87-414

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-87-414

Т.Жанлав, Е.П.Жидков

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

1987

В последнее время для численного решения задач математической физики часто применяется метод сплайн-коллокации. Это вызывается тем, что, во-первых, он сравним с традиционным методом конечных разностей по своей алгоритмической простоте и, во-вторых, дает приближенное решение сразу во всей рассматриваемой области, где ищется самое решение.

В настоящей работе рассматривается метод сплайн-коллокации численного решения общих краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольной области. Аналогичный вопрос для первой краевой задачи был рассмотрен в ряде работ /I-4, I7/.

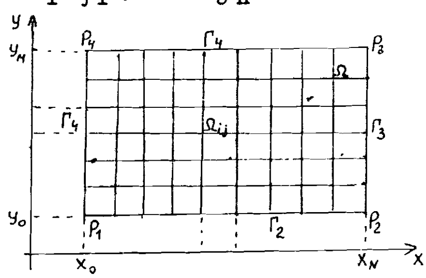
§ I. Постановка задачи и построение численного алгоритма

Рассмотрим на прямоугольнике $\Omega = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ с границей Γ (см.рисунок) краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{I}$$

$$\left(\alpha_i u + \beta_i \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\Gamma_i} = \Psi_i(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \quad i=1,2,3,4, \tag{2}$$

где $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производные по внешней нормали.



Предположим, что существует единственное классическое решение задачи (I), (2), имеющее непрерывные производные до второго порядка включительно. Это имеет место при некоторых ограничениях относительно функций f и Ψ_i /5/.

Для численного решения задачи (I), (2) введем сетку $\Delta = \Delta_N \times \Delta_M$, где

$$\Delta_N : a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_N = b \quad ,$$

$$\Delta_M : c = y_0 < y_1 < y_2 \ldots < y_M = d$$

– сетки соответственно вдоль осей OX и OY, которые характеризуются шагами

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad , \quad H = \max_i h_i \quad , \quad h = \min_j h_i \quad ,$$

$$\ell_j = y_{j+1} - y_j \quad , \quad L = \max_j \ell_j \; , \; \ell = \min_j \ell_j \quad .$$

Расширяя сетки Δ_N и Δ_M стандартным образом, будем искать приближенное решение задачи (I), (2) в виде бикубического сплайна /6/:

$$S(x,y) = \sum_{k=-1}^{N+1} \sum_{r=-1}^{M+1} b_{kr} B_k(x) \overline{B}_r(y) \quad , \tag{3}$$

где $B_k(x)$, $\overline{B}_r(y)$ – нормализованные B-сплайны одной переменной. Сплайн (3) можно представить в виде

$$S = \sum_{k=-1}^{N+1} b_k^1(y) B_k(x) = \sum_{r=-1}^{M+1} b_r^2(x) \overline{B}_r(y) \quad , \tag{4}$$

где

$$b_i^1(y) = \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij} \overline{B}_j(y) \quad , \quad b_j^2(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_{ij} B_i(x)$$

– одномерные кубические сплайны класса C^2.

Потребуем, чтобы сплайн (3) удовлетворил условиям

$$\Delta S_{ij} = - f_{ij} \quad (x_i, y_j) \in \Delta \setminus \overline{P} \quad , \quad \overline{P} = \bigcup_{k=1}^{4} P_k \quad ,$$

$$\Delta S_{ij} = - f_{ij} + \frac{h_i^2 + \ell_j^2}{6} D^{22} S_{ij} \quad , \quad (x_i, y_j) \in \overline{P} \quad , \tag{5}$$

$$\left(\alpha_i S + \beta_i \frac{\partial S}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma_i} = \Psi_i(M) \; , \quad M \in \Gamma \cap \Delta \quad i = 1,2,3,4 \quad . \tag{6}$$

<u>Замечание I</u>. Вместо уравнений в угловых точках можно взять такие же уравнения, как в остальных точках сетки Δ, и в связи с этим предполагается выполнение условия $D^{22} S_{ij} = 0$ в угловых точках. В обоих случаях получаются одни и те же уравнения относительно неизвестных b_{ij}.

Для того чтобы показать разрешимость задачи (5), (6), рассмотрим некоторые соотношения, вытекающие из краевых условий (6). Поскольку $S(x,y)$ становится одномерным кубическим сплайном на границе области Ω, то его можно найти следующим образом. На границе Γ_1 имеем $\alpha_1 S(x_0,y) - \beta_1 D^{10} S(x_0,y) = S_1(y) \in C^2$, и, следовательно, он представим в виде разложения

$$S_1(y) = \sum_{r=-1}^{M+1} \alpha_r^1 \overline{B}_r(y) \quad . \tag{7}$$

Условие (6) на границе Γ_1 является условием интерполяции для сплайна $S_1(y)$, и поэтому его можно найти, например, используя систему

$$S_1''(y_k) = \Psi_1''(y_k) \; , \; k=0,M; \; S_1(y_j) = \Psi_1(y_j) \; , \; j=0,\ldots,M \quad , \tag{8}$$

которая хорошо обусловлена и может быть решена методом монотонной прогонки /6/, если сетка Δ_M удовлетворяет условию

$$\rho_2 = \max_{|i-j|=1} \frac{\ell_j}{\ell_i} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad .$$

Далее согласно (4) имеем

$$S_1(y) = \sum_{r=-1}^{M+1} (\alpha_1 b_r^2(x_0) - \beta_1 b_r^{2\prime}(x_0)) \overline{B}_r(y) \, . \tag{9}$$

Сравнивая (7) с (9), получаем.

$$\alpha_r^1 = \alpha_1 b_r^2(x_0) - \beta_1 b_r^{2\prime}(x_0) = \sum_{k=-1}^{1} (\alpha_1 B_k(x_0) - \beta_1 B_k'(x_0)) b_{kr} , \quad r=-1,0,\ldots,M+1 . \tag{I0}$$

Это есть уравнение с тремя неизвестными $b_{-1,r}$, $b_{0,r}$, b_{1r} при каждом фиксированном r.

На границе Γ_3 аналогичным образом строится сплайн

$$S_3(y) = \alpha_3 S(x_N,y) + \beta_3 D^{10} S(x_N,y) = \sum_{r=-1}^{M+1} \alpha_r^3 \overline{B}_r(y) \quad ,$$

интерполирующий функцию $\Psi_3(y)$ на сетке Δ_M и удовлетворяющий, например, краевым условиям типа II, как и в (8).

В результате решения соответствующей системы найдем коэффициенты α_r^3, и, тем самым, мы имеем уравнения

$$\alpha_r^3 = \sum_{k=N-1}^{N+1} (\alpha_3 B_k(x_N) + \beta_3 B_k'(x_N)) b_{kr}\ , r=-1,0,\ldots,M+1. \qquad (11)$$

Точно таким же путем на границах Γ_2 и Γ_4 строятся сплайны

$$S_2(x) = \sum_{k=-1}^{N+1} \alpha_k^2 B_k(x)\ ,\quad S_4(x) = \sum_{k=-1}^{N+1} \alpha_k^4 B_k(x)\ .$$

Для этих сплайнов аналоги уравнений (10), (11) имеют вид

$$\alpha_k^2 = \sum_{r=-1}^{1} (\alpha_2 \bar{B}_r(y_o) - \beta_2 \bar{B}_r'(y_o)) b_{kr}\ , \qquad (12)$$

$$k=-1,0,\ldots,N+1,$$

$$\alpha_k^4 = \sum_{r=M-1}^{M+1} (\alpha_4 \bar{B}_r(y_M) + \beta_4 \bar{B}_r'(y_M)) b_{kr}\ . \qquad (13)$$

В построении граничных сплайнов выше мы предполагали, что заданы значения вторых производных функций Ψ_i , $i=1,\ldots,4$ в соответствующих угловых точках прямоугольника. В случае, когда заданы значения первых производных функций Ψ_i в угловых точках, в качестве краевых условий для сплайнов можно взять условия согласованности

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 \Psi_1 - \beta_2 \Psi_1' = \alpha_1 \Psi_2 - \beta_1 \Psi_2' \quad \text{в} \quad P_1(x_o,y_o)\ ,\\
&\alpha_4 \Psi_1 + \beta_4 \Psi_1' = \alpha_1 \Psi_4 - \beta_1 \Psi_4' \quad \text{в} \quad P_4(x_o,y_M)\ ,\\
&\alpha_2 \Psi_3 - \beta_2 \Psi_3' = \alpha_3 \Psi_2 + \beta_3 \Psi_2' \quad \text{в} \quad P_2(x_N,y_o)\ ,\\
&\alpha_3 \Psi_4 + \beta_3 \Psi_4' = \alpha_4 \Psi_3 + \beta_4 \Psi_3' \quad \text{в} \quad P_3(x_N,y_M)\ ,
\end{aligned} \qquad (*)$$

которые должны выполняться для задачи (1), (2).

Если же первые или вторые производные функций Ψ_i неизвестны или найти их трудно, то необходимо рассматривать краевые условия типа IУ /6/, которые легко реализуются на терминах коэффициентов представления сплайна через B-сплайны /7/. Отметим, что в качестве граничных сплайнов можно взять локальные сплайны, коэффициенты которых определяются явными формулами /8/. В частности, для сплайна $S_1(y)$ они выглядят так:

$$\begin{cases}
\alpha_j^1 = \Psi_1(y_j) + \dfrac{1}{3(\ell_j+\ell_1)}\left[\ell_j^2\, \dfrac{\Psi_1(y_j)-\Psi_1(y_{j-1})}{\ell_{j-1}} - \ell_{j-1}^2\, \dfrac{\Psi_1(y_{j+1})-\Psi_1(y_j)}{\ell_j}\right], \quad j=1,\ldots,M-1,\\
\sum\limits_{r=j-1}^{j+1} \alpha_r^1 \bar{B}_r(y_j) = \Psi_1(y_j)\ , \quad j=0,1,M,M+1.
\end{cases} \qquad (14)$$

Таким образом, краевые условия (6) преобразуются к видам (10)-(13), из которых только уравнения, соответствующие $r=-1$, $M+1$ и $k=-1$, $N+1$, содержат неизвестные $b_{-1,-1}, b_{-1,M+1}, b_{N+1,-1}, b_{N+1,M+1}$. Их мы будем называть посторонними. А неизвестные b_{ij} при $i=-1,N+1, j=0,\ldots,M$, $j=-1,M+1, i=0,\ldots,N$ назовем внеграничными.

В силу свойства B -сплайнов уравнения (5) не содержат в себе посторонних коэффициентов. Мы рассмотрим совокупность уравнений (5), (10)-(13), в которых отсутствуют посторонние коэффициенты. Они образуют систему из $(N+3)(M+3) - 4$ уравнений с теми же неизвестными. Из этой системы можно исключить внеграничные коэффициенты, используя "граничные" уравнения (10)-(13). Например, неизвестные $b_{-1,j}$ исключаются с помощью уравнений

$$\Delta S_{oj} = -f_{oj}\ ,$$

$$a_1 b_{-1,j} + c_1 b_{oj} + b_1 b_{1j} = \alpha_j^1\ , \quad j = 1,\ldots,M-1\ ,$$

где $a_1 = \alpha_1 B_{-1}(x_o) - \beta_1 B_{-1}'(x_o) > 0$, $c_1 = \alpha_1 B_o(x_o) - \beta_1 B_o'(x_o)$,

$$b_1 = \alpha_1 B_1(x_o) - \beta_1 B_1'(x_o)\ .$$

В результате получаем уравнения

$$A(x_o,y_j)\cdot b_{oj} = \sum_{k=0}^{1} \sum_{r=j-1}^{j+1}{}' B(x_k,y_r)\cdot b_{kr} + F_{oj}\ , \quad j=1,\ldots,M-1\ . \qquad (15)$$

Здесь штрих у суммы означает, что в нее не входит слагаемое, соответствующее при $k=0$, $r=j$.

Если $\beta_1 > 0$, то $b_1 < 0$ для достаточно малого шага h_o, и, тем самым, имеем $B(x_1, y_r) > 0$, $r = j-1,j,j+1$. Далее легко проверить, что $A(x_o,y_j) > 0$, а коэффициенты $B(x_o,y_{j-1})$, $B(x_o,y_{j+1})$ положительны при условии $2h^2 > L^2$. При этом имеем

$$D(x_o,y_j) = A(x_o,y_j) - \sum_{k=0}^{1} \sum_{r=j-1}^{j+1}{}' B(x_k,y_r) = \frac{\alpha_1}{a_1} B_{-1}''(x_o)\ , \quad j = 1,\ldots,M-1\ . \qquad (16)$$

Уравнение в угловой точке P_1 после исключения внеграничных неизвестных приобретает вид

$$A(x_o,y_o) b_{oo} = \tilde{B}(x_o,y_1) b_{o1} + \tilde{B}(x_1,y_o) b_{1o} + F_{oo}\ , \qquad (17)$$

где

$$A(x_o,y_o)=\frac{\alpha_2(2\ell_o+\ell_1)+3\beta_2}{\ell_o(2\ell_o+\ell_1)(\alpha_2\ell_o+3\beta_2)}+\frac{\alpha_1(2h_o+h_1)+3\beta_1}{h_o(2h_o+h_1)(\alpha_1h_o+3\beta_1)}>0\ ,$$

$$\widetilde{B}(x_o,y_1)=\frac{3\beta_2}{\ell_o(2\ell_o+\ell_1)(\alpha_2\ell_o+3\beta_2)}\geqslant 0\ ,\quad \widetilde{B}(x_1,y_o)=\frac{3\beta_1}{h_o(2h_o+h_1)(\alpha_1h_o+3\beta_1)}>0.$$

В угловой точке P_4 можно записать аналогичное уравнение с положительными коэффициентами $A(x_o,y_M)$, $\widetilde{B}(x_o,y_{M-1})$, $\widetilde{B}(x_1,y_M)$. Простое вычисление показывает, что

$$D(x_o,y_o)=A(x_o,y_o)-\widetilde{B}(x_o,y_1)-\widetilde{B}(x_1,y_o)=\frac{\alpha_1}{h_o(\alpha_1h_o+3\beta_1)}+\frac{\alpha_2}{\ell_o(\alpha_2\ell_o+3\beta_2)}\ , \tag{I8}$$

$$D(x_o,y_M)=A(x_o,y_M)-\widetilde{B}(x_o,y_{M-1})-\widetilde{B}(x_1,y_M)=\frac{\alpha_1}{h_o(\alpha_1h_o+3\beta_1)}+\frac{\alpha_4}{\ell_{M-1}(\alpha_4\ell_{M-1}+3\beta_4)}\ .$$

Из (I6), (I8) ясно, что

$$D(x_o,y_j)\geqslant 0\quad ,\ j=0,\dots,M\ . \tag{I9}$$

Аналогичный результат имеет место и для других границ.

Если же $\beta_1=0$, то легко видеть, что уравнения (I5) принимают вид

$$\overline{B}_{j-1}(y_j)\,b_{o\,j-1}+\overline{B}_j(y_j)b_{oj}+\overline{B}_{j+1}(y_j)b_{oj+1}=\widetilde{F}_{oj},\ j=1,\dots,M-1\ . \tag{20}$$

А уравнение (I7) в угловой точке P_1 превращается в вид

$$b_{oo}=\chi_1 b_{o1}+\mu_1\ ,\quad 0<\chi_1<1\ .$$

То же самое имеет место и в точке P_4. В этом случае неравенство (I9) имеет место, если сетка по y удовлетворяет условию $\rho_2<(1+\sqrt{13})/2$.

Во внутренних точках сеточной области уравнения (5) записываются в виде

$$A(x_i,y_j)b_{ij}=\sum_{k=i-1}^{i+1}\ \sum_{r=j-1}^{j+1}{}' B(x_k,y_j)b_{kr}+f_{ij}\ ,\ (k\neq i,r\neq j)\ ,$$

где

$$A(x_i,y_j)=-B_i''(x_i)\overline{B}_j(y_j)-B_i(x_i)\overline{B}_j''(y_j)>0\ ,$$

$$B(x_k,y_r)=B_k''(x_i)\overline{B}_r(y_j)+B_k(x_i)\overline{B}_r''(y_j)\ .$$

В силу свойства В-сплайнов положительны $B(x_{i-1},y_{j-1})$, $B(x_{i+1,j-1})$, $B(x_{i-1},y_{j+1})$ и $B(x_{i+1},y_{j+1})$, а остальные коэффициенты $B(x_k,y_j)$ в сумме положительны при условиях /4/

$$H\leqslant 2h\ ,\ L\leqslant 2\ell\ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{H}{L}\leqslant\sqrt{2}\ ;\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{h}{\ell}\leqslant\sqrt{2}\ . \tag{2I}$$

При этом имеет место

$$D(x_i,y_j)=A(x_i,y_j)-\sum_{k=i-1}^{i+1}\ \sum_{r=j-1}^{j+1}{}' B(x_k,y_r)=0\ ,\quad i=1,\dots,N-1;\ j=1,\dots,M-1\ . \tag{22}$$

Теперь, принимая во внимание (I6), (I8), (I9) и (22), по принципу максимума /9,I2/ приходим к выводу, что система (5), (I0)-(I3), в которой отсутствуют посторонние и внеграничные коэффициенты, разрешима на сетке Δ, удовлетворяющей условию (2I), если хотя бы один из коэффициентов α_i в краевых условиях (6) больше нуля. После решения этой системы внеграничные неизвестные однозначно определяются с помощью уравнений (I0)-(I3). Наконец, посторонние коэффициенты, например $b_{-1,-1}$, либо определяются из уравнения (I0) при $r=-1$, либо из (I2) при $k=-1$. Можно показать, что в силу условий согласованности (ж) и то и другое дает одинаковый результат. Аналогичным образом определяются однозначно и остальные посторонние коэффициенты.

§ 2. Сходимость приближенного решения к точному

Пусть решение задачи (I)-(2) принадлежит классу $C^{k,\lambda}[\bar{\Omega}]$, т.е. $u\in C^{k,\lambda}[\bar{\Omega}]$, $k\geqslant 2$, $0<\lambda\leqslant 1$. Тогда /5/ обязательно выполняются включения $f\in C^{k-2,\lambda}[\Omega]$, $\Psi_i\in C^{k,\lambda}(\Gamma_i)$. Пусть $k=2$. Здесь мы требуем выполнения включений $f\in CW^2_{\Delta,\infty}[\bar{\Omega}]$, $\Psi_i\in C^2W^4_{\Delta,\infty}(\Gamma_i)$. Предположим, что хотя бы один из коэффициентов α_i в краевых условиях (2) больше нуля. Имеет место

Теорема. Скорость сходимости приближенного решения S и его первых двух производных характеризуется равенствами

$$\max_{\bar{\Omega}}|S-u|=O(H^2+L^2)\ , \tag{23}$$

$$\max_{\bar\Omega'}\left|\frac{\partial^r}{\partial x^r}(S-u)\right| \approx \max_{\bar\Omega'}\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}(S-u)\right| = O(H^2+L^2), r,k=1,2 \quad , \tag{24}$$

где $\bar\Omega' = \{x_0+H \le x \le x_N-H \ , \ y_0+L \le y \le y_M-L\}$.

Доказательство. Пусть $z = S-u$. Ясно, что z удовлетворяет уравнениям

$$\Delta z = R \ , \ (x,y)\in\bar\Omega \ ,$$

$$(\alpha_i z + \beta_i \frac{\partial z}{\partial n})_{\Gamma_i} = \widetilde\Psi_i(M) \ , \ M\in\Gamma \ , \tag{25}$$

где $R = \Delta S+f$, $\widetilde\Psi_i = -\Psi_i + S_i(\Psi_i)$. Здесь $S_i(\Psi_i)$ – граничные кубические сплайны, интерполирующие функции ψ_i. Оценим правые части задачи (25). Согласно свойствам кубических сплайнов класса $C^2(\bar\Omega)$ имеет место включение $R\in CW^2_{\Delta,\infty}[\bar\Omega]$. Построим для нее билинейный интерполяционный сплайн S_{11} на сетке Δ. Тогда по теореме 2.3 /6/ справедливо

$$\| R - S_{11}\|_{C(\bar\Omega)} = O(H^2+L^2).$$

По построению сплайна $S(x,y)$ имеем $R(x_i,y_j)=0$, $(x_i,y_j)\in\Delta\setminus P$ и $R(x_i,y_j)=O(H^2+L^2)$, $(x_i,y_j)\in P$. Тогда очевидно, что $S_{11}(R,x,y) = O(H^2+L^2)$ и, тем самым, мы имеем

$$\|R\|_{C(\bar\Omega)} = O(H^2+L^2). \tag{26}$$

Далее, согласно теореме 3.5 /6/ справедливы оценки

$$\widetilde\Psi_i = O(L^4) \ , \ i=1,3; \quad \widetilde\Psi_i = O(H^4) \ , \ i=2,4. \tag{27}$$

Пусть G – решение задачи

$$\Delta G = -\delta(M,P) \ ,$$
$$(\alpha_i G + \beta_i \frac{\partial G}{\partial n})_{\Gamma_i} = 0 \ . \tag{28}$$

Тогда для решения задачи (25) имеет место формула /I5/

$$z(P) = \int_\Gamma (G\frac{\partial z}{\partial n} - z\frac{\partial G}{\partial n})d\Gamma_M - \iint_\Omega G(M,P)R(M)d\sigma_M . \tag{29}$$

При этом функция Грина представляется в виде

$$G(M,P) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP}} + v(M,P) \ , \tag{30}$$

где $r_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, $v(M,P)$ – гармоническая функция, удовлетворяющая некоторым краевым условиям. Она единственна в случае, когда хотя бы один из коэффициентов α_i больше нуля. Из краевых условий для z и G вытекают, что

$$\frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{1}{\beta_i}\widetilde\Psi_i - \frac{\alpha_i}{\beta_i}z \ ; \ \frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}G \ , \qquad \beta_i \ne 0 \ ,$$

$$z = \frac{1}{\alpha_i}\widetilde\Psi_i - \frac{\beta_i}{\alpha_i}\frac{\partial z}{\partial n} \ ; \ G = -\frac{\beta_i}{\alpha_i}\frac{\partial G}{\partial n} \ , \qquad \alpha_i \ne 0 \ .$$

В зависимости от этих случаев граничный интеграл в (29) сводится к следующим интегралам:

$$\int_{\Gamma_i}(G\frac{\partial z}{\partial n} - z\frac{\partial G}{\partial n})d\Gamma_M = -\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\beta_i}\widetilde\Psi_i G d\Gamma_M \ , \quad \beta_i \ne 0 \ , \tag{31}$$

$$\int_{\Gamma_i}(G\frac{\partial z}{\partial n} - z\frac{\partial G}{\partial n})d\Gamma_M = -\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\alpha_i}\widetilde\Psi_i \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma_M \ , \quad \alpha_i \ne 0 \ . \tag{32}$$

В результате решение задачи (25) представляется в виде

$$z(P) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{i=1}^{\ell'}\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\beta_i}\widetilde\Psi_i \ln\frac{1}{r_{MP}}d\Gamma_M + \sum_{i=1}^{\ell'}\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\alpha_i}\widetilde\Psi_i\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}d\Gamma_M + \iint_\Omega R(M)\ln\frac{1}{r_{MP}}d\sigma_M\right\} - z^*(P) = \tilde z(P) - z^*(P) \ , \tag{33}$$

где

$$z^*(P) = \sum_{i=1}^{\ell'}\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\beta_i}\widetilde\Psi_i(M)v(M,P)d\Gamma_M + \sum_{i=1}^{\ell'}\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\alpha_i}\widetilde\Psi_i(M)\frac{\partial}{\partial n}v(M,P)d\Gamma_M + \iint_\Omega R(M)v(M,P)\,d\sigma_M \ , \quad 1\le \ell' \le 4 \ . \tag{34}$$

Поскольку v - гармоническая функция в области Ω, то интегралы в (34) являются собственными, и поэтому для $z^*(P)$ справедлива оценка

$$\max_{\bar\Omega}|z^*(P)| \le \sum_i K_i \max_{M\in\Gamma_i}|\widetilde\Psi_i(M)| + K_5\max_{M\in\bar\Omega}|R(M)| \ , \tag{35}$$

где $K_i < \infty$ - ограниченные константы.

Интеграл по области Ω в (33) представляет собой интеграл типа объемного потенциала. Как известно /I4,I5/, он определен и непрерывен всюду. Более того, он имеет всюду непрерывные частные производные первого порядка, причем равномерно сходятся в окрестности точки P интегралы от производных

$$\iint\limits_{\Omega} R(M)\,\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r_{MP}}\,d\sigma_M\ ;\ \iint\limits_{\Omega} R(M)\,\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{1}{r_{MP}}\,d\sigma_M\ ,$$

и тем самым имеем /I5/

$$\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_{\Omega} R\cdot\ln\frac{1}{r_{MP}}\,d\sigma_M = \iint\limits_{\Omega} R(M)\,\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r_{MP}}\,d\sigma_M\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_{\Omega} R\,\ln\frac{1}{r_{MP}}\,d\sigma_M = \iint\limits_{\Omega} R(M)\,\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{1}{r_{MP}}\,d\sigma_M\ .$$

Граничные интегралы в (33) являются несобственными, и поэтому, чтобы получить оценку для $z(P)$, мы сначала ограничимся случаем

$$P\in\bar{\Omega}^* = \left\{x_0+\delta\le x\le x_N-\delta\,,\ y_0+\Delta\le y\le y_N-\Delta\right\}\ .$$

Здесь δ и Δ - достаточно малые положительные числа. В этом случае нетрудно проверить, что

$$\left|\ln\frac{1}{r_{MP}}\right|\le\left|\frac{1}{\sqrt{r_{MP}}}-2+2\ln 2\right|\le\frac{1}{\sqrt{\gamma}}+2+2\ln 2\ ,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right|\le\frac{1}{r}\le\frac{1}{\gamma}\ ;\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right|\le\frac{1}{r}\le\frac{1}{\gamma}\ , \qquad (36)$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right|\le\frac{1}{\gamma^2}\ ;\ \left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right|\le\frac{1}{\gamma^2}\ ,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right|\le\frac{2}{\gamma^2}\ ,\quad M\in\Gamma\ ,$$

где

$$\gamma=\begin{cases}\delta\,, & \text{если}\quad M\in\Gamma_1,\Gamma_3\ ,\\ \Delta\,, & \text{если}\quad M\in\Gamma_2\,,\Gamma_4\ .\end{cases}$$

Учитывая (36) и свойства объемного потенциала, получим оценку для выражения, стоящего в фигурных скобках в (33):

$$\max_{\bar{\Omega}^*}\left|\tilde{z}(P)\right|\le\sum_i \bar{K}_i\,\frac{\max\limits_{M\in\Gamma_i}|\tilde{\Psi}_i(M)|}{\gamma}+\bar{K}_5\max_{M\in\bar{\Omega}}|R(M)|\,, \qquad (37)$$

где $\bar{K}_i<+\infty$ - ограниченные константы. Пусть $\delta=O(H^2)$, $\Delta=O(L^2)$ и

$H\approx O(L)$. Тогда из оценок (26), (27), (35) и (37) следует, что $\max\limits_{\bar{\Omega}^*}|z| = O(H^2+L^2)$. Пусть $P\in\bar{\Omega}\setminus\bar{\Omega}^*$.

В силу непрерывности z и его производных имеем

$$z(P) = z\Big|_{\Gamma(\bar{\Omega}^*)}+\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}(P-Q)\ ,$$

где Q - граничная точка области $\bar{\Omega}^*$, лежащая вместе с P на прямой, параллельной координатным осям. Из оценки для $z(P)$ в области $\bar{\Omega}^*$ и $P-Q=O(H^2+L^2)$ легко следует (23). Далее, в силу оценок (36) нетрудно убедиться в законности дифференцирования по параметру под знаком интеграла в граничных интегралах в (33) в области $\bar{\Omega}^*$, и тем самым имеем

$$\max_{\bar{\Omega}^*}\left|\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}\right|\le\sum_i D_i\,\frac{\max\limits_{M\in\Gamma_i}|\tilde{\Psi}_i(M)|}{\gamma^2}+D_5\max_{M\in\bar{\Omega}}|R(M)|\ . \qquad (38)$$

А для $\omega_i^1(y_j) = D^{02}\delta_x z^*$ справедлива оценка типа (35). Таким образом, если ... и $\Delta=O(L)$, то ясно, что для $\frac{\partial z}{\partial x}$ справедлива оценка (24) в области $\bar{\Omega}'$. Аналогично доказывается (24) и для производной $\frac{\partial z}{\partial y}$. Рассмотрим теперь выражение

$$\frac{\partial z(P)}{\partial x}-\frac{\partial z(x_1,y)}{\partial x}=\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx=\frac{\partial^2 z(\xi,y)}{\partial x^2}(x-x_1)\ ,\quad \xi\in(x_1,x)\ ,$$

которое справедливо для всех $y\in(y_1,y_{N-1})$. Без ограничения общности здесь можно полагать, что $x\in\left(\frac{x_1+x_{N-1}}{2},x_{N-1}\right)$. Если $x\in\left(x_1,\frac{x_1+x_{N-1}}{2}\right)$, то вместо предыдущего интеграла можно взять интеграл по отрезку $[x,x_{N-1}]$. Согласно доказанному выше левая часть последнего равенства есть величина $O(H^2+L^2)$ при $P\in\bar{\Omega}'$. Следовательно, имеем

$$\frac{\partial^2 z(\xi,y)}{\partial x^2}=O(H^2+L^2)\ ,\ y\in(y_1,y_{N-1})\ . \qquad (39)$$

Отсюда и из равенства (25) с учетом (26) имеем

$$\frac{\partial^2 z(\xi,y)}{\partial y^2}=O(H^2+L^2)\ ,\ y\in(y_1,y_{N-1})\ . \qquad (39')$$

Аналогично рассматривая выражение

$$\frac{\partial z(P)}{\partial y}-\frac{\partial z(x,y_1)}{\partial y}=\int\limits_{y_1}^{y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy=\frac{\partial^2 z(x,\eta)}{\partial y^2}(y-y_1)\,,$$

переходим к равенствам

$$\frac{\partial^2 z(x,\eta)}{\partial y^2} \approx \frac{\partial^2 z(x,\eta)}{\partial x^2} = O(H^2+L^2) \ , \quad x\in(x_1,x_{N-1}) \ . \qquad (39'')$$

Из равенств (39) следует, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, O(H^2+L^2) \ , \quad P\in\bar{\Omega}' .$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Рассматривая величины

$$\frac{\partial z(P)}{\partial y} - \frac{\partial z(x_1,y)}{\partial y} = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx = \frac{\partial^2 z(\xi,y)}{\partial x\partial y}(x-x_1),$$

$$\frac{\partial z(P)}{\partial x} - \frac{\partial z(x,y_1)}{\partial x} = \int\limits_{y_1}^{y} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,dy = \frac{\partial^2 z(x,\eta)}{\partial y\,\partial x}(y-y_1).$$

нетрудно получить, что

$$\frac{\partial^2 z(\xi,y)}{\partial x\partial y} = O(H^2+L^2) \ , \quad y\in(y_1,y_{N-1}) \ , \quad \xi\in(x_1,x),$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\eta)}{\partial y\partial x} = O(H^2+L^2) \ , \quad x\in(x_1 x_{N-1}) \ , \quad \eta\in(y_1,y).$$

Это означает, что при $P\in\bar{\Omega}'$ величина $\frac{\partial^2 z(P)}{\partial x\partial y}$ тоже является малой.

§ 3. Итерационный метод решения сеточных уравнений

Решение системы (5), (I0)-(I3) можно найти, используя как прямые, так и итерационные методы. В работе /2/ была предложена итерационная схема решения системы в дробных шагах, численная реализация которой сводится к последовательному решению по строкам и столбцам системы уравнений трехточечной прогонкой. Аналогичную схему можно предложить для нашей задачи. Однако даже для равномерной сетки неизвестны спектральные свойства матрицы полученной системы, необходимые для оптимизации алгоритма, и поэтому схема требует, вообще говоря, большего числа итераций. Ниже мы будем рассматривать одну упрощенную схему для задачи (I), (2) на равномерной сетке. Сначала отметим некоторые свойства коэффициентов представлений (3), (4). По определению одномерных сплайнов $b_k^1(y)$, $b_r^2(x)$ имеем

$$D^{02}b_k^1(y_j) = \frac{2}{\ell_j+\ell_{j-1}}\left[\frac{b_{k,j+1}-b_{kj}}{\ell_j} - \frac{b_{kj}-b_{k,j-1}}{\hat{\ell}_{j-1}}\right] \equiv (\Lambda_2 b)_{kj} \ , \qquad (40)$$

$$D^{20}b_r^2(x_i) = \frac{2}{h_i+h_{i-1}}\left[\frac{b_{i+1,r}-b_{ir}}{\hat{h}_i} - \frac{b_{ir}-b_{i-1,r}}{\hat{h}_{i-1}}\right] \equiv (\Lambda_1 b)_{ir} \ ,$$

где $\hat{h}_i = (h_{i-1}+h_i+h_{i+1})/3$, $\hat{\ell}_j = (\ell_{j-1}+\ell_j+\ell_{j+1})/3$.

Из представлений (4) следует /8/, что

$$b_k^1(y) = S(x_k,y) + \frac{h_k-h_{k-1}}{3}D^{10}S(x_k,y) - \frac{h_k h_{k-1}}{6}D^{20}S(x_k,y) \ , \qquad (4I)$$

$$b_r^2(x) = S(x,y_r) + \frac{\ell_r-\ell_{r-1}}{3}D^{01}S(x,y_r) - \frac{\ell_r\ell_{r-1}}{6}D^{02}S(x,y_r), \ r=0,\dots,M.$$

Следовательно,

$$D^{02}b_i^1(y_j) = D^{02}S_{ij} + \frac{h_i-h_{i-1}}{3}D^{12}S_{ij} - \frac{h_i h_{i-1}}{6}D^{22}S_{ij} \ , \qquad (42)$$

$$D^{20}b_j^2(x_i) = D^{20}S_{ij} + \frac{\ell_j-\ell_{j-1}}{3}D^{21}S_{ij} - \frac{\ell_j\ell_{j-1}}{6}D^{22}S_{ij} \ .$$

Из равенств (40), (42) сразу следует, что

$$\Delta S_{ij} = (\Lambda_1 b)_{ij} + (\Lambda_2 b)_{ij} - \frac{h_i-h_{i-1}}{3}D^{12}S_{ij} - \frac{\ell_j-\ell_{j-1}}{3}D^{21}S_{ij} + \frac{h_i h_{i-1}+\ell_j\ell_{j-1}}{6}D^{22}S_{ij} \ , \ (x_i,y_j)\in\Delta \ . \qquad (43)$$

В отличие от (5) потребуем, чтобы S удовлетворял уравнениям

$$\Delta S_{ij} = -f_{ij} - \frac{h_i-h_{i-1}}{3}D^{12}S_{ij} - \frac{\ell_j-\ell_{j-1}}{3}D^{21}S_{ij} + \frac{h_i h_{i-1}+\ell_j\ell_{j-1}}{6}D^{22}S_{ij},$$

которые эквивалентны уравнениям

$$(\Lambda_1 b + \Lambda_2 b)_{ij} = -f_{ij} \quad (x_i,y_j)\in\Delta \ . \qquad (44)$$

Таким образом, мы перешли от девятиточечной схемы к пятиточечной схеме. Уравнение (44) вместе с условиями (I0)-(I3) образуют замкнутую систему, которая разрешима при тех же ограничениях, что и система (5), (I0)-(I3). Из (44) ясно, что для коллокационного сплайна теорема сходимости остается в силе не только для равномерной сетки, но и для неравномерных сеток, удовлетворяющих условиям

$$h_i - h_{i-1} = O(H^2), \qquad i = 1,\dots,N-1, \tag{45}$$
$$\ell_j - \ell_{j-1} = O(L^2), \qquad j = 1,\dots,M-1.$$

Очевидно, что для сеток,не удовлетворяющих условиям (45), имеет место

$$\| D^{r+S}(S-U) \|_{C(\overline{Q})} \leq K_{rS}(H+L) \quad , \qquad 0 \leq r+S \leq 1 \quad . \tag{46}$$

В случае равномерной сетки схема (44) приобретает вид

$$\frac{b_{i+1j}-2b_{ij}+b_{i-1,j}}{h^2} + \frac{b_{ij+1}-2b_{ij}+b_{ij-1}}{\ell^2} = - f_{ij} . \tag{47}$$

Она не что иное,как известная пятиточечная конечно-разностная схема. Отличие заключается лишь в том, что, во-первых, здесь схема написана для коэффициентов сплайна $S(x,y)$ и, во-вторых, схема определяется во всех узловых точках сетки Δ . Последнее обстоятельство может облегчить дело особенно для общих краевых задач. Таким образом, мы имеем эффективный алгоритм решения эллиптических задач (I), (2), которому присущи преимущества сплайновых и конечно-разностных схем.

Замечание 3. Следует отметить, что метод конечных элементов /6,I6/ дает аналогичные девятиточечные и пятиточечные схемы, но с более сложными правыми частями.

Схема (47) вместе с краевыми условиями (I0)-(I3) решается, например, методом переменных направлений /9/

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{b^{n+1/2}-b^n}{\tau^1_{n+1}} = \Lambda_1 b^{n+1/2} + \Lambda_2 b^n + f , \\ & \frac{b^{n+1} - b^{n+1/2}}{\tau^2_{n+1}} = \Lambda_2 b^{n+1} + \Lambda_1 b^{n+1/2} + f \end{aligned} \right. \tag{48}$$

с оптимальным выбором итерационных параметров τ^1_n , τ^2_n , для чего необходимо найти границы спектров оператора. Рассмотрим разностную краевую задачу

$$\left\{ \begin{aligned} & b_{\overline{x}x} = - f(x) \quad , \quad x_0 \leq x = ih \leq x_N , \\ & \sum_{k=-1}^{1} (\alpha_1 B_k(x_0) - \beta_1 B_k'(x_0)) b_k = \alpha^1 \quad , \\ & \sum_{k=N-1}^{N+1} (\alpha_3 B_k(x_N) + \beta_3 B_k'(x_N)) b_k = \alpha^3 . \end{aligned} \right. \tag{49}$$

Пусть $\beta_1 = \beta_3 = 0$, т.е. рассматривается первая краевая задача. Если ввести оператор $A_1 = - \widetilde{\Lambda}_1$, где

$$(\widetilde{\Lambda}_1 b)_i = \left\{ \begin{aligned} & \frac{-2b_1+b_2}{h^2} , \\ & \frac{b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1}}{h^2} , \quad i=2,\dots,N-2 , \\ & \frac{-2b_{N-1} + b_{N-2}}{h^2} , \end{aligned} \right.$$

то задачу (49) можно переписать в виде

$$A_1 b = \varphi \quad , \tag{50}$$

где $\varphi_i = f_i$, $i=2,\dots,N-2$, $\varphi_1 = f_0+f_1+ \frac{6}{h^2}\alpha^1$, $\varphi_{N-1}=f_N+f_{N1}+ \frac{6}{h^2}\alpha^3$. Оператор A_1 симметричен и положительно определен, и границы его спектров определяются формулами /9/

$$\delta_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2(b-a)} \quad ; \qquad \Delta_1 = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2(b-a)} \quad . \tag{5I}$$

Если $\beta_1 > 0$, $\beta_3 > 0$, то,вводя оператор A_1 формулой $A_1 = -\widetilde{\Lambda}_1$, где

$$\widetilde{\Lambda}_1 b = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{0,5h} (b_{x0} - \sigma_1 b_0) \quad i=0 \ , \quad \sigma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} > 0 , \\ & b_{\overline{x}x} \quad i = 1,\dots,N-1 \quad , \\ & - \frac{1}{0,5h} (b_{\overline{x},N} + \sigma_2 b_N) \quad i=N \quad , \quad \sigma_2 = \frac{\alpha_3}{\beta_3} > 0 \quad , \end{aligned} \right.$$

задачу (49) можно записать в виде (50), в котором вектор φ_1 определяется формулой

$$\varphi_1 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{0,5h} \mu_1 \quad , \ i = 0 \quad , \\ & f_i \quad , \qquad i=1,\dots,N-1 \quad , \\ & \frac{1}{0,5h} \mu_2 \quad , \ i= N , \end{aligned} \right.$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\beta_1} \alpha^1 + \frac{(\alpha_1 h + 3\beta_1)h}{6\beta_1} f_0 \quad , \quad \mu_2 = \frac{\alpha^3}{\beta_3} + \frac{(\alpha_3 h + 3\beta_3)h}{6\beta_3} f_N .$$

При этом оператор A_1 самосопряжен и положительно определен /9/ в смысле нормы

$$\| [y] \| = \sqrt{[y,y]} ,$$
$$[y,v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5h(y_0 v_0 + y_N v_N) .$$

В этом случае можно взять /9/

$$\delta_1 = \frac{2c_1}{1+c_1} \quad , \quad \Delta_1 = \frac{4}{h^2}\,(1+0{,}5c_2h) \quad , \tag{52}$$

где $c_1 = \min(\sigma_1\ ,\ \sigma_2)$, $c_2 = \max(\sigma_1\ ,\ \sigma_2)$.

Аналогичные результаты справедливы для разностной краевой задачи по y.

В случае неравномерной сетки разностные операторы Λ_1 , Λ_2 в (44) несимметричны. Однако матрицы системы симметризуются, если каждое уравнение из (44) умножить на $-(h_i+h_{i-1})(\ell_j+\ell_{j-1})/4$. После этого одномерные разностные операторы становятся симметричными и положительно определенными, и поэтому применим метод переменных направлений и справедлива теорема I.I0 (теорема о сходимости итерационного процесса) /I0/.

После нахождения коэффициентов b_{ij} значения сплайна и его производных вычисляются по формуле

$$D^{k+r}S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1}\ \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij}B_i^{(k)}(x)\,\tilde{B}_j^{(r)}(y)\,, \qquad 0 \le k+r \le 2 \ . \tag{53}$$

В случае равномерной сетки их можно вычислять в узлах сетки даже по формулам

$$\left\{\begin{aligned} & S_{ij} \approx b_{ij}\,,\ D^{10}S_{ij} \approx \frac{b_{i+1,j}-b_{i-1,j}}{2h}\,,\ D^{01}S_{ij} \approx \frac{b_{ij+1}-b_{ij-1}}{2\ell}\,,\\ & D^{20}S_{ij} \approx \frac{b_{i+1,j}-2b_{ij}+b_{i-1,j}}{h^2}\,,\ D^{02}S_{ij} \approx \frac{b_{ij+1}-2b_{ij}+b_{ij-1}}{\ell^2}\,,\\ & D^{11}S_{ij} \approx \frac{(b_{i+1,j+1}-b_{i-1,j+1})-(b_{i+1,j-1}-b_{i-1,j-1})}{4h\ell}\,,\ i=0,\dots,N,\ j=0,\dots,M, \end{aligned}\right. \tag{54}$$

погрешность которых имеет порядок $O(H^2 + L^2)$.

Замечание 4. Найдя границы спектров по формуле (52), мы имеем грубые значения для величин δ_i и Δ_i . Их точные значения, в принципе, можно найти /I3/, решая некоторые вспомогательные дифференциальные задачи.

§ 4. Численный эксперимент

Рассматривается уравнение

$$\Delta u = 0 \quad , \ 0 \le x \le 2 \quad , \quad 0 \le y \le 1 \quad ,$$

точным решением которого является функция $u = e^{\frac{\pi}{2}y} \cdot \sin\frac{\pi}{2}x$ /II/. Расчеты были сделаны на квадратной сетке с шагом $h = \ell$ для различных краевых условий. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока выполняется условие $\max\limits_{i,j}\left|b_{ij}^{n+1} - b_{ij}^{n}\right| \le \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

В таблицах I и 2 приняты следующие обозначения:

$$\varepsilon = \max_{ij}\left|S_{ij}-u_{ij}\right|\ ,\ \varepsilon'_x = \max_{ij}\left|D^{10}(S_{ij}-u_{ij})\right|\ ,\ \varepsilon'_y = \max_{ij}\left|D^{01}(S_{ij}-u_{ij})\right|\ ,$$

$$\varepsilon''_{xx} = \max_{ij}\left|D^{20}(S_{ij}-u_{ij})\right|\ ,\ \varepsilon''_{yy} = \max_{ij}\left|D^{02}(S_{ij}-u_{ij})\right|\ ,\ \varepsilon''_{xy} = \max_{ij}\left|D^{11}(S_{ij}-u_{ij})\right|,$$

n – число итераций. Оптимальные параметры определяются по известному алгоритму Жордана /9/ с учетом границ спектров операторов (5I), (52). Значения сплайна и его производных вычислены по формулам (54).

В таблице I приведены результаты численного эксперимента для третьей краевой задачи с константами

$\alpha_1=1,\ \beta_1=3,\ \alpha_2=1,\ \beta_1=1,\ \alpha_3=\frac{1}{2}\ ;\ \beta_3=\frac{4}{3}\ ;\ \alpha_4=3,\ \beta_4=2.$

В качестве границ спектров операторов Λ_1 и Λ_2 брались

$$\delta_1 = 1/2\ ,\ \Delta_1 = \frac{4+3h}{h^2}\ , \qquad \delta_2 = 1\ , \quad \Delta_2 = \frac{4+3\ell}{\ell^2}\ .$$

Таблица I

$h=\ell$	n	ε	ε'_x	ε'_y	ε''_{xy}	ε''_{xx}	ε''_{yy}
0,2	I6	0,0333I	0,II07	0,0825	0,06997	0,06355	0,06355
0,I	20	0,00837I	0,02907	0,02084	0,0II7I	0,0I586	0,0I586
0,05	22	0,002095	0,007374	0,005225	0,00I882	0,003965	0,003965
0,025	26	0,0005238	0,00I85I	0,00I307	0,0003488	0,00099I	0,000982

В таблице 2 приводятся численные результаты для задачи Дирихле.

Таблица 2

$h=\ell$	n	ε	ε'_x	ε'_y	ε''_{xy}	ε''_{xx}	ε''_{yy}
0,2	I5	0,009385	0,I205	0,0694I	0,I4I2	0,I780	0,I780
0,I	I4	0,002367	0,03023	0,0I765	0,0I950	0,02439	0,02420
0,05	I8	0,000593I	0,0077I5	0,004435	0,004980	0,006I00	0,00574
0,025	30	0,000I484	0,00I939	0,00II08	0,00I246	0,00I525	0,00I523

Из таблиц I, 2 видно, что численные эксперименты подтверждают теоретические выводы относительно сходимости приближенного решения и его производных.

Литература

I. Горбенко Н.И., Ильин В.П. Сплайновое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в двумерных областях. В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1978, с.71-80.

2. Имамов А., Роменский В.П. Метод сплайн-коллокации для уравнения Пуассона в прямоугольной области. В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.75). ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1978, с.56-67.

3. Завьялов Ю.С., Мирошниченко В.Л., Роменский В.П. О сходимости метода сплайн-коллокации для уравнения эллиптического типа в прямоугольной области. В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.87). ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1981, с.62-76.

4. Завьялов Ю.С. Метод сплайн-коллокаций решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1984. (Препринт/Институт математики СО АН СССР).

5. Волков Е.А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике. Труды МИАН, 1965, 77, с.89-112.

6. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Наука, М., 1980.

7. Жанлав Т. О краевых условиях для интерполяционных сплайнов. В кн.: Приближение сплайнами (Вычислительные системы, вып.106). ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1984, с.25-28.

8. Жанлав Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через B-сплайны. В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы, вып.87). ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1981, с.3-10.

9. Самарский А.А. Теория разностных схем. Наука, М., 1983.

10. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. Наука, М., 1985.

11. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, Р11-81-398, Дубна, 1981.

12. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. Наука, М., 1976.

13. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Наука, М., 1978.

14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Наука, М., 1966.

15. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. Наука, М., 1984.

16. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Мир, М., 1977.

17. Завьялов Ю.С., Мирошниченко В.Л. Метод сплайн-коллокации. В кн.: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, Наука, 1983, с.82-86.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июня 1987 года.

Жанлав Т., Жидков Е.П.

P11-87-414

Метод сплайн-коллокации решения общих краевых задач для уравнения Пуассона

Доказывается разрешимость и сходимость метода сплайн-коллокации решения общих краевых задач для двумерного уравнения Пуассона. На равномерной сетке рассматривается упрощенная пятиточечная сплайновая схема, которая может быть решена экономичными итерационными методами. Эффективность построенного алгоритма иллюстрируется численными расчетами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Zhanlav T., Zhydkov E.P.

P11-87-414

Spline Collocation Method Solving of General Boundary Value Problems for Poisson's equation

The convergence and soluble of spline collocation method solving of general boundary value problems for two-dimentional Poisson's equation are stated. On the uniform grids a simplified five-points spline scheme is considered which can be solved by economical iterative methods. The officiency of the constructed algorithm is illustrated by numerical calculations.

The investigation has been performed at the Laborytory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987