

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P11-87-49

**Э.А. Айрян, Е.П. Жидков, Б.Н. Хоромский,
О.И. Юлдашев**

**АЛГОРИТМ УЧЕТА УСЛОВИЙ
НА БЕСКОНЕЧНОСТИ
В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ**

1987

где $\nu_k = \mu_k^{-1}$, μ_k - магнитная проницаемость среды, J_z - компонента плотности тока, C_0 - постоянная, зависящая от системы единиц, $(g)_k$ - предельное значение определенной в Ω_k функции g на границе этой области, $\partial/\partial n_k$ - производная по внешней нормали области Ω_k , $\Gamma_{k,k+1}$ - общая граница областей Ω_k и Ω_{k+1} , $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Будем считать, что μ_k - заданная в каждой среде функция. В общем случае $\mu_k = \mu(|\vec{E}|)$, \vec{E} - магнитная индукция, $\vec{E} = \text{rot } \vec{A}$.

Пусть $\nu_N = 1$. Предположим, что Ω_k , $k=1, 2, \dots, N-1$, - ограниченные области, область $\bigcup_{k=1}^{N-1} \bar{\Omega}_k$ содержится в Ω , так что $\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{k=1}^{N-1} \bar{\Omega}_k \neq \emptyset$, Γ_{k+1} - граница Ω , Γ - односвязная кривая, удовлетворяющая условиям Ляпунова [II], Ω^+ - область, содержащая бесконечно удаленную точку, $\Omega^+ = R^2 \setminus \Omega$. Тогда, учитывая (I.1) для Ω^+ и условие (I.3), функцию $A_z(x_0)$, $x_0 \in \Gamma$, можно представить в виде [II]:

$$A_z(x_0) = -K(A_z) - L\left(\frac{\partial}{\partial n} A_z\right), \quad (I.4)$$

где $Kv = \frac{1}{x} \int_{\Gamma} \ln|x_0 - x| ds_x$, $Lv = \frac{1}{x} \int_{\Gamma} v \ln|x_0 - x| ds_x$, n - внутренняя к Ω^+ нормаль.

Из формулы Грина, справедливой в Ω^+ в силу (I.3), следует условие

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} A_z ds = 0. \quad (I.5)$$

Учитывая (I.4), (I.5) и условия сопряжения на Γ , систему уравнений (I.1)-(I.3) для $u \equiv A_z$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \text{div}(\nu_1 \nabla u) = f, & x \in \Omega_1, \\ \text{div}(\nu_k \nabla u) = 0, & x \in \Omega_k, \quad k=2, \dots, N-1, \\ (u)_k = (u)_{k+1}, \quad (\nu_k \frac{\partial}{\partial n_k} u)_k = (\nu_{k+1} \frac{\partial}{\partial n_{k+1}} u)_{k+1}, \\ & x \in \Gamma_{k,k+1}, \quad k=1, 2, \dots, N-2, \\ (I+K)u + L\left(\frac{\partial}{\partial n} u\right) = 0, & x \in \Gamma, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} u ds = 0. \end{cases} \quad (I.6)$$

Таким образом, задача (I.1)-(I.3) сводится к краевой задаче (I.6), (I.7) в ограниченной области Ω с условиями, определенными в виде интегральных соотношений. Исследуем эту задачу в предположении линейности и гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений.

То есть предположим, что $\nu = \nu(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $\nu > \nu_0 > 0$, $x \in \bar{\Omega}$, f - кусочно-непрерывная функция. Через $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ обозначим область определения оператора

$$\mathcal{L}u \equiv -\text{div}(\nu(x) \nabla u). \quad \text{Пусть } \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), (I+K)u - L(\nu \frac{\partial}{\partial n} u) = 0, x \in \Gamma, \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial}{\partial n} u ds = 0.\}$$

Приведем некоторые свойства операторов K и L . Известно, что $K: L_2(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$, $I+K$ - имеет ограниченный обратный, $\text{Im}[\delta(K)] = 0$, $\delta(K) \in (-1, 1]$ [5, II, I2], где $\delta(K)$ - спектр K . Оператор $L: L_2(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$, $L > 0$ на множестве функций $(v, 1)_{\Gamma} = 0$, кроме того, на таких функциях уравнение

$$Lv = (I+K)g$$

имеет единственное решение при условии, что [5, I3]:

$$Lg_0 \neq 0, \quad (I.8)$$

где $g_0 = K^*g_0$, g_0 - потенциал Робена.

Отметим, что если задачу магнитостатики рассматривать в цилиндрической системе координат, то можно получить систему уравнений, аналогичную (I.6), (I.7) относительно θ -й компоненты векторного потенциала [I4]. При этом, если Γ_1 - кривая, удовлетворяющая условиям Ляпунова, в полуплоскости (z, z) , $z > 0$, то для $A_\theta(x_0)$, $x_0 \in \Gamma_1$ справедливо представление:

$$A_\theta(x_0) = + (K_1(A_\theta) + L_1(\frac{\partial}{\partial n}(z A_\theta))),$$

где $K_1 v \equiv \frac{1}{2x} \int_{\Gamma_1} v \frac{\partial}{\partial n_x} (z G(x_0, x)) ds_x$, $L_1 v \equiv \frac{1}{2x} \int_{\Gamma_1} v G(x_0, x) ds_x$,

$$G(x_0, x) = \int_0^{\cos \varphi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{R(x_0, x, \varphi)}, \quad R(x_0, x, \varphi) = [(z-z_0)^2 + z^2 + z_0^2 - 2z z_0 \cos \varphi]^{1/2}.$$

Можно показать, что операторы K_1 и L_1 обладают следующими свойствами: $K_1: L_2(\Gamma_1) \rightarrow C(\Gamma_1)$, $I+K_1$ имеет ограниченный обратный, $\text{Im}[\delta(K_1)] = 0$, $\delta(K_1) \in (-1, 1]$, $L_1: L_2(\Gamma_1) \rightarrow C(\Gamma_1)$. Кроме того, $(v, L_1 v)_{\Gamma_1} > 0$ на множестве функций, удовлетворяющих условию $(v, L_1 v)_{\Gamma_1} = 0$, где $g_1 = K_1^*g_1$.

Лемма I

Пусть выполняется (I.8) и $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, тогда оператор \mathcal{L} на таких функциях симметричен, $(\mathcal{L}u, u)_{\Omega} \geq 0$ и $(\mathcal{L}u, u)_{\Omega} = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Доказательство

Пусть $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Докажем, что $(\mathcal{L}u_1, u_2)_\Omega = (\mathcal{L}u_2, u_1)_\Omega$.
Имеем

$$(\mathcal{L}u_1, u_2)_\Omega = (\nabla \nabla u_1, \nabla u_2)_\Omega - (\nu \frac{\partial}{\partial n} u_1, u_2)_\Gamma.$$

Покажем, что $(\nu \frac{\partial}{\partial n} u_1, u_2)_\Gamma = (\nu \frac{\partial}{\partial n} u_2, u_1)_\Gamma$. Рассмотрим функцию $u^+(x_0)$, $x_0 \in \Omega^+$:

$$u^+(x_0) = \frac{-1}{2x} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} \ln|x_0 - x| u(x) ds_x - \frac{1}{2x} \int_\Gamma \ln|x_0 - x| \nu \frac{\partial u}{\partial n}(x) ds_x,$$

где $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. При $x_0 \rightarrow s, s \in \Gamma$, получим:

$$u^+(s) = -K(u) - L(\nu \frac{\partial}{\partial n} u), \quad (I.9)$$

т.е. предельные значения u^+ совпадают на Γ с u . Для функции u^+ справедливо также представление

$$u^+(s) = -K(u^+) - L(\frac{\partial}{\partial n} u^+), \quad (I.10)$$

где $\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} u^+ ds = 0$, в силу $u^+(x) = O(\frac{1}{|x|})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

В силу того, что $L \neq 0$, из (I.9), (I.10) можно однозначно определить $\nu \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} u^+$. Это означает, что

$$\begin{aligned} -(\nu \frac{\partial}{\partial n} u_1, u_2)_\Gamma &= -(\frac{\partial}{\partial n} u_1^+, u_2^+)_\Gamma = (\nabla u_1^+, \nabla u_2^+)_{\Omega^+} \\ &= -(\frac{\partial}{\partial n} u_2^+, u_1^+)_\Gamma = -(\nu \frac{\partial}{\partial n} u_2, u_1)_\Gamma. \end{aligned} \quad (I.11)$$

Из (I.11) видно, что если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, то функционал $-(u, \nu \frac{\partial}{\partial n} u)_\Gamma > 0$, поэтому

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, u)_\Omega &= (\nabla \nabla u, \nabla u)_\Omega - (u, \nu \frac{\partial u}{\partial n})_\Gamma > (\nabla \nabla u, \nabla u)_\Omega > \\ &> \nu_0 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Замечание I

Если выполняется условие $(u, 1)_\Omega = 0$, то $(\mathcal{L}u, u)_\Omega \geq c^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$, где c - не зависящая от u постоянная. Это следует из неравенства Пуанкаре [15]:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_2 (u, 1)_\Omega^2,$$

где c_1, c_2 - положительные постоянные, характеризующие размеры области Ω .

Замечание 2

Ясно, что утверждения леммы I относительно оператора \mathcal{L} переносятся на все функции из $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, которые можно продолжить гармонической в Ω^+ функцией, удовлетворяющей (I.3).

Условие (I.7) можно записать по-другому. С учетом свойств оператора $I + K$ (I.7) эквивалентно уравнению

$$u + M_1(\nu \frac{\partial}{\partial n} u) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (I.12)$$

где $M_1 = (I + K)^{-1} L$. При выполнении условий, обеспечивающих существование L^{-1} , (I.7) можно представить в виде

$$(\nu \frac{\partial}{\partial n} u) + M_2 u = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (I.13)$$

где $M_2 = L^{-1}(I + K)$. Тогда в силу положительности в $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ функционала $-(u, \nu \frac{\partial}{\partial n} u)_\Gamma$ будут положительными функционалы $(M_2 u, u)_\Gamma, (M_1(\nu \frac{\partial}{\partial n} u), \nu \frac{\partial}{\partial n} u)_\Gamma$.

§ 2. Численное решение системы (I.6), (I.7)

Поскольку в выборе контура Γ может быть некоторый произвол, зададим Γ в виде границы прямоугольника $\Omega = \{0 < x_k < l_k, k=1,2\}$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, для $k=1,2$ определим $\Gamma^{(k)} = \{x_m = 0; 0 \leq x_k \leq l_k, m=1,2, m \neq k\} \cup \{x_m = l_m; 0 \leq x_k \leq l_k, m=1,2, m \neq k\}$. Перейдем к дискретизации системы (I.6), (I.7). Построим прямоугольную сетку $\bar{\Omega}_h = \{x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_{h,1} \times \bar{\Omega}_{h,2}\}$, где для $k=1,2$, $\bar{\Omega}_{h,k} = \{x_k, i: x_{k,i} = (i-1) \cdot h_k, i=1,2, \dots, N_k; h_k = l_k / (N_k - 1)\}$, $\bar{\Omega}_h = \bar{\Omega}_{h,1} \cap \bar{\Omega}_{h,2}$. Для простоты будем предполагать, что области $\Omega_k, k=1,2, \dots, N-1$ составлены из прямоугольников и границы этих областей совпадают с линиями, проведенными через узлы сетки $\bar{\Omega}_h$. Пусть $\Gamma_h^{(k)} = \{x_m = 0; x_k \in \bar{\Omega}_{h,k}, m=1,2, m \neq k\} \cup \{x_m = l_m, x_k \in \bar{\Omega}_{h,k}, m=1,2, m \neq k\}, k=1,2$, тогда $\Gamma_h = \Gamma_h^{(1)} \cup \Gamma_h^{(2)}$. Приведем известные разностные аппроксимации дифференциальных уравнений в (I.6), полученные методом баланса [16]:

$$-\sum_{k=1}^2 (a_k(u_h) \cdot (u_h)_{\bar{x}_k})_{x_k} = g_h(x), \quad x \in \Omega_h, \quad (2.1)$$

где u_h - функция, определенная на $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma$,

$$\begin{aligned} a_k(y) &= h_k \cdot [\nu_2(\theta(y_{\bar{x}_1}^{(1)}, y_{\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_2}, y_{\bar{x}_2}^{(1)})) + \\ &+ \nu_2(\theta(y_{\bar{x}_k}^{(1)}, y_{\bar{x}_k}, y_{x_m}, y_{x_m}^{(1)}))], \end{aligned}$$

$k, m = 1, 2, k \neq m, l = 1, 2, \dots, N-1,$

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{1}{2} ((\xi_1 + \xi_2)^2 + (\xi_3 + \xi_4)^2)^{1/2},$$

$$g_h(x) = \int_{\Omega} \delta(x, x') f(x') dx', \quad x \in \Omega_h.$$

$$\delta(x, x') = \begin{cases} 1, & x \in \{ |x_k - x'_k| \leq \frac{1}{2} h_k, k=1, 2 \}, \\ 0, & x \notin \{ |x_k - x'_k| \leq \frac{1}{2} h_k, k=1, 2 \}. \end{cases}$$

Здесь мы использовали обозначения [16]:

$$y^{(\pm 1)} = y(x_1 \pm h_1, x_2), \quad y^{(\pm 2)} = y(x_1, x_2 \pm h_2),$$

$$y_{x_k} = \frac{1}{h_k} (y^{(+k)} - y), \quad y_{\bar{x}_k} = \frac{1}{h_k} (y - y^{(-k)}), \quad k=1, 2.$$

Построим аппроксимации для операторов K и L , используя кусочно-линейное приближение для интегрируемых функций. Через S_k , $k=1, 2, \dots, n$, $n=2(N_1+N_2-2)$, будем обозначать точки сетки Γ_h , пронумерованные последовательно при некотором обходе контура Γ , пусть $S_{h+1} = S_1$, s - натуральный параметр. Множество угловых точек обозначим через Γ_h^0 , $\Gamma_h' = \Gamma_h \setminus \Gamma_h^0$. В соответствии с (I.12), (I.13) рассмотрим два случая учета граничных условий. Определим K_h и L_h :

$$(K_h u_h)(x) = \sum_{s_k \in \Gamma_h} u_h(s_k) \frac{\alpha(x)}{\pi} \int_{\Gamma} \ln|x-s| \cdot \varphi_k(s) ds, \quad x \in \Gamma_h,$$

$$-(L_h v_h)(x) = \sum_{s_k \in \Gamma_h'} v_h(s_k) \frac{\alpha(x)}{\pi} \int_{\Gamma} \ln|x-s| \cdot \varphi_k(s) ds + \sum_{s_k \in \Gamma_h^0} \tilde{v}_h(s_k) \frac{\alpha(x)}{\pi} \int_{\Gamma} \ln|x-s| \cdot \varphi_k(s) ds, \quad x \in \Gamma_h,$$

где $\varphi_k(s)$ - кусочно-линейные базисные функции,

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma_h', \\ \frac{2}{3}, & x \in \Gamma_h^0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_h(s_k) &= \frac{2}{h_1 + h_2} \left(\int_{\Gamma^{(1)}} \tilde{v}_{h,1}(s_k) \cdot \varphi_k(s) ds + \int_{\Gamma^{(2)}} \tilde{v}_{h,2}(s_k) \cdot \varphi_k(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h_1 + h_2} (h_1 \cdot \tilde{v}_{h,1}(s_k) + h_2 \cdot \tilde{v}_{h,2}(s_k)), \end{aligned}$$

$\tilde{v}_{h,1}(s_k), \tilde{v}_{h,2}(s_k)$ - два предельных значения разрывной функции $\tilde{v}_h(s)$ в точке s_k .

Предполагая существование $(E + K_h)^{-1}$, можно определить $M_{1,h} = (E + K_h)^{-1} L_h$ и (I.12) аппроксимировать условием

$$u_h + M_{1,h} (D_h^q u_h) = 0, \quad x \in \Gamma_h, \quad (2.2)$$

где через $D_h^q u_h$ мы обозначили разностную производную по конормали, определенную по q значениям функции u_h .

Предполагая существование L_h^{-1} , определим $M_{2,h} = L_h^{-1} (E + K_h)$ и (I.13) аппроксимируем уравнением

$$D_h^q u_h + M_{2,h} u_h = 0, \quad x \in \Gamma_h. \quad (2.3)$$

Таким образом, системе уравнений (I.6), (I.7) можно поставить в соответствие разностную систему (2.1), (2.2) или (2.1), (2.3). Отметим, что некоторые свойства $E + K_h$ и L_h рассмотрены в [13, 17]. В частности, численные эксперименты на последовательности сгущающихся сеток для прямоугольника показывают, что $-1 < \text{Re}(\lambda(K_h)) \leq 1$, $|\text{Im}(\lambda(K_h))| = 0$, $0(h) \leq \text{Re}(\lambda(L_h)) \leq c$, $|\text{Im}(\lambda(L_h))| = 0$, где мы используем обозначения $\text{Re}(\lambda(B))$ - для реальной части собственного числа матрицы B , $\text{Im}(\lambda(B))$ - для мнимой части $\lambda(B)$, $h = \max(h_1, h_2)$, c - не зависящая от h постоянная.

Для решения систем (2.1), (2.2) и (2.1), (2.3) используем хорошо зарекомендовавший себя на практике [18, 19] итерационный процесс на последовательности сгущающихся сеток. При решении систем на каждой из сеток формулы итерационного переопределения неизвестных внутри Ω_h сохраняются, то есть для u_h , $x \in \Omega$ используется последовательная верхняя релаксация, а для пересчета коэффициентов v_l , $l=2, \dots, N-1$, - нижняя релаксация. Отличие методов решения (2.1), (2.2) и (2.1), (2.3) заключается только в итерационном переопределении неизвестных u_h на Γ_h . В первом случае используются формулы нижней релаксации, во втором - верхней.

Исследуем подробнее оба случая учета граничных условий в предположении линейности коэффициента ν : $\nu = \nu(x) \in C^1(\Omega)$, $\bar{\nu} \geq \nu \geq \nu_0 > 0$.

Пусть в (2.1) $a_1(x) = v(x_1 - \frac{1}{2}h_1, x_2)$, $a_2(x) = v(x_1, x_2 - \frac{1}{2}h_2)$.
Введем скалярные произведения:

$$(u, v)_{\Omega_h} = \sum_{x \in \Omega_h} u(x) \cdot v(x) \cdot h_1 \cdot h_2,$$

$$(u, v)_{\bar{\Omega}_h} = (u, v)_{\Omega_h} + \sum_{x \in \Gamma_h'} u(x) \cdot v(x) \cdot \frac{h_1 \cdot h_2}{2} + \sum_{x \in \Gamma_h^0} u(x) \cdot v(x) \cdot \frac{h_1 \cdot h_2}{4},$$

$$(u, v)_{\Gamma_h} = \sum_{x \in \Gamma_h'} u(x) \cdot v(x) \cdot \tau(x) + \sum_{x \in \Gamma_h^0} u(x) \cdot v(x) \cdot \frac{h_1 + h_2}{2},$$

$$\tau(x) = \begin{cases} h_1, & x \in \Gamma_h^{(1)}, \\ h_2, & x \in \Gamma_h^{(2)}. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала второй случай, когда граничное условие (I.I3) можно представить в виде (2.3). Определим разностный оператор:

$$\mathcal{L}_{h,2} u_h = \mathcal{L}_{h,2}^{(1)} u_h + \mathcal{L}_{h,2}^{(2)} u_h, \quad x \in \Gamma_h,$$

$$\mathcal{L}_{h,2}^{(k)} u_h = \begin{cases} -(a_k(u_h)_{\bar{x}_k})_{x_k}, & x_k \in \Omega_{h,k}, \\ -\frac{2}{h_k} (a_k^{(+k)}(u_h)_{x_k}), & x_k = 0, \\ \frac{2}{h_k} (a_k(u_h)_{\bar{x}_k}), & x_k = \ell_k, \quad k=1,2. \end{cases}$$

Тогда разностную систему уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{h,1} u_h = g_h(x), & x \in \Omega_h, \\ \mathcal{L}_{h,2} u_h + \frac{2}{\tau} M_{2,h} u_h = 0, & x \in \Gamma_h', \quad (1, D_n u_h)_{\Gamma_h} = 0, \\ \mathcal{L}_{h,2} u_h + 2(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}) M_{2,h} u_h = 0, & x \in \Gamma_h^0, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$\mathcal{L}_{h,1} u_h = - \sum_{k=1}^2 (a_k(u_h)_{\bar{x}_k})_{x_k},$$

$$D_n u_h = \begin{cases} -a_k^{(+k)}(u_h)_{x_k}, & x_k = 0, \quad x_m \in \bar{\Omega}_{h,m}, \\ a_k(u_h)_{\bar{x}_k}, & x_k = \ell_k, \quad x_m \in \bar{\Omega}_{h,m}, \quad k, m = 1, 2, \quad k \neq m, \end{cases}$$

$$\tau'(x) = \begin{cases} h_2, & x \in \Gamma_h^{(2)}, \\ h_1, & x \in \Gamma_h^{(1)}. \end{cases}$$

Пусть

$$A_{2,h} u_h = \begin{cases} \mathcal{L}_{h,1} u_h, & x \in \Omega_h \\ \mathcal{L}_{h,2} u_h + \frac{2}{\tau} M_{2,h} u_h, & x \in \Gamma_h', \\ \mathcal{L}_{h,2} u_h + 2(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}) M_{2,h} u_h, & x \in \Gamma_h^0. \end{cases}$$

Лемма 2

Если выполняется условие

$$(M_{2,h} u_h, u_h)_{\Gamma_h} \geq 0, \quad (2.5)$$

то $(A_{2,h} u_h, u_h)_{\bar{\Omega}_h} \geq 0$ и $(A_{2,h} u_h, u_h)_{\bar{\Omega}_h} = 0$ тогда и только тогда, когда $u_h = 0, x \in \bar{\Omega}_h$.

Доказательство

Рассмотрим $(A_{2,h} u_h, u_h)_{\bar{\Omega}_h}$. Имеем, используя формулу суммирования по частям [16]:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{h,1} u_h, u_h)_{\Omega_h} &= - \sum_{x \in \Omega_h} (a_1(u_h)_{\bar{x}_1})_{x_1} \cdot u_h \cdot h_1 \cdot h_2 - \sum_{x \in \Omega_h} (a_2(u_h)_{\bar{x}_2})_{x_2} \cdot u_h \cdot h_1 \cdot h_2 \\ &= \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} - (D_n u_h, u_h)_{\Gamma_h'} + (\tau \cdot v \cdot D_n u_h, D_n u_h)_{\Gamma_h'}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} (a_k^{(+k)})^{-1}, & x_k = 0, \quad x_m \in \Omega_{h,m}, \\ (a_k)^{-1}, & x_k = \ell_k, \quad x_m \in \Omega_{h,m}, \end{cases}$$

$$\varphi^{(k)} = \sum_{j=2}^{k-1} \varphi_j^{(k)} \cdot h_m, \quad \varphi_{i_m}^{(k)} = \sum_{i_x=2}^{k-2} (a_k(v_h)_{x_k}^2)(x_1, i_1, x_2, i_2) \cdot h_k,$$

для $k, m = 1, 2, k \neq m$. Так как $a_k(x) > 0, k = 1, 2, x \in \Omega_h$, то $\varphi^{(k)} > 0, k = 1, 2$. Кроме того, справедливо неравенство [16]:

$$(\mathcal{L}_{h,1} u_h, u_h)_{\Omega_h} + \sum_{x \in \Gamma_h'} (\mathcal{L}_{h,2} u_h)_{x_k} \cdot u_h \cdot \frac{h_1 \cdot h_2}{2} + \sum_{x \in \Gamma_h^0} (\mathcal{L}_{h,2} u_h)_{x_k} \cdot u_h \cdot \frac{h_1 \cdot h_2}{4} \geq 0, \quad (2.7)$$

откуда, учитывая (2.5), получим

$$(A_{2,h} u_h, u_h)_{\bar{\Omega}_h} \geq 0. \quad (2.8)$$

Заметим, что равенство нулю в (2.7) возможно только при $u_h = C$, $C = const$, но тогда из (2.4) получаем, что $u_h = 0$, $x \in \Gamma_h$ и, следовательно, $u_h = 0$, $x \in \Omega_h$. Поэтому $C = 0$ и в (2.7), (2.8) неравенства строгие. Лемма доказана.

Рассмотрим первый случай учета граничных условий, когда (I.I3) можно поставить в соответствие (2.2). Запишем разностную систему в виде

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{h,1} u_h = g_h(x), & x \in \Omega_h, \\ u_h + M_{1,h} (D_n u_h) = 0, & x \in \Gamma_h, \quad (1, D_n u_h)_{\Gamma_h} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Лемма 3

Пусть выполняется условие

$$(M_{1,h} v_h, v_h)_{\Gamma_h} \geq 0, \quad (2.10)$$

тогда система (2.9) имеет единственное решение.

Доказательство

Покажем, что однородная система, соответствующая (2.9), имеет только тривиальное решение. Заметим, что если $v_h = C = const$, $x \in \Omega_h$, и v_h удовлетворяет однородной системе, то $C = 0$. Предположим, что $v_h \neq 0$, $x \in \Omega_h$. Имеем, аналогично (2.6),

$$(\mathcal{L}_{h,1} v_h, v_h)_{\Omega_h} = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} - (D_n v_h, v_h)_{\Gamma_h} + (\tau \cdot \beta \cdot D_n v_h, D_n v_h)_{\Gamma_h} \quad (2.11)$$

Умножая второе уравнение однородной системы

$$v_h + M_{1,h} (D_n v_h) = 0, \quad x \in \Gamma_h',$$

скалярно на $D_n v_h$, получим, учитывая (2.10):

$$-(D_n v_h, v_h)_{\Gamma_h} = (M_{1,h} (D_n v_h), D_n v_h)_{\Gamma_h} \geq 0. \quad (2.12)$$

Таким образом, в (2.11) все слагаемые неотрицательны и равны нулю только в случае $v_h = C = 0$, $x \in \Omega_h$. Система (2.9) имеет единственное решение.

Замечание 3

Если выполняется (2.10) и функция $u_h \neq 0$, $x \in \Omega_h$, удовлетворяет граничным условиям из (2.9), то

$$(\mathcal{L}_{h,1} u_h, u_h)_{\Omega_h} > 0,$$

что следует из (2.11) и (2.12).

§ 3. Результаты численных экспериментов

В качестве методического примера рассматривалась следующая задача:

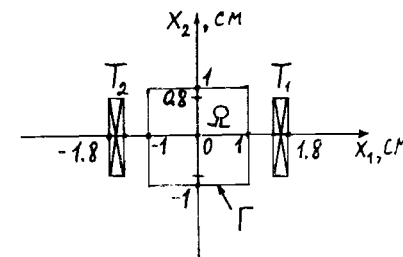
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u = u^+, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u^+}{\partial n}, & x \in \Gamma, \\ \Delta u^+ = f, & x \in \Omega^+, \quad u^+(\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 200, & x \in T_1, \\ -200, & x \in T_2, \\ 0, & x \notin T_1 \cup T_2, \end{cases}$$

а области Ω , T_1 и T_2 изображены на рис. I, $\Omega^+ = R^2 \setminus \bar{\Omega}$.

Точным решением задачи является функция



$$u_0 = \frac{200}{2\pi} \left(\int_{T_1} \ln|x-x'| dx' - \int_{T_2} \ln|x-x'| dx' \right)$$

В первом случае учета граничных условий получаем разностную схему:

$$\begin{cases} -y_{\bar{x}_1, x_1} - y_{\bar{x}_2, x_2} = 0, & x \in \Omega_h, \\ y + M_{1,h} (D_n^3 y) = F_2, & x \in \Gamma_h, \\ (1, D_n^3 y)_{\Gamma_h} = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

Рис. I. Конфигурация модельной задачи.

где $F_2(x) = ((E + K_h)^{-1} \bar{u}_0)(x)$, $\bar{u}_0(x) = 2 \cdot \alpha(x) \cdot u_0(x)$.

Во втором случае разностная схема имеет вид

$$\begin{cases} -y_{\bar{x}_1, x_1} - y_{\bar{x}_2, x_2} = 0, & x \in \Omega_h, \\ \mathcal{L}_{h,2} y + \frac{2}{\tau} M_{2,h} y = F_2, & x \in \Gamma_h', \quad (1, D_n^3 y)_{\Gamma_h} = 0, \\ \mathcal{L}_{h,2} y + 2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) M_{2,h} y = F_2, & x \in \Gamma_h^0, \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (L_h^{-1} \bar{u}_0)(x), & x \in \Gamma'_h, \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) (L_h^{-1} \bar{u}_0)(x), & x \in \Gamma_h^0. \end{cases}$$

Для решения (3.2) применялся треугольный метод неполной релаксации [20, 21] с параметром верхней релаксации ω для неизвестных внутри $\bar{\Omega}_h$ и параметром нижней релаксации γ для неизвестных на Γ_h . Для решения (3.3) применялся метод верхней релаксации с одним параметром ω для неизвестных внутри $\bar{\Omega}_h$ и другим для неизвестных на Γ_h .

В таблице I представлены результаты решения задач (3.2) и (3.3), использованы обозначения: h_1, h_2 - параметры сетки, K - число итераций на сетке $\bar{\Omega}_h$, $\epsilon_{\Gamma_h,1} = \max_{x \in \Gamma_h,1} |u_k - u_0|$, $\epsilon_{\Omega_h,1} = \max_{x \in \Omega_h,1} |u_k - u_0|$, сетка $\bar{\Omega}_{h,1}$ - первая в последовательности сгущающихся сеток. Итерационный процесс прерывался при выполнении условия

$$\|y^{n+1} - y^n\|_{C(\bar{\Omega}_h)} \leq 10^{-6}.$$

В этой же таблице для сравнения приведены результаты численного решения методом верхней релаксации задачи

$$\begin{cases} -\gamma \bar{x}_1 x_1 - \gamma \bar{x}_2 x_2 = 0, & x \in \Omega_h, \\ \gamma = u_0, & x \in \Gamma_h, \end{cases} \quad (3.4)$$

и задачи

$$\begin{cases} -\gamma \bar{x}_1 x_1 - \gamma \bar{x}_2 x_2 = 0, & x \in \Omega_h, \\ L_{h,2} \gamma = \frac{\partial u_0}{\partial n}, & x \in \Gamma'_h, \\ L_{h,2} \gamma = 2 \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \cos(n, x_1) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \cos(n, x_2) \right). \end{cases} \quad (3.5)$$

Отметим, что при решении задач (3.2)-(3.5) итерационный процесс на каждой сетке начинался с нулевого приближения, параметр ω для неизвестных внутри $\bar{\Omega}_h$ выбирался приближенно по схеме из [22].

В силу симметрии задачи решались в первой четверти $x_1, x_2 > 0$ плоскости R^2 . При решении (3.2), параметр нижней релаксации γ для неизвестных на $\Gamma_{h,1}$, $\Gamma_{h,2}$ и $\Gamma_{h,3}$ задавался равным 0,2; 0,14; 0,11 соответственно.

На рис. 2 и рис. 3 изображены одна четвертая часть поперечного сечения квадрупольного и дипольного магнитов соответственно. В работах [18, 19] были проведены численные исследования гармоник поля этих магнитов в зависимости от степени насыщения ферромагнитного экрана. При этом решалась краевая задача (I.1)-(I.3), но условие

$A_z(x) = 0$ либо задавалось на достаточно удаленной от центра магнита границе Γ , либо учитывалось альтернирующим процессом, который сводился к попеременному решению задач в ограниченной области Ω (методом сеток) и в области $\Omega^+ = R^2 \setminus \Omega$ (методом ГМУ).

Таблица I

	(3.2)		(3.3)		(3.4)		(3.5)			
h_1, h_2	K	$\epsilon_{\Gamma_h,1}$	$\epsilon_{\Omega_h,1}$	K	$\epsilon_{\Gamma_h,1}$	$\epsilon_{\Omega_h,1}$	K	$\epsilon_{\Gamma_h,1}$	$\epsilon_{\Omega_h,1}$	
$h_1 = \frac{1}{9}$ $h_2 = \frac{1}{8}$	90	1,14	$6,28 \cdot 10^{-3}$	67	$6,44 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-2}$	51	0	$2,77 \cdot 10^{-3}$	$2,84 \cdot 10^{-2}$
$h_1 = \frac{1}{18}$ $h_2 = \frac{1}{16}$	170	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,62 \cdot 10^{-2}$	130	$1,11 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$	93	0	$6,96 \cdot 10^{-4}$	$7,10 \cdot 10^{-3}$
$h_1 = \frac{1}{36}$ $h_2 = \frac{1}{32}$	235	$5,52 \cdot 10^{-3}$	$4,26 \cdot 10^{-3}$	256	$2,51 \cdot 10^{-3}$	$6,10 \cdot 10^{-4}$	176	0	$1,82 \cdot 10^{-4}$	$1,78 \cdot 10^{-3}$

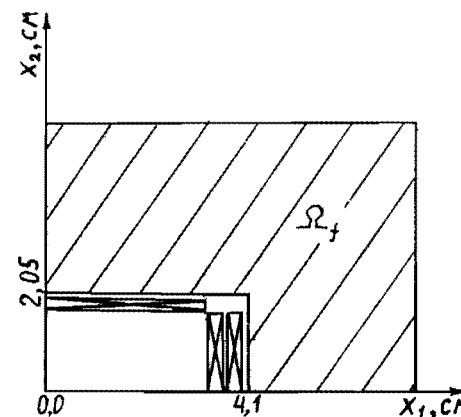


Рис. 2. Одна четвертая часть поперечного сечения квадрупольного магнита.

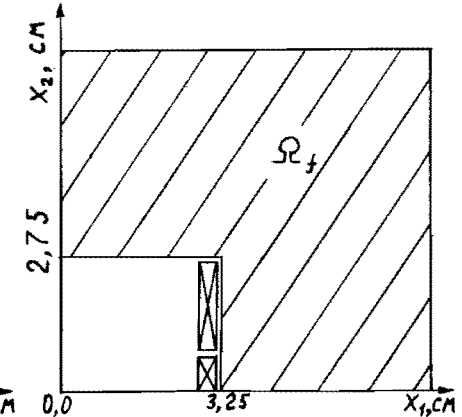


Рис. 3. Одна четвертая часть поперечного сечения дипольного магнита.

В таблицах 2 и 3 представлены результаты сравнения гармоник поля для квадрупольного и дипольного магнитов при различных способах задания краевого условия. Через K обозначено число итераций, необ-

ходимое для выполнения условия

$$\sum_{i,j} |\psi_{ij}^k - \psi_{ij}^{k-1}| / \sum_{i,j} |\psi_{ij}^k| \leq 10^{-5}$$

Сила тока в одном витке обмотки задавалась равной 3,5 кА. Размер витка квадрупольа 3,25 x 1,14 мм, размер витка дипольа 4 x 1,1 мм. Для расчета потенциала квадрупольа использовался первый способ учета краевого условия, а для расчета потенциала дипольа - второй способ. Отметим, что в случае первого магнита $\Gamma = \{0 < x_1 < 9,5, x_2 = 8\} \cup \{0 < x_2 < 8, x_1 = 9,5\}$ и среднее в Ω_f значение магнитной проницаемости $\mu = 1740$. В случае второго магнита $\Gamma = \{0 < x_1 < 12, x_2 = 11,5\} \cup \{0 < x_2 < 11,5, x_1 = 12\}$, $\mu = 397$. Для проведения расчетов использовался комплекс программ CRIS [18].

Таблица 2

Сетка 29x17	$u(\infty)=0$	$u/\Gamma=0$
B_2, T	2,6054	2,6041
$C_4, \%$	$7,23 \cdot 10^{-3}$	$6,98 \cdot 10^{-3}$
$C_6, \%$	$-6,01 \cdot 10^{-3}$	$-5,88 \cdot 10^{-3}$
$C_8, \%$	$9,7 \cdot 10^{-4}$	$9,3 \cdot 10^{-4}$
K	260	189

Таблица 3

Сетка 17x17	$u(\infty)=0$	$u/\Gamma=0$
B_1, T	3,3121	3,2971
$C_3, \%$	$5,698 \cdot 10^{-2}$	$5,474 \cdot 10^{-2}$
$C_5, \%$	$3,87 \cdot 10^{-3}$	$3,21 \cdot 10^{-3}$
$C_7, \%$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$-9,4 \cdot 10^{-4}$
K	178	158

Описанные алгоритмы хорошо себя зарекомендовали и при расчете распределения двумерных полей некоторых "открытых" магнитных систем [23].

В заключение авторы выражают благодарность Акишину П.Г., Федорову А.В. и Юдину И.П. за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Дойников Н.И. Постановки задач численного анализа полей нелинейных магнитных систем. НИИЭФА, ОБ-8, Л., 1976.
2. Ворожцов С.Б. Методы расчета магнитостатических полей. Труды международной школы молодых ученых по проблемам ускорителей заряженных частиц. ОИЯИ, Д9-84-817, Дубна, 1984.
3. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.

4. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, ПИ-82-871, Дубна, 1982.
5. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, ПИ-83-261, Дубна, 1983.
6. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, ПИ-85-371, Дубна, 1985.
7. Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Bettess P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. Int. Journal for Num. Meth. in Engineering, v.11, pp.355-375, 1977.
8. Абрамов А.Г., Дайковский А.Г., Ершов С.Ю., Португалов Ю.И., Рябов А.Д., Рябова Т.Д. Препринт ИФВЭ, 82-87, Серпухов, 1982.
9. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
10. Compomag-81. IEEE Transactions on magnetics, v.Mag-18, N2, 1982.
11. Владимирова В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
12. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики. Гостехиздат, М., 1953.
13. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юдашев О.И. ОИЯИ, ПИ-82-659, Дубна, 1982.
14. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, П9-85-915, Дубна, 1985.
15. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.
16. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
17. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юдашев О.И. ОИЯИ, ПИ-81-398, Дубна, 1981.
18. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, ПИ-84-802, Дубна, 1984.
19. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, ПИ-86-80, Дубна, 1986.
20. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Наука, М., 1978.
21. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры, М.: Физматгиз, 1963.
22. Carre V.A., Computer Journal, v.4, N1, 1966.
23. Айрян Э.А. и др. Использование метода граничных интегральных уравнений для расчета распределения двумерного поля "открытых" магнитных систем ускорителей. В сб.: "Интегральные уравнения в прикладном моделировании". Тезисы докладов 2-й Республиканской научно-технической конференции. - Киев: Институт электродинамики АН УССР, 1986г., ч.1, с.55-56.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1987 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р. 80 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р. 50 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Айрян Э.А. и др.
Алгоритм учета условий на бесконечности в двумерных задачах магнитостатики

P11-87-49

В работе развивается подход к решению двумерных задач магнитостатики относительно однокомпонентного векторного потенциала, когда на границе области, содержащей ферромагнетик, в качестве краевого условия используются граничные интегральные уравнения /ГИУ/. Для линейного случая и гладких коэффициентов дифференциального уравнения доказана положительность дифференциального оператора. Рассматриваются две разностные аппроксимации задачи. Доказана однозначная разрешимость разностных уравнений. Для второй разностной аппроксимации установлена положительность разностного оператора. Предложенный алгоритм особенно эффективен, когда решение дифференциального уравнения /линейного или нелинейного/ в ограниченной области является более трудоемкой задачей, чем решение ГИУ. Приводятся некоторые численные расчеты.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Ajrian E.A. et al.
An Algorithm Including Boundary Condition
in Infinity in Two-Dimensional Magnetostatics Problems

P11-87-49

An approach to solving magnetostatic two-dimensional problems in terms of one-component vector potential is developed. On the boundary of the region of ferromagnetic the boundary integral equations (BIE) are used as a boundary condition. For the linear case and smooth coefficients of the differential equation the positiveness of differential operator is proved. Two different approximations of the problem are considered. A unique solvability of the difference equation is proved. For the second difference approximation the positiveness of the difference operator is established. The algorithm proposed is especially efficient when solving of the differential equation (linear or nonlinear) in a limited region is a more difficult problem than solving of BIE. Some numerical results are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987