объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-87-204

Н.Е.Мазепа, С.И.Сердюкова

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МАКСИМАЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Направлено в журнал "Soviet Journal on Numerical Analysis and Mathematical Modellings" (SNAMM)

1987

В работе[5] доказано, что явные разностные схемы максимального нечетного порядка точности, написанные по несимметричному четному набору точек,

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-k}^{k-1} a_l u_{j+l}^n, \quad n \geq 0, \quad j \geq k,$$

устойчивы в C и обладают свойствами, близкими к оптимальным.

u_0^n, u_j^0 заданы. Для определения $u_1^{n+1}, \dots, u_{k-1}^{n+1}$ нужны дополнительные граничные условия. В предлагаемой работе для схем порядка точности $O(h^3)$, $O(h^5)$ предложены устойчивые граничные условия. Для уравнения $u_t + u_x = 0$ пишем аппроксимацию максимального порядка точности

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} u_j^n, \qquad i = 1, \dots, k-1.$$

Порядок аппроксимации на решении $O(h^{2k-1})$. Для проверки устойчивости поставленной левой краевой задачи используется система аналитических вычислений REDUCE[1]. В случае $\mathcal{L} = \frac{1}{2}$, $k = 2, 3$ показано, что спектр оператора перехода от слоя к слою G лежит строго внутри единичного круга. $\mathcal{L}$ – отношение шагов сетки. При $\mathcal{L} \leq 1$ задача Коши устойчива[5]. Тогда согласно теореме H.-O. Kreiss [3] устойчива рассматриваемая левая краевая задача. На правой границе недостающие u_i^{n+1} находятся аналогично:

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=N-2k+1}^{N} d_{ij} u_j^n, \quad i = N, \dots, N-k+2.$$

Точку спектра z назовем простой, если характеристическое уравнение

$$z x^k = \sum_{l=-k}^{k-1} a_l x^{k+l}$$

не имеет кратных решений, меньших по модулю единицы.

В общем случае (для любого k и любого $\mathcal{L} \leq 1$) доказано, что оператор перехода от слоя к слою правой краевой задачи не имеет простых точек спектра вне единичного круга. Тем самым исследование устойчивости сведено к исследованию "кратных точек спектра". Это более простая задача в числах по сравнению с задачей определения всего спектра, содержащей параметр z. Для $\mathcal{L} = \frac{1}{2}$, $k = 2, 3, \dots, 8$ прямым расчетом показано, что характеристическое уравнение имеет кратные решения, меньшие по модулю единицы, лишь при $|z| < 1$. В результате доказано, что G не имеет точек спектра в области $|z| \geq 1$, и, значит, рассматриваемая правая краевая задача устойчива.

Так как есть только одна наклонная характеристика, из устойчивости задачи Коши и полубесконечных краевых задач (при $\mathcal{L} = \frac{1}{2}$, $k = 2, 3$) следует[6] устойчивость задачи с двумя границами: $\|G^n\| \leq C$, $n \leq \exp(bN)$. В работе H.-O. Kreiss [3] исследуется устойчивость в L_2. Но из интегрального представления G^n [3] и оценок функции Грина задачи Коши в метрике L_1 [5] следует устойчивость рассматриваемых краевых задач в метрике C.

Переходим к доказательству. Левая краевая задача исследована при $k = 2, 3$. Аналогично работе[4] задача определения спектра оператора G сводится к решению полиномиального уравнения.

<u>Левая краевая задача, случай $k = 2$</u>

Исходная непрерывная краевая задача

$$u_t + u_x = 0, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0,$$

аппроксимируется разностной краевой задачей

$$
\begin{cases}
u_j^{n+1} = -\frac{1}{16} u_{j-2}^n + \frac{9}{16} u_{j-1}^n + \frac{9}{16} u_j^n - \frac{1}{16} u_{j+1}^n, \\
n \geq 0, \quad j \geq 2; \\
u_j^0 = f(jh), \quad j \geq 0; \\
u_0^n = 0 \\
u_1^{n+1} = \frac{5}{16} u_0^n + \frac{15}{16} u_1^n - \frac{5}{16} u_2^n + \frac{1}{16} u_3^n .
\end{cases} \qquad (I)
$$

Здесь и ниже, если это специально не оговаривается, $\lambda = \frac{1}{2}$. Порядок аппроксимации на решении есть $O(h^3)$. Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство последовательностей $v = \{v_j\}$, $j \geq 0$, из L_2, удовлетворяющих граничным условиям (I). z является точкой спектра оператора G, если существует ненулевая последовательность v из $\mathcal{H}$, такая, что $Gv = zv$. Назовем z обобщенной точкой спектра оператора G /3/, если соответствующая v является пределом последовательностей из L_2. Точки спектра и отвечающие им v находятся из решения "спектральной задачи":

$$
\begin{cases}
z v_j = -\frac{1}{16} v_{j-2} + \frac{9}{16} v_{j-1} + \frac{9}{16} v_j - \frac{1}{16} v_{j+1}, \quad j \geq 2, \\
v_0 = 0, \\
z v_1 = \frac{5}{16} v_0 + \frac{15}{16} v_1 - \frac{5}{16} v_2 + \frac{1}{16} v_3 .
\end{cases}
$$

Решение спектральной задачи ищем в виде $v_j = c x^j$, тогда x удовлетворяет характеристическому уравнению

$$
-\frac{1}{16} + \frac{9}{16} x + \left(\frac{9}{16} - z\right) x^2 - \frac{1}{16} x^3 = 0. \qquad (2)
$$

Известно/3/, что при $|z| \geq 1$ (2) имеет ровно два решения, меньшие по модулю единицы, $x_1(z)$, $x_2(z)$ и одно решение, большее по модулю единицы $x_3(z)$. Только $x_1(1) = 1$.

Для остальных z $|x_i(z)| < 1$, $i = 1, 2$. Спектральная задача имеет при $|z| \geq 1$ решение

$$
v_j = C_1 x_1^j + C_2 x_2^j, \quad x_1(z) \neq x_2(z),
$$

если $P(x_1) = P(x_2)$, где

$$
P(x) = -\frac{5}{16} + \left(z - \frac{15}{16}\right) x + \frac{5}{16} x^2 - \frac{1}{16} x^3 .
$$

Случай кратных x рассматривается отдельно.

Справедливо соотношение

$$
P(x_1) - P(x_2) = (x_1 - x_2)\left\{15 - 16z - 5(x_1 + x_2) + (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)\right\}. \qquad (3)
$$

Следуя/4/, положим

$$
X = x_1 + x_2, \quad y = x_1 \cdot x_2 .
$$

Из теоремы Вьета имеем

$$
X - \frac{1}{y} = 9 - 16z, \quad y - \frac{X}{y} = -9 .
$$

С помощью системы REDUCE делаем в (3) последовательные подстановки $z = \left(9 - X + \frac{1}{y}\right)/16$, $X = y^2 + 9y$. В результате получаем

$$
y^5 + 18y^4 + 77y^3 - 37y^2 + 6y - 1 = 0 .
$$

Это уравнение имеет три решения, меньшие по модулю единицы: $y_1 = 0{,}33666\ldots$; $y_{2,3} = 0{,}05656 \mp i\,0{,}1779\ldots$.
По ним определяются z:
$z_1 = 0{,}1804\ldots$; $z_{2,3} = 0{,}43102 \mp i\,0{,}2177\ldots$.

Тем самым показано, что G не имеет простых точек спектра в области $|z| \geq 1$. Кратные x удовлетворяют уравнению

$$
x^3 + 9x - 2 = 0 .
$$

Легко проверить, что есть одно вещественное решение на $[0, \frac{2}{9}]$ и два комплексно-сопряженных решения, большие по модулю единицы. Кратному значению x, меньшему $\frac{2}{9}$, отвечает $0 < z < 1$.

Итак, доказано, что для $k=2$ оператор перехода от слоя к слою левой краевой задачи не имеет точек спектра в области $|z|\geq 1$.

Замечание. Здесь и далее при решении полиномиальных уравнений использовался метод парабол. В случае необходимости решения уточнялись по методу Ньютона.

Левая краевая задача, случай $k=3$

Разностная краевая задача

$$u_j^{n+1} = \frac{3}{256}u_{j-3}^n - \frac{25}{256}u_{j-2}^n + \frac{150}{256}u_{j-1}^n + \frac{150}{256}u_j^n - \frac{25}{256}u_{j+1}^n + \frac{3}{256}u_{j+2}^n, \quad n\geq 0, \quad j\geq 3;$$

$$u_j^0 = f(jh), \quad j\geq 0;$$

$$u_0^n = 0$$

$$u_1^{n+1} = \frac{63}{256}u_0^n + \frac{315}{256}u_1^n - \frac{210}{256}u_2^n + \frac{126}{256}u_3^n - \frac{45}{256}u_4^n + \frac{7}{256}u_5^n$$

$$u_2^{n+1} = \frac{-7}{256}u_0^n + \frac{105}{256}u_1^n + \frac{210}{256}u_2^n - \frac{70}{256}u_3^n + \frac{21}{256}u_4^n - \frac{3}{256}u_5^n.$$

аппроксимирует исходную непрерывную левую краевую задачу. Порядок аппроксимации на решении есть $O(h^5)$. При $|z|\geq 1$ характеристическое уравнение

$$3-25x+150x^2+(150-256z)x^3-25x^4+3x^5=0$$

имеет три решения, меньшие по модулю единицы, x_1, x_2, x_3.

Как и выше, $x_1(1)=1$.

Спектральная задача имеет решение

$$v_j = c_1x_1^j + c_2x_2^j + c_3x_3^j, \quad x_i\neq x_j,$$

если z удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D} = \det\begin{Vmatrix}1&1&1\\ \varphi_1(x_1)&\varphi_1(x_2)&\varphi_1(x_3)\\ \varphi_2(x_1)&\varphi_2(x_2)&\varphi_2(x_3)\end{Vmatrix}=0,$$ где

$$\varphi_1(x) = 63+(315-256z)x-210x^2+126x^3-45x^4+7x^5,$$

$$\varphi_2(x) = -7+105x+(210-256z)x^2-70x^3+21x^4-3x^5.$$

Вычитаем из I-го и 2-го столбцов соответственно 2-й и 3-й столбцы. Имеем

$$\mathcal{D}=(x_1-x_2)(x_2-x_3)\det\begin{Vmatrix}0&0&1\\ \psi_1(x_1,x_2)&\psi_1(x_2,x_3)&\varphi_1(x_3)\\ \psi_2(x_1,x_2)&\psi_2(x_2,x_3)&\varphi_2(x_3)\end{Vmatrix} =$$

$$= (x_1-x_2)(x_2-x_3)\mathcal{D}',$$ где

$$\psi_1(x_1,x_2) = -256z+315-210(x_1+x_2)+126(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-$$
$$-45(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)+7\{x_1^4+x_2^4+x_1x_2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\},$$

$$\psi_2(x_1,x_2) = -256z(x_1+x_2)+105+210(x_1+x_2)-70(x_1^2+x_1x_2+$$
$$+x_2^2)+21(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)-3\{x_1^4+x_2^4+x_1x_2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\}.$$

В $\mathcal{D}'$ из первого столбца вычитаем второй, получаем

$$\mathcal{D}'=(x_1-x_3)\det\begin{Vmatrix}\mathcal{F}_{11}(x_1,x_2,x_3)&\psi_1(x_2,x_3)\\ \mathcal{F}_{21}(x_1,x_2,x_3)&\psi_2(x_2,x_3)\end{Vmatrix},$$ где

$$\mathcal{F}_{11} = -210+126(x_1+x_2+x_3)-45(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+$$
$$x_1x_3+x_2x_3)+7(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1x_2x_3+q),$$

$$\mathcal{F}_{21} = -256z+210-70(x_1+x_2+x_3)+21(x_1^2+x_2^2+x_3^2+$$
$$+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-3(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1x_2x_3+q),$$

$$q = x_1^2(x_2+x_3)+x_1(x_2^2+x_3^2)+x_2x_3(x_2+x_3). \qquad (4)$$

Наконец, в последнем определителе из второго столбца вычитаем первый, умноженный на (x_2+x_3). В результате имеем

$$\mathcal{D} = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\,\det\begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22}\end{Vmatrix},$$ где

$$F_{12} = -256z + 315 - 126\,(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) + 45\,(q+2x_1x_2x_3) -$$
$$-7\left\{x_1x_2x_3\,(x_1+x_2+x_3) + (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) + (x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)\right\},$$

$$F_{22} = 105 + 70\,(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) - 21\,(q+2x_1x_2x_3) +$$
$$+3\left\{x_1x_2x_3\,(x_1+x_2+x_3) + (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) + (x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)\right\}.$$

Положим $X = x_1+x_2+x_3$, $y = x_1x_2x_3$,
$U = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.
Тогда $q = UX - 3y$ (см. (4)).

Элементы F_{ij} могут быть представлены как функции U, X, y, q:

$$F_{11} = -210 + 126X - 45(X^2-U) + 7(X^3-2q-5y),$$
$$F_{12} = -256z + 315 - 126U + 45(UX-y) - 7(X^2U - Xy - U^2),$$
$$F_{21} = -256z + 210 - 70X + 21(X^2-U) - 3(X^3-2q-5y),$$
$$F_{22} = 105 + 70U - 21(UX-y) + 3(X^2U - Xy - U^2).$$

Из соотношений Виета получаем систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{50+y-\frac{X}{y}}{\frac{25}{3}-X} - \dfrac{1}{y} + X\left(\dfrac{25}{3}-X\right) = 50 - \dfrac{256z}{3}, \\[2ex] \dfrac{50+y-\frac{X}{y}}{\frac{25}{3}-X}\cdot\dfrac{1}{y} + y\left(\dfrac{25}{3}-X\right) = -\dfrac{25}{3}. \end{cases} \qquad (5)$$

Отсюда X и z могут быть представлены как функции y. С помощью системы REDUCE осуществляем соответствующие подстановки в $\det\|F_{ij}\| = 0$ и освобождаемся от радикалов. В результате получаем полиномиальное уравнение:

$$F(y) = \sum_{l=1}^{37} A(l)\,y^{37-l} = 0,$$ где

```
A(1)=4782969
A(2)=1913187600
A(3)=332885076462
A(4)=32806600844634
A(5)=1991719581649245
A(6)=753882101114945833
A(7)=1686802688398015650
A(8)=18340448569030283067
A(9)=17354937099037035816
A(10)=709448276876387826123
A(11)=5448535849934779369806
A(12)=17768036902952502000225
A(13)=34561976605867895858604
A(14)=36059806446362158657851
A(15)=144009192672408772346130
A(16)=695011281141526626793761
A(17)=48306941267975262427446
A(18)=1176112170978226200886545
A(19)=3395408869347864720102234
A(20)=3275228709018872931564711
A(21)=2092199726751505698149382
A(22)=96318762202358559147723
A(23)=439796720075189372733034
A(24)=390834511185623352099199
A(25)=48014034657689550018032
A(26)=448792722730197224426575
A(27)=49584146771480320691594
A(28)=25598344678652113635875
A(29)=3076086275496345181500
A(30)=450963225587699034375
A(31)=2558027457336306250
A(32)=21353120767766953125
A(33)=1409702548915546875
A(34)=55282107490046875
A(35)=1333933312500000
A(36)=20182763671875
A(37)=192216796875     .
```

По y_i находим z_i. Так как не только выделенные x_i удовлетворяют соотношениям (5), могут получиться ложные точки спектра, но они легко отделяются /4/. Все 36 решений y_i лежат внутри единичного круга. Девяти y_i отвечают z_i, большие по модулю I, но соответствующие X_i больше по модулю 3:

y_i	z_i	X_i
$-0,1735;$	$1,565;$	$-6,111;$
$-0,0078 \pm i\,0,142;$	$0,2294 \mp i\,1,419;$	$-2,923 \pm i\,7,953;$
$0,4125 \mp i\,0,0568;$	$1,652 \mp i\,0,238;$	$14,62 \mp i\,0,991;$
$0,2418 \mp i\,0,2043;$	$1,196 \mp i\,1,001;$	$13,70 \mp i\,4,641;$

$y_{8,9} = y_{23} + O(10^{-4})$.

Найдены "ложные точки спектра". Напомним, что $X = x_1 + x_2 + x_3$, где $|x_i| \le 1$. Кратные значения x удовлетворяют уравнению

$$6x^5 - 25x^4 - 150x^2 + 50x - 9 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения, меньшие по модулю единицы:

$$x_{1,2} = 0,1668 \pm i\,0,1779.$$

Из характеристического уравнения находим

$$z_{1,2} = 1,6948 \mp i\,0,6438.$$

Решение спектральной задачи ищем в виде

$$v_j = C_1 x_1^j + C_2\, j\, x_1^j + C_3 x_3^j,$$

C_i определяются из граничных условий

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0, \\ r_{11} C_1 + r_{12} C_2 = 0, \\ r_{21} C_1 + r_{22} C_2 = 0. \end{cases}$$

Справедливы соотношения

$$r_{11} = (315 - 256z)(x_1 - x_3) - 210(x_1^2 - x_3^2) + 126(x_1^3 - x_3^3) - 45(x_1^4 - x_3^4) + 7(x_1^5 - x_3^5),$$

$$r_{12} = (315 - 256z)x_1 - 420x_1^2 + 378x_1^3 - 180x_1^4 + 35x_1^5,$$

$$r_{21} = 105(x_1 - x_3) + (210 - 256z)(x_1^2 - x_3^2) - 70(x_1^3 - x_3^3) + 21(x_1^4 - x_3^4) - 3(x_1^5 - x_3^5),$$

$$r_{22} = 105x_1 + (420 - 512z)x_1^2 - 210x_1^3 + 84x_1^4 - 15x_1^5.$$

Считаем определитель

$$\det \| r_{ij} \| = -985,66 \pm i\,1434,2167.$$

Значения x_1, x_3 уточняются по методу Ньютона, получается сходящаяся последовательность приближенных значений $\det\|r_{ij}\|$. Здесь приведены установившиеся знаки значений $\det\|r_{ij}\|$. В таком смысле надо понимать все приведенные результаты численных расчетов.

Итак, показано, что $\det\|r_{ij}\| \ne 0$. Значит, нет "кратных точек спектра". В результате доказано, что в случае $\alpha = \frac{1}{2}$, $k = 3$ левая краевая задача не имеет точек спектра в области $|z| \ge 1$.

<u>Правая краевая задача</u>

После замены X на $-X$ правая краевая задача для уравнения $u_t + u_x = 0$ переходит в левую краевую задачу для уравнения $u_t = u_x$.

<u>Теорема</u>. Пусть для уравнения $u_t = u_x$ используется разностная схема максимального порядка точности, написанная по несимметричному четному набору точек

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-k+1}^{k} a_l \, u_{j+l}^{n}, \quad j \ge k-1, \quad \alpha = \frac{\tau}{h}, \quad \alpha \ne 1, \quad n \ge 0,$$

$$a_l = a_{k-i} = (-1)^l \, \frac{C_{2k-1}^{\tau}}{(-l+\alpha)} \, \frac{(k-\alpha)\dots(1-\alpha)\alpha(1+\alpha)\dots(k-1+\alpha)}{(2k-1)!} .$$

u_j^0 заданы.

Если недостающие $u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, \dots, u_{k-2}^{n+1}$ находятся из аппроксимации $u_t = u_x$ максимального порядка точности

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} \, u_j^n, \quad i = 0, 1, \dots, k-2,$$

то исследование устойчивости рассматриваемой левой краевой задачи сводится к исследованию "кратных точек спектра" G. Если "кратные точки спектра" лежат строго внутри единичного круга, рассматриваемая краевая задача устойчива.

<u>Доказательство</u>

Параметры аппроксимации a_l, c_{ij} являются решениями следующих систем:

$$\begin{array}{l|l}
1 = \sum\limits_{l=-k+1}^{k} a_l, & 1 = \sum\limits_{j=0}^{2k-1} c_{ij}, \quad i = 0, \dots, k-2, \\
\alpha = \sum\limits_{l=-k+1}^{k} l a_l, & \alpha = \sum\limits_{j=0}^{2k-1} (j-i) c_{ij}, \\
\alpha^2 = \sum\limits_{l=-k+1}^{k} l^2 a_l, & \alpha^2 = \sum\limits_{j=0}^{2k-1} (j-i)^2 c_{ij}, \\
\dots\dots & \dots\dots \\
\alpha^{2k-1} = \sum\limits_{l=-k+1}^{k} l^{2k-1} a_l . & \alpha^{2k-1} = \sum\limits_{j=0}^{2k-1} (j-i)^{2k-1} c_{ij} .
\end{array} \qquad (6)$$

Рассмотрим многочлены

$$P_i(x) = \sum_{l=0}^{2k-1} a_{l-k+1} x^l - x^{k-1-i} \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} x^j, \quad i = 0, \dots, k-2.$$

<u>Лемма</u>. Многочлены $P_i(x)$ имеют при $x = 1$ ноль кратности $2k$:

$$P_i(x) = -c_{i,2k-1} \cdot (x-1)^{2k} \, Q_{k-2-i}(x).$$

Коэффициент при старшем члене $Q_{k-2-i}(x)$ равен I.

Заметим, что при $0 < \alpha < 1$ все $c_{i,2k-1} \ne 0$.
В самом деле,

$$c_{i,2k-1} = \frac{\alpha}{(2k-1-i)} \, \frac{W(-i, -(i-1), \dots, -1, 1, \dots, 2k-2-i, \alpha)}{W(-i, -(i-1), \dots, -1, 1, \dots, 2k-2-i, 2k-1-i)},$$

где $W(x_1, \dots, x_n)$ – определитель Вандермонда. Известно/I/, что

$$W(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{Vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

<u>Доказательство леммы</u>. Покажем, что

$$P_i(1) = P_i'(1) = \dots = P_i^{(2k-1)}(1) = 0.$$

Представим $P_i(x)$ в виде

$$P_i(x) = x^{k-1}\left\{\sum_{l=-k+1}^{k} a_l x^l - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij}\, x^{j-i}\right\} = x^{k-1}\mathcal{F}(x).$$

Имеем $\quad P_i(1) = \mathcal{F}(1) = \sum\limits_{l=-k+1}^{k} a_l - \sum\limits_{j=0}^{2k-1} c_{ij} = 0.$

Далее получаем

$$P_i'(x) = (x^{k-1})'\mathcal{F}(x) + x^{k-2}\left\{\sum_{l=-k+1}^{k} l a_l x^l - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij}(j-i)x^{j-i}\right\} =$$
$$= (x^{k-1})'\mathcal{F}(x) + x^{k-2}\mathcal{F}_1(x).$$

Из двух первых пар уравнений системы (6) следует, что $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}_1(1) = 0.$ Производная порядка l имеет вид

$$P^{(l)}(x) = (x^{k-1})^{(l)}\mathcal{F}(x) + (x^{k-2})^{(l-1)}\mathcal{F}_1(x) + \ldots + x^{k-1-l}\mathcal{F}_l(x),$$

где $\mathcal{F}_s(x) = \sum\limits_{l=-k+1}^{k} a_l l^s x^l - \sum\limits_{j=0}^{2k-1} c_{ij}\cdot(j-i)^s x^{j-i}.$

Из $(s+1)$ -й пары уравнений (6) следует, что $\mathcal{F}_s(1) = 0.$
Следовательно, $P(1) = P'(1) = \ldots = P^{(2k-1)}(1) = 0.$
Дальнейшее продвижение невозможно, так как использованы все $2k$ пары уравнений системы (6). Точки спектра G, расположенные вне единичного круга, являются решением следующей алгебраической задачи. При $|z| \geq 1$ характеристическое уравнение имеет ровно $(k-1)$ решений /3/, меньших по модулю единицы. Обозначим их через $x_1(z), x_2(z), \ldots, x_{k-1}(z)$. Решение спектральной задачи

$$\begin{cases} z v_j = \sum\limits_{l=-k+1}^{k} a_l v_{j+l}, & j \geq k-1, \\ z v_i = \sum\limits_{j=0}^{2k-1} c_{ij} v_j, & i = 0, \ldots, k-2. \end{cases}$$

ищем в виде $\quad v_j = \sum\limits_{l=1}^{k-1} b_l x_l^j(z).\quad$ Параметры b_l определяются из граничных условий

$$z\left(\sum_{l=1}^{k-1} b_l x_l^i\right) = \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij}\left(\sum_{l=1}^{k-1} b_l x_l^j\right), \quad i = 0, \ldots, k-2.$$

Эта система имеет ненулевое решение, если

$$\det \left\| z x_l^i - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} x_l^j \right\| = \det\|\xi_{il}\| = 0. \qquad (7)$$

Уравнение для определения спектра G получено. В силу характеристического уравнения

$$z = \sum_{s=-k+1}^{k} a_s x_l^s, \quad l = 1, \ldots, k-1.$$

Тогда ξ_{il} в (7) можно переписать в виде

$$\xi_{il} = x_l^i \sum_{s=-k+1}^{k} a_s x_l^s - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} x_l^j = x_l^{-k+i+1} P_i(x_l).$$

Но согласно лемме $P_i(x_l) = -c_{i,2k-1}(x_l-1)^{2k} Q_{k-2-i}(x_l).$
Следовательно, из l -го столбца можно вынести множитель $x_l^{-k+1}(x_l-1)^{2k}.$
После этого под знаком определителя в (7) остается матрица $\|\psi_{il}\|$

$$\begin{aligned}
\psi_{1,l} &= a_{-k+1} + w_1^1 x_l + w_2^1 x_l^2 + \ldots + w_{k-2}^1 x_l^{k-2}, \\
\psi_{2,l} &= \qquad a_{-k+1} x_l + w_2^2 x_l^2 + \ldots + w_{k-2}^2 x_l^{k-2}, \\
&\qquad \ldots \\
\psi_{k-2,l} &= \qquad\qquad a_{-k+1} x_l^{k-3} + w_{k-2}^{k-2} x_l^{k-2}, \\
\psi_{k-1,l} &= \qquad\qquad\qquad a_{-k+1} x_l^{k-2}.
\end{aligned}$$

Напомним, что

$$a_{-k+1} = (-1)^{k-1}\,\frac{(k-\alpha)\ldots(1-\alpha)\,\alpha\,(1+\alpha)\ldots(k-1+\alpha)}{(-k+1+\alpha)\,(2k-1)!},$$

$a_{-k+1} \neq 0$ при $0 < \alpha < 1$.

Очевидным образом в $\det \|\psi_{il}\|$ можно избавиться от внедиагональных элементов, после чего остается определитель Вандермонда.

Итак, получен явный вид определителя в (7):

$$\det \|\xi_{il}\| = (a_{-k+1})^{k-1}\left(\prod_{l=1}^{k-1}\frac{(x_l-1)^{2k}}{x_l^{k-1}}\right)W(x_1,\ldots,x_{k-1}) =$$

$$= (a_{-k+1})^{k-1}\left(\prod_{l=1}^{k-1}\frac{(x_l-1)^{2k}}{x_l^{k-1}}\right)\prod_{1\le j<i\le k-1}(x_i-x_j).$$

При $|z|\geq 1$ рассматриваемые x_i $(i=1,2,\ldots,k-1)$ строго меньше по модулю единицы. Поэтому $\det\|\xi_{il}\|\neq 0$ при $|z|\geq 1$, если только

$$\prod_{1\le j<i\le k-1}(x_i-x_j)\neq 0.$$

Остается найти z, которым отвечают кратные x, меньшие по модулю единицы. Такие x, z определяются из системы

$$\begin{cases} z x^{k-1} = \sum\limits_{l=0}^{2k-1} a_{l-k+1}\, x^l, \\ (k-1) z\, x^{k-1} = \sum\limits_{l=0}^{2k-1} l\, a_{l-k+1}\, x^l. \end{cases}$$

Рассматриваемая система имеет не более $(2k-1)$ решений.

Теорема доказана.

"Кратные точки спектра" найдены для $\alpha=\frac{1}{2}$, $k=2,3,\ldots,8$. Для таких α и k при $|z|\geq 1$ не обнаружено кратных x, меньших по модулю единицы.

В заключение приведем результаты расчетов для $k=2,3$. Вернемся к правой краевой задаче для уравнения $u_t+u_x=0$.

Правая краевая задача $k=2$, $\alpha=\frac{1}{2}$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{16}\left(-u_{j-2}^n + 9u_{j-1}^n + 9u_j^n - u_{j+1}^n\right),\quad j\le N-1,$$

$$u_N^{n+1} = \frac{1}{16}\left(5u_N^n + 15u_{N-1}^n - 5u_{N-2}^n + u_{N-3}^n\right).$$

Порядок аппроксимации на точном решении $O(h^3)$.

Обнаружены две "кратные точки спектра"

$$z_{1,2} = 0{,}56943 \pm i\,0{,}37526,\qquad |z_{1,2}|<1.$$

Правая краевая задача, $k=3$, $\alpha=\frac{1}{2}$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{256}\left(3u_{j-3}^n - 25u_{j-2}^n + 150u_{j-1}^n + 150u_j^n - 25u_{j+1}^n + 3u_{j+2}^n\right),\quad j\le N-2,$$

$$u_N^{n+1} = \frac{1}{256}\left(63u_N^n + 315u_{N-1}^n - 210u_{N-2}^n + 126u_{N-3}^n - 45u_{N-4}^n + 7u_{N-5}^n\right),$$

$$u_{N-1}^{n+1} = \frac{1}{256}\left(-7u_N^n + 105u_{N-1}^n + 210u_{N-2}^n - 70u_{N-3}^n + 21u_{N-4}^n - 3u_{N-5}^n\right).$$

Порядок аппроксимации на точном решении $O(h^5)$.

Обнаружены три "кратные точки спектра"

$$z_{1,2} = 0{,}54156 \pm i\, 0{,}5025, \quad |z_{1,2}| < 1,$$
$$z_3 = 0{,}5039.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А.О. "Исчисление конечных разностей", Москва, ФМ, 1959, с.10.
2. Hern A,G. REDUCE User's Manual 2-nd.Univ.of Utan, 1973, 70p.
3. H.-O.Kreiss. Stability Theory for Difference Approximations of Mixed Initial Boundary Value Problems ,Math.of Comp., 1968,vol.22,N°107,p.703-711 .
4. Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И. Исследование устойчивости одной разностной краевой задачи с применением системы аналитических вычислений , Математика, 1985 10(281); с.55-61.
5. Сердюкова С.И. Асимптотические свойства разностных схем максимального нечетного порядка точности . Мат. заметки, 1982, т.32, вып.4, с.517-528.
6. Сердюкова С.И. Об устойчивости разностных краевых задач с наклонными характеристиками постоянного знака . ЖВМ и МФ, 1975,г., т.15, № 5, 1333-1339.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 марта 1987 года.

Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И.

Р11-87-204

Дополнительные граничные условия для разностных схем максимального нечетного порядка точности

Для разностных схем максимального нечетного порядка точности /2k-1/ предложены дополнительные граничные условия того же порядка точности /2k-1/. Доказана устойчивость в C левой краевой задачи при $a = 1/2$, $k = 2,3$. Здесь a - отношение шагов сетки. Наибольшую трудность представляет определение спектра оператора перехода от слоя к слою G. Используется развитая нами ранее методика с применением системы аналитических вычислений REDUCE. Задача определения спектра G сводится к решению полиномиального уравнения. Устойчивость правой краевой задачи в C доказана для $a = 1/2$, $k = 2,3,\dots,8$. В общем случае /при любом k и любом $a \le 1$/ доказано, что оператор перехода от слоя к слою правой краевой задачи не имеет "простых"точек спектра, вне единичного круга. Из устойчивости полубесконечных краевых задач практически следует устойчивость задачи с двумя границами: $\|G^n\| \le c$, $n \le \exp(bN)$. Здесь N - число точек по x.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Mazepa N.E., Serdykova S.I.

P11-87-204

Additional Boundary Conditions for the Difference Schemes of Maximum Odd Accuracy

For the difference schemes of maximum odd accuracy (2k-1) we set the additional boundary conditions of the same accuracy (2k-1). The left boundary problem stability in C is proved for $a = 1/2$, $k = 2,3$. Here a is mesh ratio. The main difficulty consists in finding of the spectrum of the operator of the transition from layer to layer G. We use our previously developed methods with application of the symbolic computation system REDUCE. The spectrum definition problem is reduced to the polinomial equation solution. The right boundary problem stability in C is proved for $a = 1/2$, $k = 2, \dots, 8$. In general case (for any k and any $a \le 1$) it is proved that the operator G of the right boundary problem has no "simple spectrum point" outside the unit circle. The half-infinite difference boundary problems stability implies practically the stability of the problem with two boundaries: $\|G^n\| \le c$, $n \le \exp(bN)$. Here N is the number of points in x.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987