

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P11-87-452

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, И.Е.Жидкова

**ИССЛЕДОВАНИЕ
УСЛОВИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ АМПЛИТУД
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ
В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА**

1987

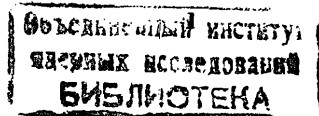
Хорошо известно, что в различных областях физики и механики при исследовании конкретных задач, содержащих малый параметр, широко используются асимптотические методы. Применение этих методов с необходимостью связано с широким кругом аналитических преобразований, подчас весьма громоздких. При получении высших приближений по малому параметру задача сталкивается с практически непреодолимыми трудностями аналитических расчетов. Ситуация существенно изменилась с появлением возможности выполнять громоздкие аналитические выкладки на ЭВМ.

При обосновании асимптотических методов^{/1/} доказываются теоремы, устанавливающие, что при весьма общих условиях разность между точным решением $x(\theta)$ и его асимптотическим приближением $\tilde{x}(\theta)$ может быть сделана сколь угодно малой на интервале $0 \leq \theta \leq \frac{1}{\varepsilon n}$, где ε - малый параметр задачи, n - порядок приближения. Для установления устойчивости движения заряженных частиц в синхрофазотроне ОИЯИ практически достаточно исследовать исходные уравнения в третьем приближении (т.е. $n=3$), что вытекает из следующих простых оценок: пусть $N \approx 10^6$ - число оборотов частицы в ускорителе, $\varepsilon = \frac{r_0}{R_0} \approx 10^{-2}$ (где r_0 - высота камеры, R_0 - радиус идеальной орбиты) - малый параметр, тогда $0 < \theta \leq \frac{1}{\varepsilon n} \approx 2\pi N$. Последнее приближенное равенство выполняется при $n=3$.

Целью настоящей работы является исследование влияния нелинейного резонанса $2\dot{\varphi}_z - \dot{\varphi}_x = 1$, проходящего вблизи рабочей точки синхрофазотрона ОИЯИ, на устойчивость движения заряженных частиц в синхрофазотроне методом усреднения Крылова-Боголюбова^{/1/} в третьем приближении.

Насколько нам известно, до сих пор подобные исследования резонансов не проводились.

В отсутствие электрического поля движение заряженных частиц в циклических ускорителях описывается системой нелинейных уравнений с периодическими коэффициентами^{/2,3/}



$$\ddot{x} + \bar{\nu}_x^2 x = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l F_{xl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', z, z', \theta), \quad (I)$$

$$\ddot{z} + \bar{\nu}_z^2 z = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l F_{zl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', z, z', \theta),$$

где F_{xi} , F_{zi} - полиномы от \mathbf{x} , \mathbf{x}' , z , z' и периодические функции от θ ($'$ означает дифференцирование по θ), ε - малый параметр, $\frac{\theta}{2\pi}$ - число оборотов частицы.

В работах^{/5/} было проведено исследование системы уравнений (I) вблизи резонанса $2\bar{\nu}_z - \bar{\nu}_x = 1$ методом усреднения в первом и во втором приближении. В этой работе система уравнений (I) исследуется методом усреднения в третьем приближении. Для этого в правой части (I) пренебрегаем членами порядка ε^4 и выше, после чего правые части системы (I) принимают вид

$$\varepsilon F_{x1} + \varepsilon^2 F_{x2} + \varepsilon^3 F_{x3} \quad \text{и} \quad \varepsilon F_{z1} + \varepsilon^2 F_{z2} + \varepsilon^3 F_{z3},$$

где

$$F_{x1} = A_{11}x^2 + A_{12}z^2 + A_{13}(x')^2 + A_{14}(z')^2,$$

$$F_{x2} = A_{21}x^3 + A_{22}xz^2 + A_{23}x(x') + A_{24}x(z')^2, \quad (2)$$

$$F_{x3} = A_{31}x^4 + A_{32}z^4 + A_{33}x^2z^2 + A_{34}x^2(x')^2 + A_{35}z^2(x')^2 +$$

$$+ A_{36}x^2(z')^2 + A_{37}z^2(z')^2 + A_{38}(x')^4 + A_{39}(z')^4 +$$

$$+ A_{310}(x')^2(z')^2,$$

$$F_{z1} = B_{11}xz,$$

$$F_{z2} = B_{21}x^2z + B_{22}z^3 + B_{23}z(x')^2 + B_{24}z(z')^2,$$

$$F_{z3} = B_{31}x^3z + B_{32}xz^3 + B_{33}xz(x')^2 + B_{34}xz(z')^2.$$

Здесь $A_{ij}(\theta)$ и $B_{ij}(\theta)$ - периодические функции, имеющие период π . На практике, как правило, эти функции представляются в виде ряда Фурье, т.е.

$$A_{kj}(\theta) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} a_{kj\alpha} e^{i\frac{2\pi}{T}\alpha\theta}, \quad (3)$$

$$B_{kj}(\theta) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} b_{kj\alpha} e^{i\frac{2\pi}{T}\alpha\theta}.$$

Постоянные $a_{kj\alpha}$, $b_{kj\alpha}$ и T связаны с реальной магнитной структурой конкретного циклического ускорителя. При получении усредненных уравнений явный вид этой связи нам не требуется. Обычно ограничиваются при практических расчетах одним - двумя членами ряда. Тем не менее в дальнейшем во всех промежуточных вычислениях мы будем оперировать бесконечным рядом.

В окрестности резонанса $2\bar{\nu}_z - \bar{\nu}_x = 1$ можно положить

$$\bar{\nu}_z^2 = \left(\frac{1+\bar{\nu}_x}{2}\right)^2 + \varepsilon \cdot \Delta = \bar{\nu}_z^2 + \varepsilon \cdot \Delta,$$

где Δ представляет собой расстройку (Δ - отклонение от идеального резонанса). После этого система (I) примет вид

$$\ddot{x} + \bar{\nu}_x^2 x = \varepsilon F_{x1} + \varepsilon^2 F_{x2} + \varepsilon^3 F_{x3} = F_x, \quad (4)$$

$$\ddot{z} + \bar{\nu}_z^2 z = \varepsilon(F_{z1} - \Delta z) + \varepsilon^2 F_{z2} + \varepsilon^3 F_{z3} = F_z.$$

В дальнейшем черту над $\bar{\nu}_z$ будем опускать.

Сделаем в (4) замену переменных:

$$x = A_x e^{i\bar{\nu}_x\theta} + A_x^* e^{-i\bar{\nu}_x\theta},$$

$$x' = i\bar{\nu}_x(A_x e^{i\bar{\nu}_x\theta} - A_x^* e^{-i\bar{\nu}_x\theta}),$$

$$z = A_z e^{i\bar{\nu}_z\theta} + A_z^* e^{-i\bar{\nu}_z\theta},$$

$$z' = i\bar{\nu}_z(A_z e^{i\bar{\nu}_z\theta} - A_z^* e^{-i\bar{\nu}_z\theta}).$$

В новых переменных имеем

$$A'_x = \frac{1}{2i\sqrt{x}} e^{-i\sqrt{x}\theta} F_x(A_x, A_x^*, A_z, A_z^*, \theta, \varepsilon),$$

$$(A_x^*)' = -\frac{1}{2i\sqrt{x}} e^{i\sqrt{x}\theta} F_x(A_x, A_x^*, A_z, A_z^*, \theta, \varepsilon),$$

(5)

$$A'_z = \frac{1}{2i\sqrt{z}} e^{-i\sqrt{z}\theta} F_z(A_x, A_x^*, A_z, A_z^*, \theta, \varepsilon),$$

$$(A_z^*)' = -\frac{1}{2i\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}\theta} F_z(A_x, A_x^*, A_z, A_z^*, \theta, \varepsilon).$$

Система дифференциальных уравнений вида (5) называется системой в стандартной форме и эквивалентна системе уравнений (4). Рассмотрим задачу Коши для системы (4) или (5), а именно:

$$x(\theta) \Big|_{\theta=0} = x_0, \quad x'(\theta) \Big|_{\theta=0} = x'_0, \quad (4_1)$$

$$z(\theta) \Big|_{\theta=0} = z_0, \quad z'(\theta) \Big|_{\theta=0} = z'_0,$$

где постоянные $\{x_0, x'_0, z_0, z'_0\}$ зависят от инжекции частиц в ускоритель. Далее, движение заряженных частиц в ускорителе будем считать устойчивым на промежутке

$$0 \leq \theta \leq \frac{1}{\varepsilon n} \approx 2\pi n,$$

если на этом промежутке амплитуды колебаний A_x и A_z останутся ограниченными, т.е.

$$|A_x| \leq A_{x0}, \quad |A_z| \leq A_{z0}, \quad (6)$$

где $A_{x0} > 0$, $A_{z0} > 0$ — заранее заданные числа, связанные с размерами пучка. При определенных ограничениях на коэффициенты разложения (3) и на постоянные $\{x_0, x'_0, z_0, z'_0\}$ можно добиться устойчивости в вышесказанном смысле. Для установления этих ограничений при исследовании задачи Коши (4)-(4₁) применяем аппарат метода усреднения.

В основе метода усреднения лежит некоторая замена переменных, позволяющая перейти от исходных переменных к усредненным с любой степенью точности по ε . Так как в этой работе систему (5) усредняем с точностью ε^3 включительно, то замену переменных искали в виде

$$A_x = c_1 + \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \varepsilon^3 u_{13},$$

(7)

$$A_x^* = c_2 + \varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \varepsilon^3 u_{23},$$

$$A_z = c_3 + \varepsilon u_{31} + \varepsilon^2 u_{32} + \varepsilon^3 u_{33},$$

$$A_z^* = c_4 + \varepsilon u_{41} + \varepsilon^2 u_{42} + \varepsilon^3 u_{43},$$

где $u_{ij}(c_1, c_2, c_3, c_4, \theta)$ — некоторые периодические по θ функции; c_1, c_2, c_3, c_4 — новые неизвестные функции, которые удовлетворяют усредненной системе уравнений вида

$$c'_1 = \varepsilon v_{11} + \varepsilon^2 v_{12} + \varepsilon^3 v_{13},$$

$$c'_2 = \varepsilon v_{21} + \varepsilon^2 v_{22} + \varepsilon^3 v_{23},$$

(8)

$$c'_3 = \varepsilon v_{31} + \varepsilon^2 v_{32} + \varepsilon^3 v_{33},$$

$$c'_4 = \varepsilon v_{41} + \varepsilon^2 v_{42} + \varepsilon^3 v_{43},$$

не содержащей явно переменную θ , т.е. $v_{ij}(c_1, c_2, c_3, c_4)$ не зависит от θ .

Основные аналитические выкладки при получении неизвестных функций u_{ij} и v_{ij} были выполнены с использованием системы REDUCE -3.2/4/ на ЭВМ ЕС-1061. Функции получились очень громоздкими, поэтому мы здесь их не приводим. Подставляя полученные функции v_{ij} в систему (8), имеем

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 = & s_{11}c_3^2 + s_{12}c_1^2c_2 + s_{13}c_1c_3c_4 + s_{14}c_1^2c_4^2 + s_{15}c_3^3c_4 + \\ & + s_{16}c_1c_2c_3^2 + s_{17}c_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_2 &= S_{21}c_4^2 + S_{22}c_1c_2^2 + S_{23}c_1c_3c_4 + S_{24}c_2^2c_3^2 + S_{25}c_3c_4^3 + \\
&+ S_{26}c_1c_2c_4^2 + S_{27}c_2, \\
\dot{c}_3 &= S_{31}c_3 + S_{32}c_1c_4 + S_{33}c_3^2c_4 + S_{34}c_1c_2c_3 + S_{35}c_2c_3^3 + \\
&+ S_{36}c_1c_2c_4 + S_{37}c_1c_3c_4^2, \\
\dot{c}_4 &= S_{41}c_4 + S_{42}c_2c_3 + S_{43}c_3c_4^2 + S_{44}c_1c_2c_4 + S_{45}c_1c_4^3 + \\
&+ S_{46}c_1c_2c_3^2 + S_{47}c_2c_3^2c_4,
\end{aligned} \tag{9}$$

где все числовые коэффициенты S_{kj} выражаются через коэффициенты $a_{kj\alpha}$, $b_{kj\alpha}$ разложения (3). Так как $c_1 = c_2^*$ и $c_3 = c_4^*$, то, переходя к действительным переменным с помощью замены переменных:

$$c_1 = \frac{a_x}{2i} e^{i\psi_x}, \quad c_3 = \frac{a_z}{2i} e^{i\psi_z}, \tag{10}$$

$$c_2 = -\frac{a_x}{2i} e^{-i\psi_x}, \quad c_4 = -\frac{a_z}{2i} e^{-i\psi_z},$$

$$S_{kj} = \alpha_{kj} e^{i\beta_{kj}}, \quad S_{kj}^* = \alpha_{kj} e^{-i\beta_{kj}},$$

и вводя обозначение $\psi = 2\psi_z - \psi_x$, систему (9) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\dot{a}_x &= a_z^2 (H_{11} + H_{12}a_x^2 + H_{13}a_z^2) \sin \psi + \\
&+ a_z^2 (H_{14} + H_{15}a_x^2 + H_{16}a_z^2) \cos \psi + \\
&+ a_x (H_{17}a_x^2 + H_{18}a_z^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_z &= a_x a_z (H_{21} + H_{22}a_x^2 + H_{23}a_z^2) \sin \psi + \\
&+ a_x a_z (H_{24} + H_{25}a_x^2 + H_{26}a_z^2) \cos \psi + \\
&+ a_z (H_{27}a_x^2 + H_{28}a_z^2 + H_{29}), \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{a_x} \left[a_x^2 (H_{31} + H_{32}a_x^2 + H_{33}a_z^2) + \right. \\
&+ a_z^2 (H_{34} + H_{35}a_x^2 + H_{36}a_z^2) \left. \right] \sin \psi + \\
&+ \frac{1}{a_x} \left[a_x^2 (H_{37} + H_{38}a_x^2 + H_{39}a_z^2) + \right. \\
&+ a_z^2 (H_{310} + H_{311}a_x^2 + H_{312}a_z^2) \left. \right] \cos \psi + \\
&+ (H_{313}a_x^2 + H_{314}a_z^2 + H_{315}).
\end{aligned} \tag{II}$$

Коэффициенты H_{1j} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 15$) приведены в приложении П. Для новых неизвестных функций a_x, a_z и ψ из (4₁) получаем начальные условия

$$a_x \Big|_{\theta=0} = a_{x0}, \quad a_z \Big|_{\theta=0} = a_{z0}, \quad \psi \Big|_{\theta=0} = \psi_0. \tag{12}$$

Таким образом, изучение ограниченных решений (т.е. удовлетворяющих условию (6)) задачи (4)-(4₁) свелось к исследованию решений системы трех нелинейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (II) при начальных условиях (12), удовлетворяющих условию

$$a_x \leq \bar{a}_x, \quad a_z \leq \bar{a}_z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi N. \tag{13}$$

При этом коэффициенты разложения (3) и постоянные \bar{a}_x, \bar{a}_z подбираются таким образом, что если выполняются условия (13), то автоматически выполняются условия (6).

Непосредственное изучение системы (II) в фазовом пространстве затруднено, так как числовые коэффициенты H_{1j} , входящие в систему, зависят от коэффициентов ряда (3). Без предварительного анализа этих последних коэффициентов вряд ли возможно изучение ограниченных траекторий в фазовом пространстве, удовлетворяющих условию (13).

Поэтому был выбран другой путь, а именно: накладывая на коэффициенты H_{1j} достаточные для устойчивости ограничения вида

$$l_1 H_{1i} - l_2 H_{2i} \leq \varepsilon^4 \quad (i=1,2,\dots,9), \quad (I4)$$

где $l_1 = \text{const} > 0$, $l_2 = \text{const} > 0$, из системы уравнений (II) получаем приближенный интеграл движения

$$l_1 a_x^2 + l_2 a_z^2 = \text{const} + O(\varepsilon^4) \quad (I5)$$

на интервале $0 \leq \theta \leq \frac{1}{\varepsilon^3}$.

Используя (I5), из системы (II) можно перейти к системе двух уравнений и полученную систему исследовать в фазовой плоскости. Хотя этот путь более конструктивен, остается вопрос анализа накладываемых ограничений (I4).

При получении усредненных уравнений (II) во всех промежуточных вычислениях мы оперировали бесконечными рядами (3) как символами и только в окончательных формулах раскрывали смысл каждого символа. Это было сделано для экономии машинного времени и памяти. Теперь в окончательных формулах можно учитывать только те члены в разложении (3), которые практически отличны от нуля для соответствующего циклического ускорителя, и проверить выполнение условий (I4).

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Подставляя в (7) явный вид функций v_{1j} , которые приведены в приложении I, мы можем связать амплитуды колебания A_x , A_z непосредственно с коэффициентами разложения (3). При этом появляются члены типа

$$\sum_{\alpha} \frac{a_{k1\alpha}}{\omega(\nu_x, \nu_z, \alpha)}, \quad \sum_{\alpha} \frac{b_{k1\alpha}}{\omega(\nu_x, \nu_z, \alpha)},$$

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{a_{k1\alpha}}{\omega(\nu_x, \nu_z, \alpha) \cdot \omega(\nu_x, \nu_z, \beta)}, \quad \sum_{\alpha, \beta} \frac{b_{k1\alpha}}{\omega(\nu_x, \nu_z, \alpha) \cdot \omega(\nu_x, \nu_z, \beta)}, \quad (I6)$$

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{a_{k1\alpha}}{\omega(\nu_x, \nu_z, \alpha) \cdot \omega(\nu_x, \nu_z, \beta) \cdot \omega(\nu_x, \nu_z, \gamma)},$$

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{b_{k1\alpha}}{\omega(\nu_x, \nu_z, \alpha) \cdot \omega(\nu_x, \nu_z, \beta) \cdot \omega(\nu_x, \nu_z, \gamma)}$$

где $\omega(\nu_x, \nu_z, \sigma) = n\nu_x + m\nu_z + \frac{2k}{l}\sigma$, $\sigma = \alpha, \beta, \gamma, \dots$
 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

При некоторых значениях m, n, σ выполняется резонансное условие, т.е. $\omega(\nu_x, \nu_z, \sigma) \ll 1$ и A_x, A_z могут стать как угодно большими, и условие (6) не будет выполняться. Это приводит к математической проблеме, известной под названием проблемы малых знаменателей. Для подавления подобных резонансных членов необходимо, чтобы коэффициенты при соответствующих резонансных членах удовлетворяли условию

$$a_{kjk} \ll 1, \quad b_{kjk} \ll 1. \quad (I7)$$

Теперь проведем анализ выполнимости условий (I4) и построим интеграл движения (I5). Этот анализ был начат с I-го приближения. Система уравнений (II) при этом принимает вид

$$\dot{a}_x = a_z^2 H_{14} \cos \psi,$$

$$\dot{a}_z = a_x a_z H_{24} \cos \psi,$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{a_x} (a_x^2 H_{31} + a_z^2 H_{34}) \sin \psi + (H_{313} a_x^2 + H_{315}).$$

Условие устойчивости (I4) является при этом тождеством: $b_{11,-1} = 2a_{12,-1}$, а интеграл движения (I5) при $0 \leq \theta \leq \frac{1}{\varepsilon}$ имеет вид

$$4\nu_x a_x^2 + (1 + \nu_x) a_z^2 = \text{Const}, \quad (I8)$$

что полностью совпадает с результатами, полученными ранее вручную^{/5/}.

Для второго приближения условия устойчивости (I4) принимают вид

$$2\nu_x a_{130} (3\nu_x^2 a_{130} + a_{110}) \leq \varepsilon,$$

$$\nu_x a_{130} [(1 + \nu_x)^2 a_{140} + 4a_{120}] \leq \varepsilon, \quad (I9)$$

$$\frac{2}{\nu_x + 1} b_{100}^2 \leq \varepsilon,$$

где b_{100} соответствует расстройке.

Если условия (I9) выполнены, то на интервале $0 \leq \theta \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ интеграл движения имеет вид

$$4\nu_x a_x^2 + (1 + \nu_x) a_z^2 = \text{Const} + O(\varepsilon^3), \quad (20)$$

т.е. доказана ограниченность амплитуд на указанном выше интервале.

При исследовании системы (II) в третьем приближении условие устойчивости (14) имеет вид

1. $\left| 2\sqrt{x} a_{130} (\sqrt{x} a_{130} + a_{110}) \right| \leq \varepsilon^2$,
2. $\left| \sqrt{x} a_{130} \left[(\sqrt{x} + 1)^2 a_{140} + 4a_{120} \right] - \varepsilon \frac{2}{\sqrt{x} + 1} b_{100} (\sqrt{x}^2 b_{230} + b_{210}) \right| \leq \varepsilon^2$,
3. $\frac{2}{\sqrt{x} + 1} b_{100} \leq \varepsilon^2$,
4. $\left| 3b_{100} \left(-\frac{\sqrt{x} + 1}{4} b_{240} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} b_{220} \right) \right| \leq \varepsilon$,
5. $\left| P_1 (a_{11}^I, a_{11}^R, a_{12}^I, a_{12}^R, a_{21}^I, a_{21}^R, a_{22}^I, a_{22}^R, a_{32}^I, a_{32}^R, b_{11}^I, b_{11}^R, b_{21}^I, b_{21}^R, b_{31}^I, b_{31}^R) \right| \leq \varepsilon$,
6. $\left| P_2 (a_{11}^I, a_{11}^R, a_{12}^I, a_{12}^R, a_{21}^I, a_{21}^R, a_{22}^I, a_{22}^R, a_{32}^I, b_{11}^I, b_{11}^R, b_{21}^I, b_{21}^R, b_{22}^I, b_{22}^R, b_{32}^I, b_{32}^R) \right| \leq \varepsilon$,
7. $\left| P_3 (a_{11}^I, a_{11}^R, a_{12}^I, a_{12}^R, a_{21}^I, a_{21}^R, a_{22}^I, a_{22}^R, a_{35}^R, a_{36}^R, b_{11}^R, b_{11}^I, b_{21}^R, b_{21}^I, b_{31}^R, b_{31}^I, b_{33}^R) \right| \leq \varepsilon$,
8. $\left| P_4 (a_{11}^I, a_{11}^R, a_{12}^I, a_{12}^R, a_{21}^I, a_{21}^R, a_{22}^I, a_{22}^R, a_{32}^I, b_{11}^R, b_{11}^I, b_{21}^R, b_{21}^I, b_{22}^R, b_{22}^I, b_{32}^R, b_{32}^I) \right| \leq \varepsilon$,

(2I)

где P_1, P_2, P_3, P_4 - полиномы третьей степени с числовыми коэффициентами (их явный вид приведен в приложении III);

$$a_{kj\alpha} = a_{kj}^R \pm i a_{kj}^I, \quad b_{kj\alpha} = b_{kj}^R \pm i b_{kj}^I, \quad \alpha = \pm 1.$$

Выбор индекса α определяется видом конкретного резонанса. Если эти условия (2I) выполнены, то на интервале $0 \leq \theta \leq \frac{1}{\varepsilon^3}$ интеграл движения имеет вид

$$4 \sqrt{x} a_x^2 + (1 + \sqrt{x}) a_z^2 = \text{const} + O(\varepsilon^4). \quad (22)$$

Тем самым доказана ограниченность амплитуд (a_x, a_z) частицы под влиянием резонанса $2\sqrt{x} - \sqrt{x} = 1$ при выполнении условий (2I).

Усредненные уравнения вида (9) получены и для некоторых других резонансов.

Проводятся дальнейшие исследования.

$$u_{11} = M_{11} e^{i\sqrt{x}\theta} + M_{12} e^{-i\sqrt{x}\theta} + M_{13} e^{-3i\sqrt{x}\theta} + M_{14} e^{-i\sqrt{x}\theta + 2i\sqrt{z}\theta} + M_{15} e^{-i\sqrt{x}\theta - 2i\sqrt{z}\theta},$$

$$u_{21} = u_{11}^*,$$

$$\dots$$

$$u_{12} = D_{11} e^{-i\sqrt{x}\theta} + D_{12} e^{-2i\sqrt{x}\theta} + D_{13} e^{2i\sqrt{z}\theta} + D_{14} e^{-4i\sqrt{x}\theta} + D_{15} e^{-2i\sqrt{z}\theta} +$$

$$+ D_{16} e^{2i\sqrt{z}\theta} + D_{17} e^{-2i\sqrt{x}\theta - 2i\sqrt{z}\theta} + D_{18} e^{-2i\sqrt{x}\theta + 2i\sqrt{z}\theta} +$$

$$+ D_{19} e^{-i\sqrt{x}\theta - 2i\sqrt{z}\theta} + D_{110} e^{-i\sqrt{x}\theta + 2i\sqrt{z}\theta} + D_{111} e^{i\sqrt{z}\theta} + D_{112} e^{-3i\sqrt{x}\theta},$$

$$u_{22} = u_{12}^*,$$

где

$$M_{11} = N_1 c_1^2,$$

$$N_1 = - \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} a_{11\alpha} - \sqrt{x} a_{13\alpha} \right) \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{2\pi}{T} \alpha} e^{i \frac{2\pi}{T} \alpha \theta},$$

$$\dots$$

$$M_{14} = N_4 c_3^2,$$

$$N_4 = - \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(-\sqrt{x} + 2\sqrt{z}) + \frac{2\pi}{T} \alpha} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} a_{12\alpha} e^{i \frac{2\pi}{T} \alpha \theta},$$

$$D_{13} = - \sum_{\alpha_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha_2=-\infty}^{\infty} \left[(\sqrt{x} a_{13\alpha_2} + \frac{1}{\sqrt{x}} a_{11\alpha_2}) \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt{x} - \frac{2\pi}{T} \alpha_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} a_{11\alpha_1} \right) \right]$$

$$\times \left(\frac{1}{2\sqrt{x} - \frac{2\pi}{T} \alpha_1 + \frac{2\pi}{T} \alpha_2} \right) e^{-i \frac{2\pi}{T} \alpha_1 \theta} + \left(\sqrt{x} a_{13\alpha_2} - \frac{1}{\sqrt{x}} a_{11\alpha_2} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} a_{11\alpha_1} - \frac{\sqrt{x}}{2} a_{13\alpha_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x} + \frac{2\pi}{T} \alpha_1 + \frac{2\pi}{T} \alpha_2} \right) e^{i \frac{2\pi}{T} \alpha_1 \theta} \Big] \times$$

$$\times e^{i \frac{2\pi}{T} \alpha_2 \theta} - \sum_{\alpha_2=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{x}}{2} a_{23\alpha_2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} a_{21\alpha_2} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{(2\sqrt{x} + \frac{2\pi}{T} \alpha_2)} e^{i \frac{2\pi}{T} \alpha_2 \theta},$$

...

ПРИЛОЖЕНИЕ II

$$H11 := - 1/4 * A112 * EPS * NX^{(-1)}$$

$$H12 := (- 1/4 * A112 * BI21 * EPS * NX^3) / (NX + 1) + (1/4 * AR12 * BR21 * EPS * NX^3) / (NX + 1) - 1/16 * A133 * EPS^3 * NX^{(-1)} - 3/16 * A135 * EPS^3 * NX^3 + A136 * (1/64 * EPS^3 * NX^3 + 1/64 * EPS^3 * NX^3) + 1/32 * EPS^3$$

$$H13 := (- 3/8 * A112 * BI22 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (3/8 * AR12 * BR22 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) - 1/4 * A132 * EPS^3 * NX^{(-1)}$$

$$H14 := - 1/4 * AR12 * EPS * NX^{(-1)}$$

$$H15 := (- 1/4 * A112 * BR21 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (- 1/4 * AR12 * BI21 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) - 1/16 * AR33 * EPS^3 * NX^{(-1)} - 3/16 * AR35 * EPS^3 * NX^3 + AR36 * (1/64 * EPS^3 * NX^3 + 1/64 * EPS^3 * NX^3) + 1/32 * EPS^3$$

$$H16 := (- 3/8 * A112 * BR22 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (- 3/8 * AR12 * BI22 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) - 1/4 * AR32 * EPS^3 * NX^{(-1)}$$

$$H17 := 3/4 * EPS^2 * NX^2 * A130 + 1/4 * EPS^2 * A110 * A130$$

$$H18 := 1/8 * EPS^2 * NX^2 * A140 * A130 + 1/4 * EPS^2 * NX^2 * A140 * A130 + 1/8 * EPS^2 * A140 * A130 + 1/2 * EPS^2 * A120 * A130$$

$$H21 := (1/2 * BI11 * EPS) / (NX + 1)$$

$$H22 := (- 3/16 * A121 * BI11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (3/16 * AR21 * BR11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (1/4 * BI11 * BI21 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1) + (3/8 * BR11 * BR21 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1) + (3/8 * BR31 * EPS^3) / (NX + 1) + (1/8 * BR33 * EPS^3 * NX^2) / (NX + 1)$$

$$BI31 * EPS^3 / (NX + 1) + (1/8 * BI33 * EPS^3 * NX^2) / (NX + 1)$$

$$H23 := (- 1/8 * A122 * BI11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (1/8 * AR22 * BR11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (3/8 * BI11 * BI22 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1) + (3/8 * BR11 * BR22 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1) + (1/4 * BI32 * EPS^3) / (NX + 1) + BI34 * (1/16 * EPS^3 * NX^3 + 1/16 * EPS^3)$$

$$H24 := (1/2 * BR11 * EPS) / (NX + 1)$$

$$H25 := (- 3/16 * A121 * BR11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (- 3/16 * AR21 * BI11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (1/4 * BI11 * BR21 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1) + (1/4 * BR11 * BI21 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1) + (3/8 * BR31 * EPS^3) / (NX + 1) + (1/8 * BR33 * EPS^3 * NX^2) / (NX + 1)$$

$$H26 := (- 1/8 * A122 * BR11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (- 1/8 * AR22 * BI11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (3/8 * BI11 * BR22 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1) + (3/8 * BR11 * BI22 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1) + (1/4 * BR32 * EPS^3) / (NX + 1) + BR34 * (1/16 * EPS^3 * NX^3 + 1/16 * EPS^3)$$

$$H27 := (- EPS^3 * NX^2 * B230 * B100 - EPS^3 * B100 * B210) / (NX + 2 * NX + 1)$$

$$H28 := (- 3/8 * EPS^3 * NX^2 * B240 * B100 - 3/4 * EPS^3 * NX^2 * B240 * B100 - 3/2 * EPS^3 * B220 * B100 - 3/8 * EPS^3 * B240 * B100) / (NX + 2 * NX + 1)$$

$$H29 := (EPS^2 * B100) / (NX + 2 * NX + 1)$$

$$H31 := (- BR11 * EPS) / (NX + 1)$$

$$H32 := (3/8 * A121 * BR11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (3/8 * AR21 * BI11 * EPS^3 * NX^{(-1)}) / (NX + 1) + (- 1/2 * BI11 * BR21 * EPS^3) / (NX + 2 * NX + 1)$$

$$\begin{aligned}
& 1) + (-1/2*BR11*BI21*EPS^3)/(NX^2 + 2*NX + 1) + (-3/4* \\
& BR31*EPS^3)/(NX + 1) + (-1/4*BR33*EPS^3*NX^2)/(NX + 1) \\
H33 := & (1/4*AI22*BR11*EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (1/4*AR22*BI11*EPS^3 \\
& NX^{(-1)})/(NX + 1) + (-3/4*BI11*BR22*EPS^3)/(NX^2 + 2*NX + \\
& 1) + (-3/4*BR11*BI22*EPS^3)/(NX^2 + 2*NX + 1) + (-BR32* \\
& EPS^3)/(NX + 1) \\
H34 := & 1/4*AR12*EPS^3*NX^{(-1)} \\
H35 := & (1/4*AI12*BR21*EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (1/4*AR12*BI21*EPS^3 \\
& NX^{(-1)})/(NX + 1) + 3/16*AR33*EPS^3*NX^{(-1)} + 1/16*AR35*EPS^3 \\
& *NX + AR36*(-3/64*EPS^3*NX - 3/64*EPS^3*NX - 3/32*EPS^3) \\
H36 := & (3/8*AI12*BR22*EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (3/8*AR12*BI22*EPS^3 \\
& NX^{(-1)})/(NX + 1) + 1/4*AR32*EPS^3*NX^{(-1)} \\
H37 := & (BI11*EPS)/(NX + 1) \\
H38 := & (-3/8*AI21*BI11*EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (3/8*AR21*BR11* \\
& EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (1/2*BI11*BI21*EPS^3)/(NX^2 + 2*NX \\
& + 1) + (-1/2*BR11*BR21*EPS^3)/(NX^2 + 2*NX + 1) + (3/4* \\
& BI31*EPS^3)/(NX + 1) + (1/4*BI33*EPS^3*NX^2)/(NX + 1) \\
H39 := & (-1/4*AI22*BI11*EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (1/4*AR22*BR11* \\
& EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (3/4*BI11*BI22*EPS^3)/(NX^2 + 2*NX \\
& + 1) + (-3/4*BR11*BR22*EPS^3)/(NX^2 + 2*NX + 1) + (BI32* \\
& EPS^3)/(NX + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H310 := & -1/4*AI12*EPS^3*NX^{(-1)} \\
H311 := & (-1/4*AI12*BI21*EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (1/4*AR12*BR21* \\
& EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) - 3/16*AI33*EPS^3*NX^{(-1)} - 1/16* \\
& AI35*EPS^3*NX + AI36*(3/64*EPS^3*NX + 3/64*EPS^3*NX^{(-1)} + 3/32 \\
& *EPS^3) \\
H312 := & (-3/8*AI12*BI22*EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) + (3/8*AR12*BR22* \\
& EPS^3*NX^{(-1)})/(NX + 1) - 1/4*AI32*EPS^3*NX^{(-1)} \\
H313 := & (1/8*EPS^2*NX^2*AI230 - EPS^2*NX^2*BI230 + 1/8*EPS^2*NX^2*AI230 + 3/8 \\
& *EPS^2*NX^{(-1)}*AI210 + 3/8*EPS^2*AI210 - EPS^2*BI210)/(NX + 1) \\
H314 := & (-1/8*EPS^3*NX^{(-1)}*BI10*BI100*AI140 - 1/8*EPS^3*NX^{(-2)}*BI10* \\
& BI100*AI140 + 1/16*EPS^2*NX^2*AI240 - 1/8*EPS^2*NX^2*BI240 + 3/16* \\
& EPS^2*NX^2*AI240 - 1/4*EPS^2*NX^2*BI240 + 1/4*EPS^2*NX^{(-1)}*AI220 + 1 \\
& /16*EPS^2*NX^{(-1)}*AI240 + 1/4*EPS^2*AI220 + 3/16*EPS^2*AI240 - 3/ \\
& 2*EPS^2*BI220 - 1/8*EPS^2*BI240)/(NX + 1) \\
H315 := & (-2*EPS^3*BI100 + 2*EPS^3*NX^2*BI100 + 4*EPS^3*NX*BI100 + 2*EPS* \\
& BI100)/(NX^3 + 3*NX^2 + 3*NX + 1)
\end{aligned}$$

Приложение III

$$\begin{aligned}
P1 := & (-2*AI12*BI21)/(NX + 1) + (2*AR12*BR21)/(NX + 1) - 3/8*AI21 \\
& *BI11*NX^{(-1)} + 3/8*AR21*BR11*NX^{(-1)} - 1/2*AI33 - 3/2*AI35*NX^2 \\
& + AI36*(1/8*NX^2 + 1/4*NX + 1/8) + (1/2*BI11*BI21)/(NX + 1) \\
& + (-1/2*BR11*BR21)/(NX + 1) + 3/4*BI31 + 1/4*BI33*NX^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P2 := & (-3*AI12*BI22)/(NX + 1) + (3*AR12*BR22)/(NX + 1) - 1/4*AI22 \\
& *BI11*NX^{(-1)} + 1/4*AR22*BR11*NX^{(-1)} - 2*AI32 + (3/4*BI11*BI22) \\
&)/(NX + 1) + (-3/4*BR11*BR22)/(NX + 1) + 1/2*BI32 + BI34 \\
& *(1/8*NX^2 + 1/4*NX + 1/8) \\
P3 := & (-2*AI12*BR21)/(NX + 1) + (-2*AR12*BI21)/(NX + 1) - 3/8* \\
& AI21*BR11*NX^{(-1)} - 3/8*AR21*BI11*NX^{(-1)} - 1/2*AR33 - 3/2*AR34 \\
& *NX^2 + AR36*(1/8*NX^2 + 1/4*NX + 1/8) + (1/2*BI11*BR21)/(NX + \\
& 1) + (1/2*BR11*BI21)/(NX + 1) + 3/4*BR31 + 1/4*BR33*NX^2 \\
P4 := & (-3*AI12*BR22)/(NX + 1) + (-3*AR12*BI22)/(NX + 1) - 1/4* \\
& AI22*BR11*NX^{(-1)} - 1/4*AR22*BI11*NX^{(-1)} - 2*AR32 + (3/4*BI11* \\
& BR22)/(NX + 1) + (3/4*BR11*BI22)/(NX + 1) + 1/2*BR32 + \\
& BR34*(1/8*NX^2 + 1/4*NX + 1/8)
\end{aligned}$$

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Д.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, Москва, 1974.
2. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, Москва, 1962.
3. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, Москва, 1970.
4. Hearn A.G. REDUCE User's Manual, Version 3.2, Rand Corporation, Santa Monica, CA 90406, USA, 1985.
5. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, 9-8663, 1975; ПИ-9107, Дубна, 1975; ПИ-8780, Дубна, 1975; ПИ-9108, Дубна, 1975; Р5-82-879, Дубна, 1975; Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. ОИЯИ, ДИ-85-791, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июля 1987 года.

Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. P11-87-452
Исследование условий ограниченности амплитуд
бетатронных колебаний в окрестности резонанса

Работа посвящена исследованию условий ограниченности амплитуд бетатронных колебаний заряженной частицы в окрестности резонанса третьего порядка $2\nu_z - \nu_x = 1$, который проходит достаточно близко от рабочей точки синхрофазотрона ОИЯИ. При этом используется метод усреднения Крылова-Боголюбова в третьем приближении. Вычисления выполнены на ЭВМ с помощью системы для аналитических вычислений REDUCE-3.2. При некоторых ограничениях на параметры магнитного поля доказана ограниченность амплитуд.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Amirkhanov I.V., Zhydkov E.P., Zhydkova I.E. P11-87-452
The Conditions of Bounding of the Oscillation
Amplitudes of Charge Particle within the Resonance
Vicinity Investigations

The conditions of bounding of the betatron amplitudes of charge particle oscillations within the third order resonance vicinity which occur near the working point of JINR synchrotron are investigated. The investigation was performed using Krylov-Bogolubov method of averaging in third approximation. The evaluations were realized on computer with the help of the REDUCE-3.2 system for analytical evaluation. At some restrictions imposed on magnetic field parameters the bounding of amplitudes is satisfied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987