

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-87-434

Г.С.Казача, С.И.Сердюкова

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ПОВЕДЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ t
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА
С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

Направлено в Оргкомитет Международной
летней школы по нелинейным дифференциальным
уравнениям, Варна, 28 сентября - 3 октября
1987 г.

1987

Введение

В этой работе исследуются решения уравнения синус-Гордона с сингулярностью

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} - \alpha \varphi_t - (1 - \mu \delta(x)) \sin \varphi + \gamma(t).$$

Численными методами установлено существование решений, которые при больших t ведут себя как

$$\omega t + \rho(x, t).$$

Здесь $\rho(x, t)$ — ограниченная периодическая по t функция. В предлагаемой работе приводятся результаты исследований, изложенных в ^{1/}, а также результаты новых исследований. Численное моделирование периодических режимов рассматриваемого вида представляет интерес для изучения динамики джозефсоновских переходов ^{2/}. В работах ^{3,4/} периодические режимы наблюдались в однородном ($\mu=0$) джозефсоновском переходе при однородных граничных условиях и специально подобранных начальных данных. Использовались начальные данные типа "хорошо сформированный флюксон" в суперпозиции с пакетом плазменных волн. Такие волновые пакеты могут возбуждаться при резких перепадах температур и дефектах в джозефсоновском переходе. Нам удалось возбудить устойчивые периодические режимы в одномерном джозефсоновском переходе, управляя функцией тока $\gamma(t)$. Периодические режимы обнаружены в однородном ($\mu=0$) и неоднородном ($\mu=0,5$) переходах, при нулевых граничных условиях. Численно решается следующая краевая задача:

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} - \alpha \varphi_t - (1 - \mu \delta(x)) \sin \varphi + \gamma(t),$$

$$t \geq 0, \quad -l \leq x \leq l$$

$$\varphi_x(-l) = \varphi_x(l) = 0 \quad (I)$$

$$\varphi(x, 0) \quad \text{и} \quad \varphi_t(x, 0) \quad \text{заданы.}$$

В одних расчетах начальные данные были нулевыми, в других в качестве начальных данных задавался "хорошо сформированный флюксон". Для продолжения решений использовались также начальные данные типа "флюксон - антифлюксон". Использовались два типа возбуждения тока: мягкое возбуждение, импульсное возбуждение. В расчетах $l=2,5$, $\alpha=0,05$. Далее последовательно излагаются результаты численных экспериментов, относящиеся к однородному (§1) и неоднородному переходу (§2). В §3 приводится расчетный алгоритм. В §4 дан вывод асимптотической формулы $\omega(\gamma)$ для больших (γ/α) .

§ 1. Периодические режимы в однородном переходе

1. Случай нулевых начальных данных

Численно решается задача (I): $\mu=0$, $\alpha=0,05$, $\varphi(x,0)=\varphi_t(x,0)=0$. Были обнаружены ^{1/} следующие ветви решений. При мягком возбуждении тока (рис.1) для $\gamma < 0,76$ при больших t (в расчетах t достигало 250) решение выходит на константу $\varphi_0 = \arcsin \gamma$. В точке $\gamma=0,76$ происходит срыв на резистивную ветвь: при больших t решение выходит на периодический режим

$$\varphi(t) = \omega t + \rho(\omega t).$$

Здесь и далее $\rho(\theta)$ — периодическая ограниченная функция с периодом 2π (функция типа $\sin \theta$). На резистивной ветви при больших γ/α , $\omega \approx \gamma/\alpha$. Для $\gamma=0,76$ величина $(\gamma/\alpha) > 15$. Прямая ωt идет очень круто, и на графике добавка $\rho(\omega t)$ практически не видна. При импульсном включении (рис.2) для $\gamma_{\max} \geq 3$ срыв на резистивную ветвь происходит много раньше, при $\gamma=0,064$. Заметим, что для $\gamma < 0,064$ резистивная ветвь не существует: при любом γ_{\max} решение асимптотически выходит на константу $\arcsin \gamma$. Для γ/α порядка единицы на графиках хорошо видна периодическая добавка $\rho(\omega t)$. На рис.3 представлена зависимость фазы от времени в центре перехода ($x=0$) при $\gamma=0,07$ для $t > 225$. При малых γ резистивная ветвь имеет существенно нелинейный характер — зависимость $\omega(\gamma)$ нелинейная. В случае $\mu=0$ и нулевых начальных данных решение (I) не зависит от x . Оно является решением обыкновенного уравнения

$$\ddot{\varphi} = -\alpha \dot{\varphi} - \sin \varphi + \gamma.$$

В книге ^{5/} для постоянного γ качественными методами доказано, что на фазовой цилиндрической поверхности существует область, которой отвечают периодические движения. Однако никаких подходов к вычислению параметров периодических режимов в ^{5/} нет. Нам удалось

выписать приближенную формулу для периодических режимов, применяя методику /6/.

$$\varphi(x, t) = \varphi(t) = C + (\omega_0 - \frac{1}{2\omega_0^3})t + \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t + A) + o(e^{-\alpha t} + \omega_0^{-4}) = C + \omega t + \beta \sin(\omega_0 t + A) + o(e^{-\alpha t} + \omega_0^{-4}).$$

Здесь $\omega_0 = \gamma/\alpha$. Вывод этой формулы приведен в § 4. Эта формула хорошо согласуется с результатами численных расчетов. Например, при $\gamma = 0,15$, $\alpha = 0,05$, $\gamma_{max} = 3$ имеем: $\omega_0 = 3$, $\omega = \omega_0 - \frac{1}{2\omega_0^3} = 2,98148$, расчетное значение $\omega = 2,981$; $\beta = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{9}$, расчетное значение $\beta = 0,11$.

На рис. 4 представлена зависимость $\omega(\gamma)$, установленная на численном эксперименте. Сплошная линия отвечает мягкому включению, штриховая - импульсному.

2. Однородный переход, в начальных данных "хорошо сформированный" флюксон

Численно решается краевая задача (I) с такими начальными данными:

$$\varphi(x, 0) = 4 \operatorname{arctg} e^x, \quad \varphi_x(x, 0) = 0. \quad (2)$$

График $\varphi_x(x, 0)$ имеет вид солитона (рис. 5). При мягком включении для $\gamma < 0,058$ при больших t решение выходит на константу

$$\arcsin \gamma + n \cdot 2\pi.$$

При $\gamma = 0,058$ происходит срыв на односолитонную ветвь (ветвь $O_1 A_1$ на рис. II). На рис. 6 представлена типичная картина зависимости φ_x от x . С течением времени флюксон перемещается, переворачиваясь у стенок ($x = -l$, $x = l$). С увеличением γ высота флюксона возрастает и за ним появляется осциллирующий хвост (см. рис. 7, стрелкой указано направление движения).

При $\gamma = 0,54$ происходит срыв на резистивную ветвь:

$\varphi(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \omega t + \rho(\omega t)$, $\omega \approx \gamma/\alpha$. На рис. II резистивная ветвь дана пунктиром. При импульсном возбуждении γ , если $1,8 \leq \gamma_{max} \leq 3$ и $0,1 < \gamma < 0,52$, на численном эксперименте наблюдается двухсолитонное решение. В точке $\gamma = 0,52$ происходит

срыв на резистивную ветвь. На рис. II двухсолитонная ветвь - $O_2 A_2$. Аналогично односолитонной ветви с увеличением γ "головы" двухсолитонного решения возрастают, за ними появляются осцилляции, см. рис. 8-9.

Со временем флюксон перемещается, переворачиваясь у стенок.

Наконец, при импульсном возбуждении ($\gamma_{max} \approx 3,5$ при $\gamma < 0,24$) существует трехсолитонное решение, точнее два солитона и один антисолитон (см. рис. 10).

На рис. II трехсолитонная ветвь - $O_3 A_3$. Срыв на резистивную ветвь происходит при $\gamma = 0,24$. При срыве с $O_1 A_1$, $O_2 A_2$, $O_3 A_3$ солитон быстро "рассасывается" $\varphi(x, t) \rightarrow 0$. На солитонных ветвях зависимость $\omega(\gamma)$ существенно отличается от случая резистивной ветви $\omega \approx \gamma/\alpha$. Наблюдается следующее интересное явление. При переходе от $O_1 A_1$ к $O_2 A_2$, $O_3 A_3$ величина ω , грубо говоря, увеличивается соответственно в 2, 3 раза. Естественно было ожидать, что добавка ρ имеет период, кратный ω , и с возрастанием ω частота колебаний растет. Наблюдается обратное. При больших t с хорошей точностью наблюдается асимптотика:

$$\varphi(0, t) \rightarrow \omega_1(\gamma)t + \rho\left(\frac{\omega_1(\gamma)}{2}t\right) \text{ на односолитонной ветви; } t \rightarrow \infty$$

$$\varphi(0, t) \rightarrow \omega_2(\gamma)t + \rho\left(\frac{\omega_2(\gamma)}{4}t\right) \text{ на двухсолитонной ветви; } t \rightarrow \infty \quad (3)$$

$$\varphi(0, t) \rightarrow \omega_3(\gamma)t + \rho\left(\frac{\omega_3(\gamma)}{6}t\right) \text{ на трехсолитонной ветви. } t \rightarrow \infty$$

Соответственно на рис. 12 (а, б, в) видны ступени высоты 4π , 8π , 12π . Концы солитонных ветвей, точки A_1 , A_2 , A_3 указывают на сингулярности. Естественно, по результатам численных расчетов нельзя судить о точной картине расположения особенностей решения нелинейного дифференциального уравнения с параметрами. Но результаты численных экспериментов могут быть хорошим ориентиром для аналитического исследования. В таком смысле нас интересовал вопрос о возможности продолжения ветвей $O_1 A_1$, $O_2 A_2$, $O_3 A_3$. На возможность продолжения указывали отдельные точки за пределами этих ветвей. Так, случайно была обнаружена точка $\gamma = 0,45$, $\omega \approx 3,7$, которой отвечает трехсолитонное решение. Между тем простой деформацией импульса

$\mathcal{J}(t)$ не удавалось продолжить трехсолитонную ветвь $O_3 A_3$. Заметим, кстати, что при подходе к концам ветвей A_1, A_2, A_3 выбор импульсов, позволяющих удержаться на солитонной ветви, становится все более жестким. В результате напрашивалась мысль пытаться продолжить ветви другими средствами. В частности, естественно было попробовать задавать начальные данные, более близкие к асимптотике для больших t . Вспомним хотя бы, что при больших \mathcal{J} солитоны имеют осциллирующие хвосты. Для возбуждения двухсолитонного решения естественно иметь два солитона в начальных данных. Нам удалось преуспеть на этом пути. Для продолжения i -ой ветви мы использовали установившееся решение (I), отвечающее последней найденной на ветви точке $(\mathcal{J}, \omega_i(\mathcal{J}))$. В качестве начальных данных мы задавали мгновенное распределение $\rho(x, t)$ в момент времени

$$t = \frac{2i}{\omega_i(\mathcal{J})} 2\kappa\pi.$$

При этом κ выбиралось столь большим, чтобы в значении $\omega_i(\mathcal{J})$ установилось два знака после запятой. Продвигаясь с шагом $\Delta\mathcal{J} = 0,02$, начиная с точек A_1, A_2, A_3 , мы продолжили ветвь $O_1 A_1$ до $\mathcal{J} = 0,78$, ветви $O_2 A_2, O_3 A_3$ - до $\mathcal{J} = 0,8$, (см. рис. II).

§ 2. Неоднородный переход. $\mu = 0,5$

I. Не нулевые начальные данные

Численно решается задача (I): $\mu = 0,5$, $\alpha = 0,05$, в качестве начальных данных берется "хорошо сформированный" флюксон (2). Ситуация совершенно аналогична случаю $\mu = 0$: найдены три солитонные ветви, только слегка изменились их границы. Тем же способом, что и выше, эти ветви удалось продолжить (см. рис. I4).

Солитонные ветви отмечены сплошной линией. Односолитонная ветвь $O_1 A_1$ сначала была найдена ^{/I/} в пределах $0,068 \leq \mathcal{J} \leq 0,46$. Далее ее удалось продолжить до $\mathcal{J} = 0,76$. Двухсолитонная ветвь первоначально была найдена для $0,1 \leq \mathcal{J} \leq 0,3$. Далее ее удалось продолжить до $\mathcal{J} = 0,78$. Наконец, трехсолитонная ветвь первоначально была найдена ^{/I/} лишь для $0,18 \leq \mathcal{J} \leq 0,22$. Ее удалось продолжить до $\mathcal{J} = 0,69$. Явление увеличения высоты ступеней на графиках $\varphi(x, t)$ при переходе от односолитонной ветви к двух- и трехсолитонной ветвям сохраняется. При срыве на резистивную ветвь в неоднородном случае сразу образуется стоячая волна, длина которой убывает с ростом \mathcal{J} . На рис. I3 представлено мгновенное распределение магнитного поля по x для резистивного состояния при $\mathcal{J} = 0,3$. На графике хорошо виден разрыв φ_x при $x = 0$.

Напомним, что в однородном случае при срыве на резистивную ветвь $\varphi_x \rightarrow 0$.

2. Неоднородный переход. Нулевые начальные данные

Обсуждаются результаты численного решения задачи (I) при $\mu = 0,5$, $\alpha = 0,05$, $\varphi(x, 0) = \varphi_t(x, 0) = 0$. По сравнению с однородным переходом наблюдаются две новые ветви. Отличие состоит также в том, что в случае неоднородного перехода мгновенное распределение магнитного поля φ_x всегда зависит от x .

При мягком включении \mathcal{J} для $0 \leq \mathcal{J} \leq 0,68$ при больших t φ выходит на статическое решение, которое в отличие от $\mu = 0$ зависит от x . На рис. I5a, б представлено мгновенное распределение φ и φ_x при $t_0 = 250$, $\mathcal{J} = 0,066$; график $\varphi_x(x)$ имеет вид крышки.

$$\varphi(x, t_0) = \arcsin \mathcal{J} + \varphi_x(x).$$

При срыве на резистивную ветвь в точке $\mathcal{J} = 0,68$ сразу образуется стоячая волна, которая пульсирует и переворачивается.

В случае импульсного включения \mathcal{J} (для $\mathcal{J}_{\max} \geq 2,2$, $0,068 \leq \mathcal{J} \leq 0,103$) наблюдается новая ветвь $O_2 A_2$ (на рис. I4 эта ветвь отмечена пунктиром). Продолжить эту ветвь описанным выше способом не удалось. Мгновенное распределение магнитного поля φ_x имеет вид стоячей волны, или бризера, локализованного на микронеоднородности. На рис. I6a выбран момент, когда φ_x принимает максимальное значение.

Бризер "дышит", его высота меняется, со временем он переворачивается. С увеличением \mathcal{J} высота бризера растет. При $\mathcal{J} = 0,103$ происходит срыв на другую ветвь $O_2 \bar{A}_2$ (на рис. I4 эта ветвь отмечена пунктиром). Ей отвечают решения того же типа, но с амплитудой, существенно большей, рис. I6б. Это скорее не бризер, а связанное состояние солитона и антисолитона на микронеоднородности. Первоначально ^{/I/} эта ветвь была найдена на интервале $0,103 \leq \mathcal{J} \leq 0,25$. Задавая в качестве начальных данных солитон-антисолитон в последней найденной на ветви точке, удалось продолжить ветвь $O_2 A_2$ до $\mathcal{J} = 0,52$. Далее происходит срыв на резистивную ветвь

$$\varphi(0, t) \rightarrow \omega t + \rho(\omega t), \quad \omega \approx \frac{\mathcal{J}}{\alpha},$$

$$t \rightarrow \infty$$

Бризерная ветвь и ветвь "солитон-антисолитон" идут соответственно по одно- и двухсолитонным ветвям и им отвечают решения вида:

$$\varphi(0, t) \rightarrow \omega_2 t + \rho(\omega_2 t) \quad , \text{ на брызговой ветви};$$

$$\varphi(0, t) \rightarrow \omega_{3A} t + \rho\left(\frac{\omega_{3A} t}{2}\right), \text{ на ветви "солитон-антисолитон" (S-A).}$$

Для сравнения см. формулы (3). Нам удалось получить аналог ветви "солитон-антисолитон" в случае $\mu=0$ (см. пунктирную ветвь $O_2 \bar{A}_2$ на рис. II). В качестве начальных данных мы брали

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \alpha x \sin \gamma + 10 \operatorname{ch}(\sqrt{1-\gamma^2}(x-l)), \\ \varphi_t(x, 0) &= 0, \quad -l \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (4)$$

Ветвь "солитон-антисолитон" в случае однородного перехода найдена для $0,1 < \gamma \leq 0,62$. С ростом γ амплитуда S-A растет и появляются осцилляции. На рис. 17а-17в представлено мгновенное распределение магнитного поля в момент максимума амплитуды соответственно для $\gamma = 0,22$, $\gamma = 0,38$, $\gamma = 0,62$. На последнем из этих рисунков представлен момент срыва на резистивную ветвь. Здесь осцилляции достигают одной трети амплитуды. При переходе на резистивную ветвь S-A быстро рассасывается.

Мы пытались найти таким же образом аналог "брызговой" ветви в однородном случае. Если в (4) задавать γ , отвечающие "брызговой ветви", происходит быстрое перерождение "брызга" в солитон (решение, отвечающее односолитонной ветви).

§ 3. Численный алгоритм

Краевая задача (I) решается методом конечных разностей. Через τ , h обозначим шаги сетки по t , x соответственно. В расчетах $l = 2,5$, $h = 0,05$, $\tau = h/2$, $\alpha = 0,05$, $\mu = 0$, или $\mu = 0,45$. На отрезках $l \leq x < 0$, $0 < x \leq l$ основное уравнение аппроксимируется по схеме - крест. На стыке областей φ находится из аппроксимации второго порядка точности соотношения на разрыве

$$\varphi_x(+0, t) - \varphi_x(-0, t) = -\mu \sin \varphi(0, t).$$

Приведем расчетные формулы:

$$\begin{aligned} \varphi_0^n &= \varphi_0^1 = \varphi(-l + v h, 0), \quad 0 \leq v \leq N; \\ \varphi_v^{n+1} &= \left(1 + \frac{\alpha \tau}{2}\right)^{-1} \left\{ 2 \varphi_v^n - \varphi_v^{n-1} + \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 (\varphi_{v+1}^n - 2 \varphi_v^n + \varphi_{v-1}^n) - \tau^2 \sin \varphi_v^n + \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha \tau}{2} \varphi_v^{n-1} + \tau^2 \gamma^n \right\}, \quad 1 \leq v \leq v_0 - 1, \quad v_0 + 1 \leq v \leq N - 1; \end{aligned}$$

$$\varphi_0^{n+1} = \frac{4 \varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}}{3}, \quad n \geq 1;$$

$$\varphi_N^{n+1} = \frac{4 \varphi_{N-1}^{n+1} - \varphi_{N-2}^{n+1}}{3}, \quad n \geq 1.$$

После того как φ_v^{n+1} , $1 \leq v \leq v_0 - 1$, $v_0 + 1 \leq v \leq N - 1$ сосчитаны, $\varphi_{v_0}^{n+1}$ находится методом простых итераций:

$$\varphi_{v_0, k}^{n+1} = \mu h \sin \varphi_{v_0, k-1}^{n+1} - (\varphi_{v_0-2}^{n+1} - 4 \varphi_{v_0-1}^{n+1} - 4 \varphi_{v_0+1}^{n+1} + \varphi_{v_0+2}^{n+1}) / 6$$

$$\varphi_{v_0, 0}^{n+1} = \varphi_{v_0}^n.$$

Итерации сходятся быстро: за 10 итераций достигается относительная точность 10^{-13} . Для проверки корректности счета использовалось энергетическое соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{-l}^l \left[\frac{\varphi_t^2 + \varphi_x^2}{2} + (1 - \cos \varphi) - \gamma \varphi \right] dx - \mu (1 - \cos \varphi(0, t)) \right\} + \\ \alpha \int_{-l}^l \varphi_t^2 dx = 0. \end{aligned}$$

§ 4. Вывод асимптотической формулы

Краевая задача

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\alpha \dot{\varphi} - \sin \varphi + \gamma, \\ \varphi(0) &= \dot{\varphi}(0) = 0, \end{aligned}$$

эквивалентна /6/ интегральному уравнению

$$\varphi(t) = -\frac{\gamma}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\gamma t}{2} - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \{1 - e^{-\alpha(t-s)}\} \sin \varphi(s) ds.$$

Здесь предполагается, что γ не зависит от t , $\gamma/\alpha \gg 1$. Чтобы выяснить поведение $\varphi(t)$ при больших t , рассмотрим итерационный процесс:

$$\varphi_{k+1} = A + \omega t + c e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{-\alpha(t-s)}) \text{Sin } \varphi_k(s) ds,$$

$$A = -\gamma/\alpha^2, \quad c = -A, \quad \omega = \gamma/\alpha.$$

Положим $\varphi_0 = 0$, тогда $\varphi_1 = A + \omega t + c e^{-\alpha t}$. Считаем φ_2 : интегрируем по частям, под знак интеграла берем $\text{Sin } \varphi_1$. После однократного интегрирования по частям выражение под знаком интеграла разлагаем в ряды до $O(\omega^{-3})$, величины $O(\omega^{-4})$ и $O(e^{-\alpha t})$ отбрасываем. Оставшиеся интегралы берутся явно. В результате получаем

$$\varphi_2 \approx A + \omega t + \frac{\text{Sin}(A + \omega t)}{\omega^2} + \frac{\alpha \text{Cos}(A + \omega t)}{\omega^3} = \tilde{\varphi}_2, \quad (5)$$

$$A = -\gamma/\alpha^2 - \frac{\text{Cos } \frac{\gamma}{\alpha^2}}{\alpha \omega}, \quad \omega = \gamma/\alpha.$$

Аналогично, по $\tilde{\varphi}_2$ находим $\tilde{\varphi}_3$:

$$\tilde{\varphi}_3 = B + \left(\omega - \frac{1}{2\omega^3}\right)t + \frac{\text{Sin}(A + \omega t)}{\omega} + \frac{\alpha \text{Cos}(A + \omega t)}{\omega^3}.$$

Параметры ω определены в (5). Как уже отмечалось выше, последняя формула хорошо согласуется с результатами численных расчетов.

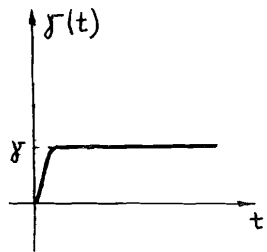


Рис. 1

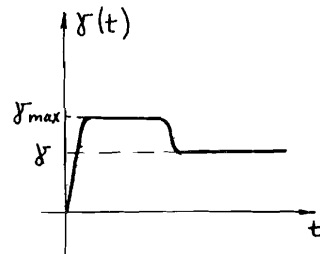


Рис. 2

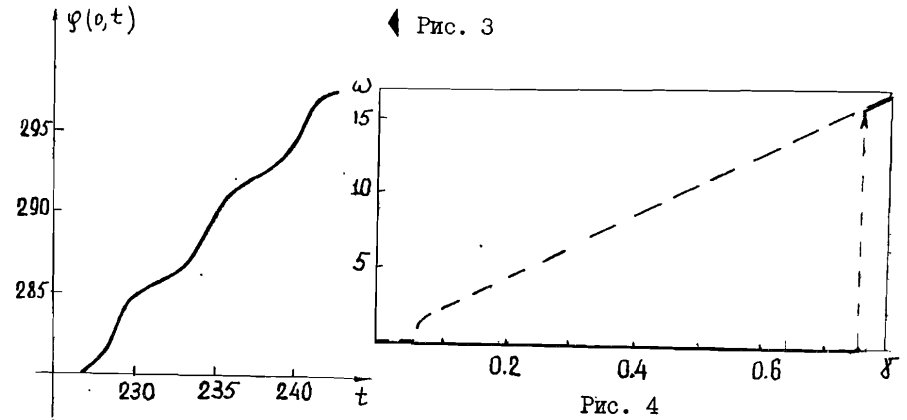


Рис. 3

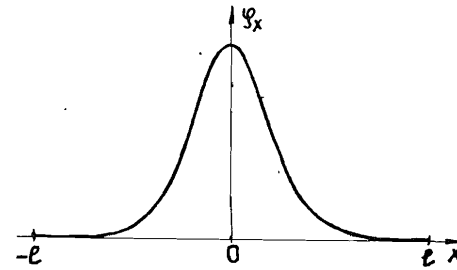


Рис. 4

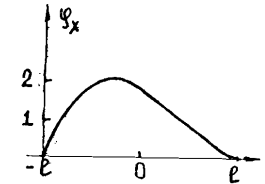


Рис. 5

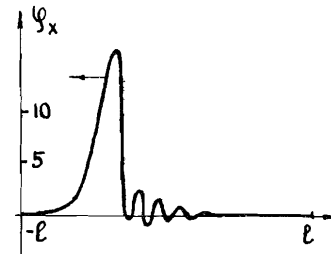


Рис. 6

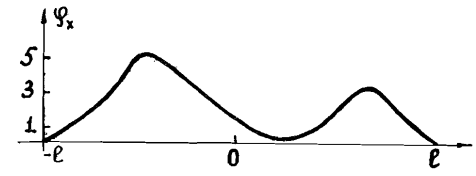


Рис. 7

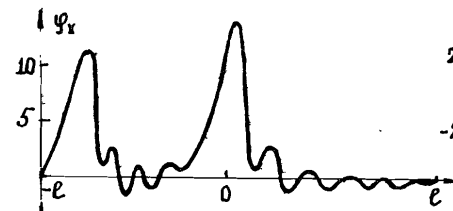


Рис. 8

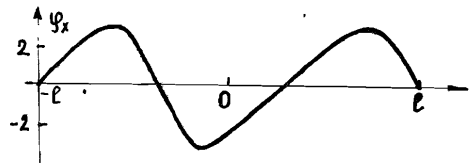


Рис. 9

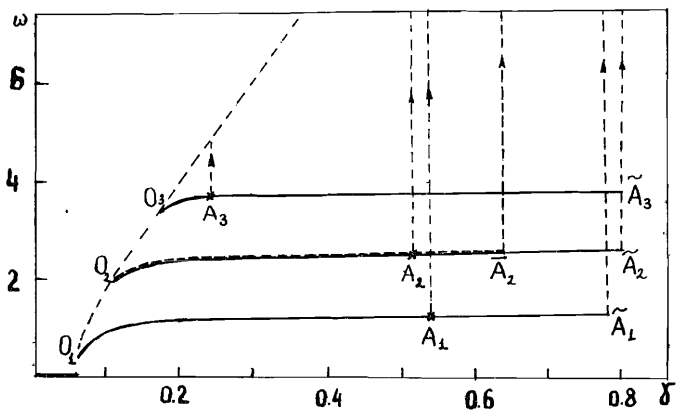


Рис. 11

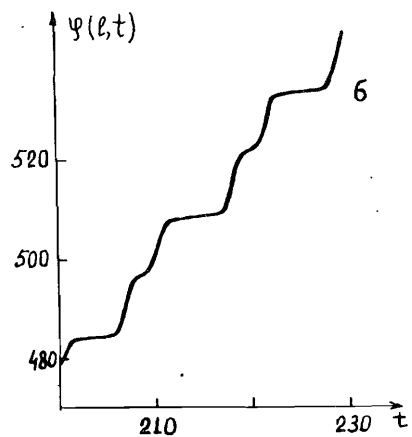
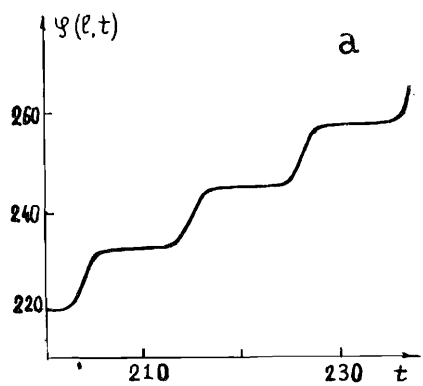


Рис. 12

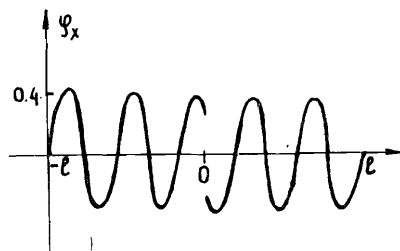
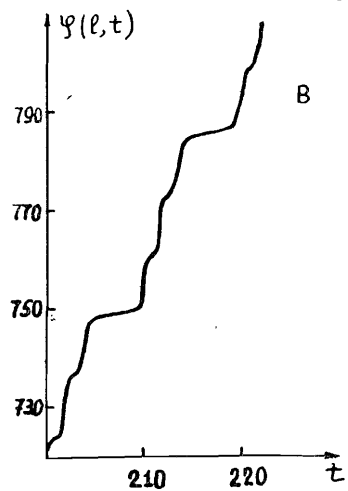


Рис. 13

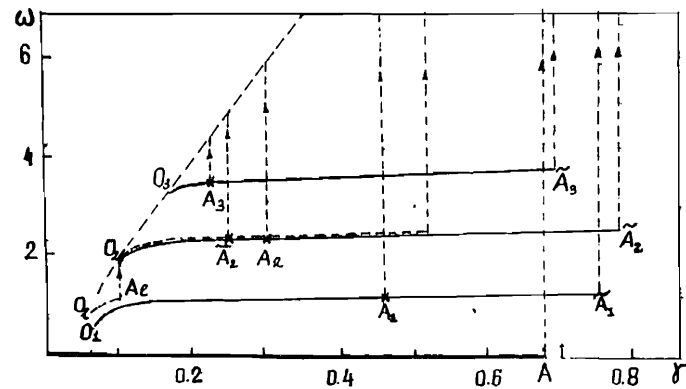


Рис. 14

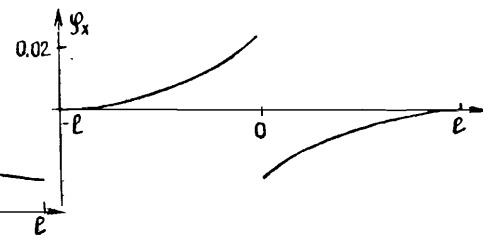
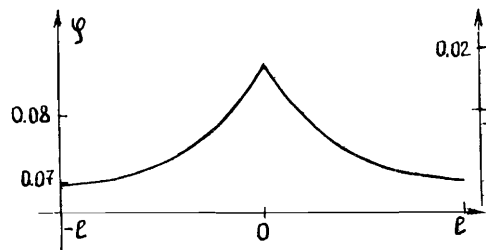


Рис. 15

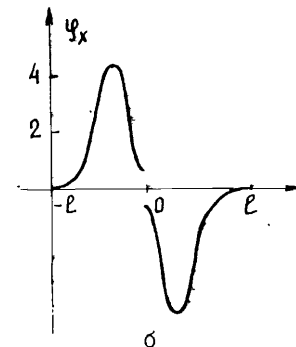
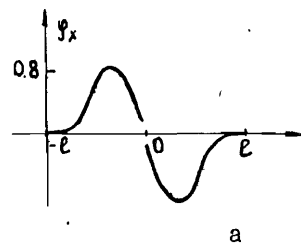


Рис. 16

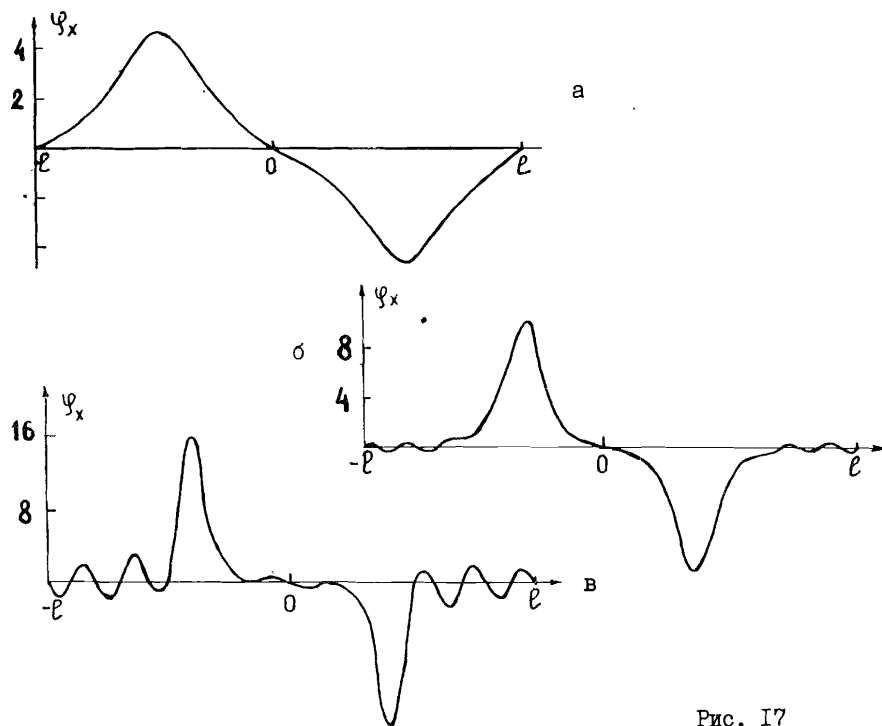


Рис. 17

Литература

1. Бахвалов Н.С., Гальперн Ю.С., Казача Г.С., Сердюкова С.И., Филиппов А.Т. Численное моделирование периодических режимов в одномерном джозефсоновском переходе с микро неоднородностями. Сообщение ОИЯИ, Р17-86-537, Дубна, 1986.
2. Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. Наука, М., 1985, 320 с.
3. Enpuku K., Yoshida K., Irie F. J. Appl. Phys., 1981, 52, p. 344.
4. Soerensen M.P., Christiansen P.L., Parmentier R.D., Skovgaard O., Appl. Phys. Lett., 1983, 42, p.739.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Ф-М Л, М., 1959, 915 с.
6. Levinson N. Stud. in Appl. Math. 1969, v. XLVIII, No.4, pp. 285-297.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июня 1987 года.

Казача Г.С., Сердюкова С.И.
Численное исследование поведения при больших t решений
уравнения синус-Гордона с сингулярностью

P11-87-434

Исследуются условия существования периодических режимов в одномерном джозефсоновском переходе конечной длины с микро неоднородностью. Численно решается уравнение синус-Гордона с сингулярностью $\phi_{tt} = \phi_{xx} - a\phi_t - (1 - \mu\delta(x))\sin\phi + \gamma(t)$. Установлено существование решений вида $\omega t + \rho(x,t)$, где $\rho(x,t)$ - ограниченная периодическая по t функция. Такие решения обнаружены также в однородном переходе /при $\mu = 0$ /. Периодические режимы удалось возбудить, управляя функцией тока $\gamma(t)$. Получены новые периодические режимы. Приведены графики зависимости ω от γ /вольт-амперные характеристики, ВАХ/. Выводится приближенная формула $\omega(\gamma, a)$ нелинейного участка резистивной ветви. Исследуется поведение $\rho(x,t)$ для различных ветвей ВАХ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Kazacha G.S., Serdyukova S.I.
The Numerical Investigation of the Sine-Gordon Equation
with Singularity Solutions Behaviour at Large t

P11-87-434

The existence conditions of the periodic regimes inside the Josephson junction of finite length with microhomogeneity are studied. The sine-Gordon equation with singularity $\phi_{tt} = \phi_{xx} - a\phi_t - (1 - \mu\delta(x))\sin\phi + \gamma(t)$ is solved numerically. The solutions of kind $\omega t + \rho(x,t)$ existence are established. Here $\rho(x,t)$ is finite, periodic function of t . Similar solutions are observed also in homogeneous junction (when $\mu = 0$). We succeeded to excite the periodic regimes by varying the current function $\gamma(t)$. New periodic regimes are obtained. The dependence ω on γ (current-voltage characteristics) graphs are presented. The approximate formulae $\omega(\gamma, a)$ of nonlinear part of the resistive branch is derived. The behaviour of $\rho(x,t)$ for different branches of the current-voltage characteristics is studied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987