

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**P11-87-473**

**Г.Г.Тахтамышев**

**АДАПТИВНЫЙ ГЕНЕРАТОР  
СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ (SMART)**

**1987**

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе речь будет идти о вычислении определенных многомерных интегралов методом Монте-Карло. Частным случаем этой задачи является моделирование событий в физике высоких энергий, например, для вычисления акцептанса детектора или получения других характеристик. Будем считать, что область определения есть  $k$ -мерный единичный гиперкуб, и в этой  $k$ -мерной области задана функция, которую нужно проинтегрировать; либо в другой, эквивалентной интерпретации - задана функция плотности вероятности

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_k),$$

в соответствии с которой нужно моделировать события. Эту функцию мы будем называть весом, так как общепринятый способ моделирования заключается в том, что аргументы  $x_j$  генерируются равномерным способом, а событию затем приписывается вес  $f(x_1, \dots, x_k)$ . Традиционный способ оценки интеграла методом Монте-Карло заключается в следующем. Бросаем равномерно  $N$  случайных точек в область определения, вычисляем в каждой точке значение функции  $f(x)$  и оцениваем среднее значение подынтегральной функции по этим  $N$  точкам:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^i).$$

В силу известного соотношения

$$\int_{\omega} f(x) dx = \omega \cdot \langle f \rangle$$

/  $\omega$  - объем области, по которой ведется интегрирование /, оценка среднего есть и оценка интеграла. Определим параметр  $\zeta$ , который будем называть коэффициентом заполнения данной функции, следующим образом:

$$\zeta = \langle f \rangle / f_{\max},$$

где  $f_{\max}$  - максимальное значение функции  $f$  в области интегрирования. Очевидно, что чем меньше этот коэффициент заполнения, тем труднее получить оценку интеграла с некоторой заданной

точностью. Задачу можно назвать трудной, если коэффициент заполнения функции  $\zeta = 10^{-3}$  или меньше. Малая величина параметра  $\zeta$  означает, что вся вероятность стянута к одной или нескольким точкам внутри области определения. Объем, в котором локализована вероятность, по порядку величины равен  $\zeta$ . В качестве иллюстрации можно рассмотреть задачу вычисления акцептанса /геометрической эффективности/ какого-либо детектора, например магнитного спектрометра. Если физическое событие моделируется с весом 1, то подинтегральная функция может принимать только два значения: 1 - если событие регистрируется детектором, и 0 - если не регистрируется. В этом случае параметр  $\zeta$  точно равен объему, в котором сосредоточена вся вероятность. Легко видеть, что если акцептанс равен, например,  $10^{-4}$ , то для его оценки с погрешностью 10% необходимо промоделировать и пропустить через установку  $10^6$  событий.

Один из возможных способов сократить время на решение трудных задач - применение адаптивных алгоритмов. Адаптивной мы называем программу, которая в процессе моделирования накапливает информацию о подинтегральной функции и, начиная с какого-то момента, использует эту информацию при выработывании случайного числа. Вместо равномерного бросания в интервал  $[0, 1]$  случайные числа преимущественно бросаются в область максимума /или максимумов/ функции. Неравномерное бросание точек компенсируется добавочным весом.

## 2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Область определения каждой из переменных  $x_j$  разбита на  $m$  подынтервалов. Случайное число вырабатывается в два этапа: сначала выбирается номер подынтервала, а затем точка на этом подынтервале. И номер подынтервала, и точка внутри подынтервала всегда выбираются равновероятно. Длины же подынтервалов перестраиваются через каждые  $n$  точек. Для каждых  $n$  точек накапливаются величины  $w_{j\ell}$  ( $j = 1, \dots, k$ ;  $\ell = 1, \dots, m$ ) и на основании анализа этих величин проводится изменение длин отрезков. Для каждой переменной  $x_j$  величина  $w_{j\ell}$  - это сумма весов, попавших в подынтервал с номером  $\ell$  за очередные  $n$  точек. Конечная цель алгоритма - подобрать такие длины подынтервалов, чтобы все величины  $w_{j\ell}$  были равны.

Для каждой переменной  $x_j$  анализ величин  $w_{j\ell}$  проводится одинаково и состоит из следующих этапов:

- вычисляется среднее значение  $w_{av} = \frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^m w_{j\ell}$ ;

$w_j \rightarrow \dots \rightarrow g \rightarrow C$

- находятся минимальное и максимальное значения  $w_{min}$  и  $w_{max}$  из всех  $w_{j\ell}$  /для данного  $j$ / и определяются номера подынтервалов  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , в которых реализуются эти значения;

- находится сумма всех весов, за исключением максимального:

$$w_r = \sum_{\ell=1}^m w_{j\ell} - w_{max}$$

На основании этих данных делается классификация распределений величин  $\{w_{j\ell}\}$ , и процедура перестройки длин подынтервалов различна для различных классов. Классификация распределений происходит следующим образом.

Сначала распределению присваивается класс 0. Если отношение  $w_{max}/w_{min}$  больше  $g_1$ , этому распределению присваивается класс 1. Если  $w_{max}/w_{av} > g_2$  или  $w_{av}/w_{min} > g_2$ , то присваивается класс 2. Наконец, если  $w_{max}/w_r > g_3$ , то присваивается класс 3. Константы  $g_1, g_2, g_3$  являются по сути параметрами настройки. В процессе счета использовались значения:  $g_1 = 3, g_2 = 5, g_3 = 2$ . Работа алгоритма при других значениях не исследовалась. Перестройка длин подынтервалов осуществлялась по следующим правилам. Если распределение относится к классу 3, то подынтервал, содержащий максимальный вес /т.е. номер  $\ell_1$ /, делится на  $m-1$  или на  $m-2$  равных подынтервала. Остальные же подынтервалы объединяются в один или два, в зависимости от того, является ли подынтервал  $\ell_1$  крайним или нет.

Если распределение относится к классу 2, то подынтервал с максимальным весом делится на два равных подынтервала. Среди остальных подынтервалов находятся такие два соседних, сумма весов которых меньше, чем у любой другой такой пары. Эти подынтервалы объединяются в один.

Если распределение относится к классу 1, то двигаются границы между всеми подынтервалами. Величина сдвига прямо зависит от соотношения весов в соседних подынтервалах.

Одна из задач, которая ставилась при написании данной программы, заключалась в сведении к минимуму требуемых изменений в моделирующей программе. Приведем упрощенную программу, которая вычисляет определенный интеграл методом Монте-Карло с помощью обычного генератора случайных чисел RNDM.

```
DIMENSION X (100)
...
SUM = 0.
DO 20 I = 1,N
DO 10 J = 1,K
X(J) = RNDM(DUMMY)
10 CONTINUE
F = FUNCT(X)
```

```

20 SUM = SUM+F
   RESULT = SUM/N
   ...
   END

```

Та же программа, использующая генератор SMART, будет выглядеть следующим образом:

```

DIMENSION X(100)
...
SUM = 0.
DO 20 I = 1,N
  W = SMART(0,Z)
  DO 10 J = 1,K
    X(J) = SMART(J,Z)
10 CONTINUE
  F = FUNCT(X)
  W = SMART(-1,F)
20 SUM = SUM+W
   RESULT = SUM/N
   ...
   END

```

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис.1 показан результат работы генератора SMART. Методом Монте-Карло вычислялось сечение реакции  $\pi + p \rightarrow p + 7\pi$  при энергии 10 ГэВ в с.ц.м. Матричный элемент предполагался равным константе. Как известно, для определения сечения такой

реакции требуется вычислить фазовый интеграл по 20-мерному гиперкубу. На рисунке показано, как зависит относительная ошибка оценки ( $\epsilon$ ) от полного числа точек (N). При использовании обычного генератора RNDM /кривая А/ ошибка убывает, как и полагается,

Рис.1. Относительная ошибка оценки сечения реакции  $\pi + p \rightarrow p + 7\pi$  ( $\sqrt{s} = 10$  ГэВ) в зависимости от числа точек. А - генератор RNDM. Б - генератор SMART.

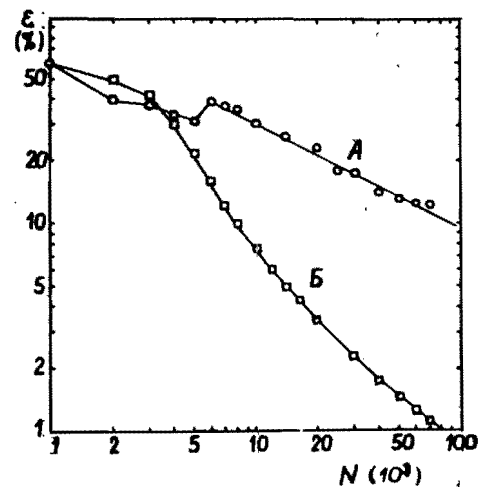
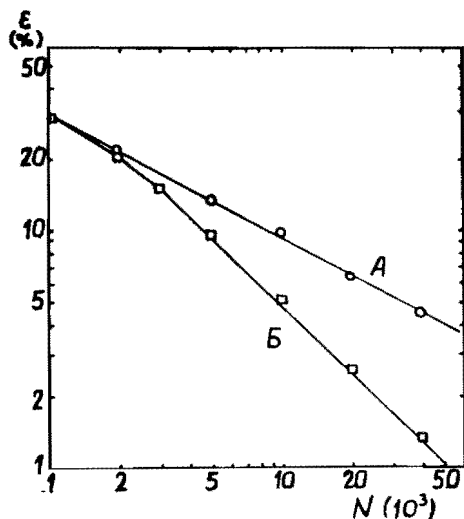
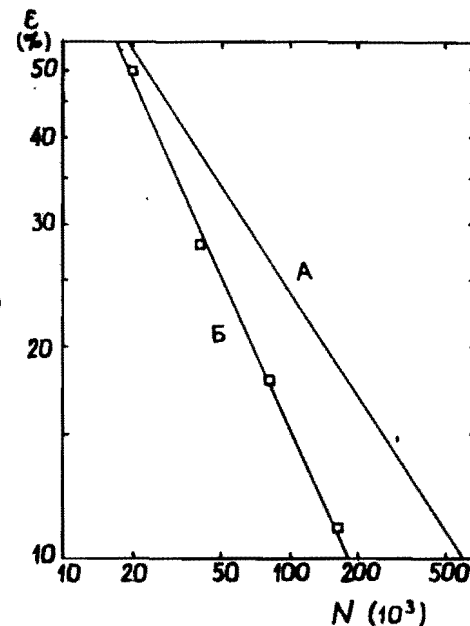


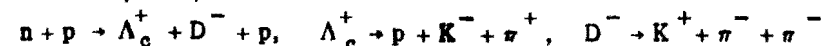
Рис.2. То же, что и на рис.1, для реакции  $\pi + p \rightarrow p + 9\pi$  ( $\sqrt{s} = 10$  ГэВ). А - генератор RNDM. Б - генератор SMART.

Рис.3. Относительная ошибка оценки акцептанса магнитного спектрометра в зависимости от числа точек. А - генератор RNDM. Б - генератор SMART.



по закону  $\epsilon \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ . В случае применения адаптивного генератора SMART убывание ошибки идет по закону, близкому к  $\epsilon \sim \frac{1}{N}$ . Например, для оценки сечения с точностью 5% генератору SMART достаточно 10000 точек, тогда как генератору RNDM требуется для такой же оценки более 30000 точек. В процессе счета оценивался также коэффициент заполнения подынтегральной функции. Оценка дает значение  $\zeta = 2 \cdot 10^{-3}$ .

На рис.2 показана аналогичная зависимость для реакции  $\pi + p \rightarrow p + 9\pi$  тоже при энергии 10 ГэВ в с.ц.м. Видно, что эффект работы адаптивного генератора /кривая Б/ в этом случае еще сильнее. Для этой задачи  $\zeta = 0,7 \cdot 10^{-4}$ . На рис.3 показан результат применения генератора SMART для вычисления акцептанса магнитного спектрометра. Спектрометр имел базу 2,5 м до магнита, базу 3 м после магнита и апертуру магнита  $1 \times 0,3$  м<sup>2</sup>. Моделировалась реакция:



при энергии 60 ГэВ. Требовалось, чтобы все заряженные частицы, образованные в реакции /кроме протона отдачи/ были зарегистрированы в камерах спектрометра. Как показал расчет, акцептанс спектрометра при этих условиях составлял  $\sim 0,2 \cdot 10^{-3}$ . График показывает, что генератор SMART /кривая Б/ и в этом случае обеспечивает более быструю сходимость, хотя отличие от RNDM /кривая А/ не так велико, как в предыдущих примерах. Тем не менее видно, что для получения оценки акцептанса с точностью 10% генератору SMART требуется в 2,5-3 раза меньше точек, чем генератору RNDM.

#### НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

|                |   |            |
|----------------|---|------------|
| ДЗ,4-82-704    | Труды IV Международной школы по нейтрон-ной физике. Дубна, 1982.  | 5 р.00 к.  |
| Д7-83-644      | Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.   | 6 р.55 к.  |
| Д2,13-83-689   | Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.  | 2 р.00 к.  |
| Д13-84-63      | Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.  | 4 р.50 к.  |
| Д2-84-366      | Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.  | 4 р.30 к.  |
| Д1,2-84-599    | Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.   | 5 р.50 к.  |
| Д10,11-84-818  | Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983. | 3 р.50 к.  |
| Д17-84-850     | Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/   | 7 р.75 к.  |
| Д11-85-791     | Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.                                       | 4 р.00 к.  |
| Д13-85-793     | Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.  | 4 р.80 к.  |
| Д4-85-851      | Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.  | 3 р.75 к.  |
| ДЗ,4,17-86-747 | Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.   | 4 р.50 к.  |
|                | Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. /2 тома/  | 13 р.50 к. |
| Д1,2-86-668    | Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. /2 тома/   | 7 р.35 к.  |

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Рукопись поступила в издательский отдел  
25 июня 1987 года.

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ  
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ**

| Индекс | Тематика   |
|--------|--|
| 1.     | Экспериментальная физика высоких энергий   |
| 2.     | Теоретическая физика высоких энергий   |
| 3.     | Экспериментальная нейтронная физика  |
| 4.     | Теоретическая физика низких энергий  |
| 5.     | Математика   |
| 6.     | Ядерная спектроскопия и радиохимия   |
| 7.     | Физика тяжелых ионов   |
| 8.     | Криогеника   |
| 9.     | Ускорители   |
| 10.    | Автоматизация обработки экспериментальных данных   |
| 11.    | Вычислительная математика и техника  |
| 12.    | Химия  |
| 13.    | Техника физического эксперимента   |
| 14.    | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами   |
| 15.    | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях   |
| 16.    | Дозиметрия и физика защиты   |
| 17.    | Теория конденсированного состояния   |
| 18.    | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники |
| 19.    | Биофизика  |

Тахтамьшев Г.Г.  
Адаптивный генератор случайных чисел  
/SMART/

P11-87-473

Описывается подпрограмма-функция, которая может использоваться в расчетах методом Монте-Карло в качестве генератора случайных чисел. В процессе работы подпрограмма накапливает информацию о функции, определяющей плотность вероятности /весовая или подынтегральная функция/. Затем эта информация используется для того, чтобы больше точек попало в область максимума весовой функции. Результаты тестирования показывают, что в некоторых случаях применение этой программы вместо стандартного генератора псевдослучайных чисел может дать существенный выигрыш во времени расчета.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Takhtamyshhev G.G.  
Adaptive Generator of Random Numbers  
(SMART)

P11-87-473

A program, which can be used as a random number generator in Monte Carlo calculations is described. On the first stage of calculation the program is collecting information about probability density function (weight or integrand function). This information is used hereupon in order to produce more random points near maximum of the function. Test results demonstrate that the essential gain in convergency speed can be achieved with this generator.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987