const	$\mu \neq$ const				
Ток	500	500	1000	1500	2000	25000
Сходимость по итерациям	0.9874	0.9975	0.9831	0.9845	0.9750	0.9843
	0.3358	0.3479	0.3544	0.2498	0.2805	0.2908
	0.0733	0.0844	0.0708	0.0926	0.0703	0.0885
	0.0245	0.0298	0.0301	0.0305	0.0207	0.0271
	0.0081	0.0093	0.0081	0.0094	0.0089	0.0091
	0.0029	0.0027	0.0035	0.0048	0.0025	0.0029
	0.0009	0.0008	0.0009	0.0009	0.0007	0.0009
Число итераций	7	7	7	7	7	7

б/ независимость скорости сходимости от шага дискретизации задачи. В табл.2 представлено число итераций, необходимых для достижения относительной точности 10^{-3}, для трех сгущающихся сеток с изменением числа узлов по каждому направлению в два раза /12, 12, 7/ → /23, 23, 13/ → /45, 45, 25/, при постоянной магнитной проницаемости.

Таблица 2

Сетка	/12, 12, 7/	/23, 23, 13/	/45, 45, 25/
Число итераций	7	8	8

Следует отметить, что дальнейшая оптимизация итерационного процесса /5.20/ возможна, если в качестве параметра релаксации брать не единственный скаляр r, а диагональную матрицу r_h: $\Gamma_{3,h} \to \Gamma_{3,h}$, определенную на сеточной границе вспомогательной области. При численной реализации итерационного процесса на поверхности параллелепипеда на каждой его грани можно брать свой параметр релаксации, который находится из численных экспериментов на самой грубой сетке и используется в расчетах на основной сетке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Bettes P. - Int. J. Num. Eng., 1977, 11, p.355-376.
2. Дайковский А.Г. и др. Препринт ИФВЭ, 80-81, Серпухов, 1981.
3. Айрян Э.А. и др. Сообщение ОИЯИ, Р11-82-871, Дубна, 1982.
4. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ, Р11-83-596, Дубна, 1983.
5. Friedman M.J., Colomas J.C. - IEEE Trns. on Mag., 1982, vol.18, No.2, p.336-339.
6. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Препринт № 137 ОВМ АН СССР, М., 1986.
7. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ, Р11-86-230, Р11-86-333, Дубна, 1986.
8. Агошков В.И., Лебедев В.И. - В кн.: Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1985, вып.2, с.173-227.
9. Лебедев В.И. Метод композиции. - Препринт ОВМ АН СССР, М., 1986.
10. Кузнецов С.Б. Препринт ВЦ СО АН СССР № 111, Новосибирск, 1984.

11. Дойников Н.И. Обзор ОБ - 8. Научно-исследовательский институт электрофизической аппаратуры, Ленинград, 1976.
12. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
13. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
14. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Препринт ОИЯИ, Р11-83-261, Дубна, 1983.
15. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
16. Heinz E. - Math.Aun., 1951, 123.
17. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Сообщение ОИЯИ, Р5-8244, Дубна, 1974.
18. Айрян Э.А. и др. Сообщение ОИЯИ, Р11-87-49, Дубна, 1987.
19. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июля 1987 года.

Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Р11-87-501

К теории комбинированных методов в нелинейных задачах магнитостатики

Для пространственных задач магнитостатики в неограниченной области рассмотрены комбинированные численные алгоритмы, основанные на объединении метода граничных интегральных уравнений с методами, использующими дифференциальную постановку. Приводятся условия однозначной разрешимости возникающих краевых задач для нелинейного случая в пространствах Соболева, а также результаты по сходимости альтернирующих итерационных процессов решения этих задач. Даны примеры численных расчетов, характеризующих основные свойства альтернирующих итерационных процессов в линейном и нелинейном случаях.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P., Mazurkevich G.E., Khoromskij B.N. P11-87-501

Some New Aspects in the Theory of Combined Methods on the Nonlinear Problems of Magnetostatics

For the three-dimensional problems of magnetostatics in the unbound region the numerical algorithms based on the combination of the boundary integral equation method and the methods using the differential formulation are considered. For arising nonlinear boundary problems the conditions for the existence of the unique solution in Sobolev's spaces are given. The results of numerical calculations describing the main characteristics of the iteration methods in linear and nonlinear cases are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987