сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-87-427

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков, В.Д.Кравцов

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1987

При проектировании и создании крупных электрофизических установок, в том числе ускорителей, часто возникает необходимость оптимизации параметров магнитных систем. При этом требования на распределение магнитного поля бывают самыми разнообразными. В одних случаях требуется однородное поле, в других - поле с постоянным градиентом и т.п. Физическое моделирование крупных установок в одних случаях просто невозможно, в других является крайне дорогостоящим процессом. Поэтому разработка алгоритмов решения подобных задач является весьма актуальной. В качестве примера можно привести программу MIRT из комплекса программ расчета двумерных и осесимметричных магнитных полей POISSON, в котором используется дифференциальная постановка /1/. Решению обратных задач также посвящены работы /2-4/, выполненные в ОИЯИ.

В данной работе для решения обратной задачи используется интегральная постановка уравнений магнитостатики. Ввиду сложности решения даже прямой нелинейной задачи в трехмерном случае, рассматриваются только двумерные и аксиально симметричные конфигурации. Но и в этом виде численное решение обратной задачи затруднительно. Поэтому рассматривают более узкую задачу оптимизации распределения магнитного поля только за счет варьирования токовых обмоток, не меняя конфигурацию железа.

§ I. Метод интегральных уравнений

Пусть $\vec{H}(\vec{x}), \vec{B}(\vec{x}), \vec{M}(\vec{x})$ - соответственно напряженность магнитного поля, индукция и магнитный момент в точке $\vec{x}$; G - область, заполненная железом; $\vec{H}^s(\vec{x})$ - напряженность магнитного поля, создаваемого обмотками с током. В двумерном случае имеет место следующее интегральное уравнение:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) - \frac{\nabla_{\vec{a}}}{2\pi} \int_G (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \ln|\vec{x}-\vec{a}|)\, dS_{\vec{x}} \,. \qquad (I)$$

Векторы $\vec{B}$, $\vec{H}$ и $\vec{M}$ связаны соотношениями:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \cdot \mu(|\vec{B}|)}, \qquad (2)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H},$$

где μ – магнитная проницаемость, нелинейная функция от $|\vec{B}|$, различная для разных типов железа, а μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

Решив нелинейное уравнение (I), можно определить индукцию поля $\vec{B}$ в произвольной точке, учитывая, что вне железа магнитная проницаемость тождественно равна единице.

Пусть G_w – область, в которой необходимо обеспечить требуемое распределение поля. Введем некий функционал $F(\vec{B}, G_w)$, являющийся критерием качества распределения поля.

Очевидно, функционал F зависит от $\vec{H}^s$ и G. Пусть $\{\alpha_i\}$ – набор параметров, однозначно определяющих токовые обмотки; следовательно, F зависит от G и $\{\alpha_i\}$.

Рассмотрим дискретизацию уравнения (I) из /5/. Разобьем G на подмножества G_i:

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i .$$

Мера пересечения G_i и G_j равна нулю при $i \neq j$. В качестве точки наблюдения в каждом G_i выберем его центр тяжести $\vec{a}_i$. Будем считать $\vec{M}$, $\vec{B}$ постоянными в каждом G_i и равными соответственно $\vec{M}_i$, $\vec{B}_i$. Тогда дискретизованная система уравнений примет вид:

$$\frac{\vec{B}_i}{\mu(|\vec{B}_i|)} = \mu_0 \vec{H}^s(\vec{a}_i) - \mu_0 \sum_{j=1}^{N} \frac{\nabla \vec{a}}{2\pi} \left[\int_{G_j} (\vec{M}_j, \nabla_{\vec{a}} \ln|\vec{x}-\vec{a}|)\, dS_{\vec{x}} \right] \Bigg|_{\vec{a}=\vec{a}_i} \qquad (3)$$

$i=1,2,\ldots,N$.

$\vec{B}_i$ и $\vec{M}_i$ удовлетворяют (2). Для пересчета поля в произвольную точку $\vec{a}$ заменим в (I) $\vec{M}(\vec{x})$ на кусочно-постоянную функцию $\hat{M}(\vec{x})$ ($\hat{M}(\vec{x}) = \vec{M}_j$ при $x \in G_j$), где $\{\vec{M}_i\}$ удовлетворяют (3). После этого можно определить значение функционала F для данного распределения обмоток (т.е. для данного набора параметров α_i).

В данной работе решение обратной задачи сводится к минимизации функционала F, выбранного согласно требуемым условиям на распределение поля.

Один из наиболее трудоемких моментов – вычисление коэффициентов матрицы, стоящей в правой части (3). Это обстоятельство потребовало сужения класса рассматриваемых задач. При постоянстве области G коэффициенты в правой части (3) вычисляются только один раз.

Из соображений уменьшения вычислительных затрат для минимизации функционала F использовался метод наискорейшего спуска в сочетании с методом "золотого сечения" /6/. Для реализации данного метода необходимо знать частные производные функционала F по параметрам α_i, которые заменялись следующими разностными соотношениями:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \simeq \frac{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \Delta_i, \ldots \alpha_L) - F(\alpha_1, \ldots \alpha_i, \ldots \alpha_L)}{\Delta_i} \qquad (4)$$

$i=1,2,\ldots,L$.

Таким образом, для проведения каждого шага процесса минимизации функционала F, необходимо знать $L+1$ значение F из (4). При этом, ввиду некорректности процедуры численного дифференцирования, необходимо определять значение функционала F с ошибкой много меньшей, чем значения Δ_i.

Пусть

$$\hat{B} = (\vec{B}_1, \vec{B}_2, \ldots, \vec{B}_N)^T$$

$$\hat{H}^s = (\vec{H}^s(\vec{a}_1), \vec{H}^s(\vec{a}_2), \ldots, \vec{H}^s(\vec{a}_N))^T,$$

$$\hat{M}(\hat{B}) = (\vec{M}(\vec{B}_1), \vec{M}(\vec{B}_2) \ldots, \vec{M}(\vec{B}_N))^T .$$

Пусть $[A]$ – матрица размерности $2N \times 2N$ из правой части (3). Сокращенно систему (3) можно записать в виде:

$$\hat{B} = (\hat{H}^s + ([A] + [E])\hat{M}(\hat{B}))\mu_0, \qquad (5)$$

где $[E]$ – единичная матрица.

Для решения нелинейной дискретизованной системы (5) использовался итерационный процесс из /5/:

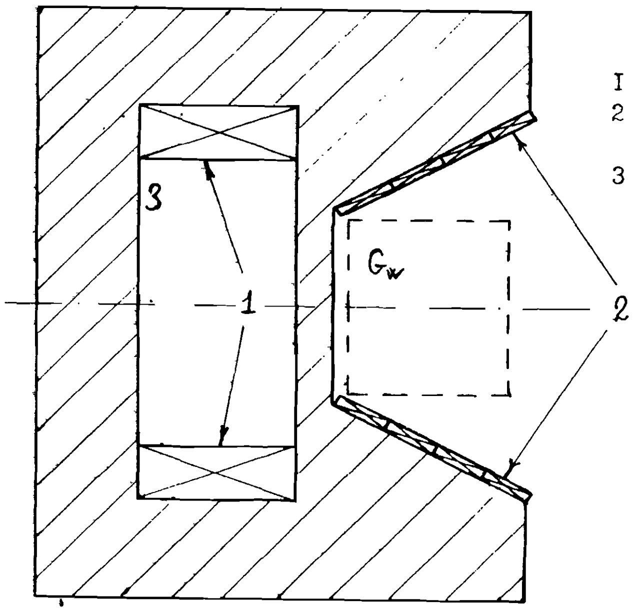
$$\hat{B}_{k+1} = (\hat{H}^s + ([A]+[E])\hat{M}(\hat{B}_k))\mu_0, \qquad (6)$$

$k=0,1,2,\ldots$

В качестве начального приближения $\hat{B}_0$ в (6) на каждом шаге процесса минимизации F использовалось решение $\hat{B}$ с предыдущего шага.

§ 2. Численные расчеты

Данная методика была реализована на базе комплекса программ расчета двумерных магнитостатических полей из[5]. Созданный алгоритм использовался при проектировании магнита Ламбертсона в нуклотроне ЛВЭ ОИЯИ (рис.I). В качестве параметров $\{\alpha_i\}$ брались величины токов в дополнительных обмотках.



I - основные обмотки
2 - дополнительные обмотки
3 - рабочая область

Рис.I. Поперечное сечение магнита Ламбертсона.

Основная задача, решаемая при проектировании , состояла в том, чтобы при однородности поля в рабочей области обеспечить его максимальное отсутствие в области G_w , чтобы как можно меньше искажать циркулирующий пучок. Для этого и были введены дополнительные обмотки. Функционал F был выбран в следующем виде:

$$F=\sqrt{\sum_{i=1}^{M}|\vec B(\vec a_i)|^2} ,$$

где $\vec a_i$ - набор точек, равномерно распределенных по области G_w . В результате значение F понизилось от ,5496 до ,II7, это потребовало 6 шагов процесса минимизации F . Область G разбивалась на 228 элементов; суммарный расход машинного времени составил I444 секунд центрального процесса ЭВМ CDC-6500 .

В некоторых практически интересных случаях возникает необходимость оптимизации распределения магнитного поля в отсутствие железа (только от токовых обмоток). Подобная задача рассматривалась также в[3]. В этом случае поле $\vec B(\vec a)$ в произвольной точке $\vec a$ вычисляется по закону Био-Саварра:

$$\vec B(\vec a) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{G_J}\left[\vec J(\vec x)\times\nabla_{\vec a}\frac{1}{|\vec x-\vec a|}\right]dv_{\vec x} , \qquad (7)$$

где G_J - область, в которой $\vec J(\vec x)$ не равно нулю. В двумерном случае (7) заменяется на следующее выражение:

$$\vec B(\vec a) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S_J}\left[\vec J(\vec x)\times\nabla_{\vec a}\ln|\vec x-\vec a|\right]dS_{\vec x} . \qquad (8)$$

Аналогично в осесимметричном случае $\vec B(\vec a)$ есть:

$$\vec B(\vec a) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_J} J(\vec x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{2}\vec e_i F_i(\vec x)\right) r\,dS_{\vec x} , \qquad (9)$$

где $\vec x = r_{\vec x}\vec e_1 + z_{\vec x}\vec e_2$; $F_1(\vec x)=\frac{\partial}{\partial z_{\vec a}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{r_{\vec x}^2+r_{\vec a}^2-2r_{\vec x}r_{\vec a}\cos\varphi+(z_{\vec x}-z_{\vec a})^2}}$;

$$F_2(\vec x) = -\frac{\partial}{\partial r_{\vec a}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{r_{\vec x}^2+r_{\vec a}^2-2r_{\vec x}r_{\vec a}\cos\varphi+(z_{\vec x}-z_{\vec a})^2}} .$$

$J(\vec x)$ - плотность тока в точке $\vec x$. Область S_J в (8),(9) - двумерная, как правило, состоит из объединения многоугольников, в каждом из которых $J(\vec x)$ постоянна.

В данной работе рассматривается алгоритм оптимизации распределения магнитных полей только для случаев (8),(9), поскольку вычисление поля (7) является достаточно трудоемкой задачей. Так же,как и в случае с наличием железа, вводится соответствующий функционал F , характеризующий качество распределения поля. Для вычисления его производных необходимо знать производные индукции $\vec B(\vec a)$ по параметрам области S_J . Проиллюстрируем соображения, использованные для их вычисления, на простейшем случае прямоугольной области (рис.2).

Воспользовавшись аддитивностью интегралов в правых частях (8), (9) от области S_J , получим, что производная интеграла в случае S_J=ABCD по координате x_1 сводится к интегралу по отрезку AB . Аналогичный результат получается и для более сложных областей.

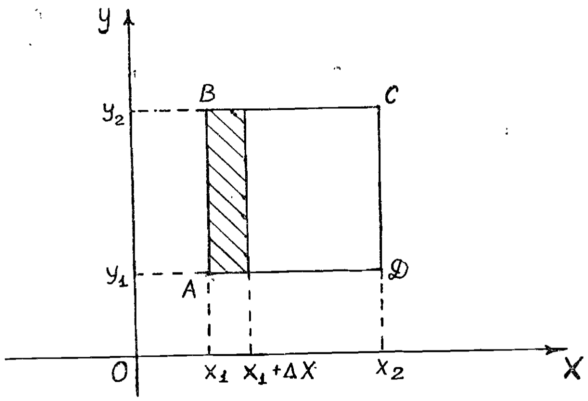


Рис.2.

Проиллюстрируем работу данного алгоритма на примере расчета одной осесимметричной конфигурации. При проектировании одного из узлов установки "М-СПИН" ЛЯП ОИЯИ возникла необходимость найти оптимальный профиль обмоток катушки Гельмгольца, обеспечивающий достаточную однородность магнитного поля в рабочей области (рис.3).

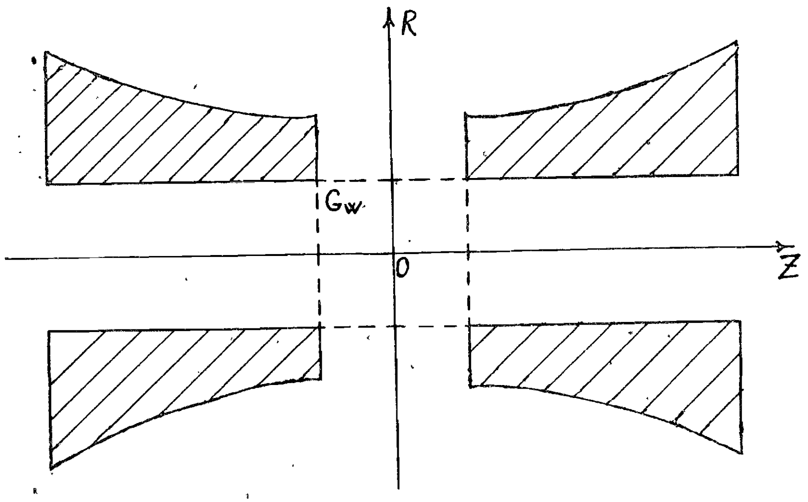


Рис.3. Продольный разрез катушки Гельмгольца.

Функционал F был выбран следующим образом:

$$F=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{L}|\vec{B}(\vec{a}_i)-\vec{B}(\vec{a}_o)|^2}{|\vec{B}(\vec{a}_o)|^2}},$$

где $\vec{a}_o$ – центр области G_w, а точки $\{\vec{a}_i\}$ равномерно распределены по границе G_1. В качестве параметров выбирались h_i, причем вначале профиль обмоток приближался двумя прямоугольниками, и параметрами служили соответственно h_1 и h_2; затем после минимизации функционала каждый прямоугольник делился пополам и функционал F минимизировался по четырем параметрам, причем в качестве начального приближения для минимизации использовались решения с предыдущего цикла:

$$h_1^{(2)} = h_2^{(2)} = h_1^{(1)}$$
$$h_3^{(2)} = h_4^{(2)} = h_2^{(1)}.$$

Описанный процесс удвоения числа параметров повторялся несколько раз (рис.4). В результате оптимизации значение функционала F уменьшилось с I,92 до 0,00I7.

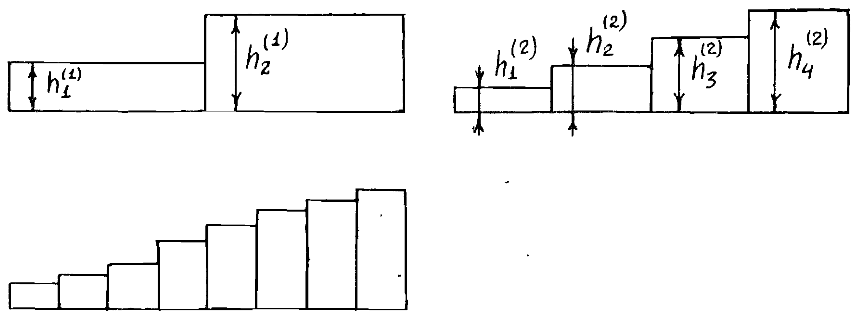


Рис.4.

В заключение авторы выражают благодарность И.Б.Иссинскому и И.А.Гаганову за постановку физических задач, стимулировавших данную работу.

Литература

1. Halbach K.H., Holsinger R.F., Magyary S. POISSON- a Group of Programs for Solving, Analysing and Optimizing Two Dimensional and Cylindrically Symmetric Magnetostatic and Electrostatic Problems.Abstracts of the V-th Int. Conf. of Magnet Technology, Roma, 1975.
2. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, II-10845, Дубна, 1977.
3. Полякова Р.В. ОИЯИ, II-12228, Дубна, 1979.
4. Александров В.С., Щинов Б.Г. Программа расчета сильноточных магнитных систем коллективного ускорителя с высокой степенью однородности поля. В сб.: Труды У Международного совещания по проблемам математического моделирования; ОИЯИ, Д10,11-84-818, Дубна, 1984.
5. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. ОИЯИ, Р11-86-534, Дубна, 1986.
6. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М., Изд-во Московского ун-та, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июня 1987 года.

Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Р11-87-427

Оптимизация распределения двумерных магнитных полей на основе метода интегральных уравнений

Рассматривается задача оптимизации распределения магнитного поля в двумерном случае. Для решения прямой задачи используется метод интегральных уравнений. Задача оптимизации сводится к нахождению минимума функционала, определяющего качество распределения магнитного поля. Создан комплекс программ, реализующий данный подход. Приводятся результаты численного моделирования.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G., Zhidkov E.P., Kravtsov V.D. P11-87-427

Optimization of the Magnetic Field Distribution in Two Dimensions Basing on the Integral Equation Method

The problem of optimization of the magnetic field distribution in two dimensions is considered. The integral equation method is used for solving the direct problem. The task is reduced to the minimization of some functional which defines the quality of magnetic field distribution. The code realizing this method is created. The results of numerical experiments are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987